

סרטוט סכמטי ככלי בפתרון בעיות מתמטיות

עירית גרשקוביץ, ורדה הוס, דליה חן, קלרה שפושניק

לקראת בחירת המודל המתמטי המתאים לפתרון השאלה. סרטוט סכמטי יכול גם לסייע בעבודה בעזרת המודל המתמטי.

כדי להדגים הנחה זו, בחרנו במאמר זה להציג דרכים להתמודדות עם שאלות לא שגרתיות בשברים פשוטים, תוך כדי שימוש בייצוגים סכמטיים של הבעיות, ושל המודל המתמטי שנבחר לפתרון. השאלות מיועדות לתלמידי כיתה ה'. השאלות שנבחרו הן שאלות שלא נלמדות בשלב הלמידה של שברים בכיתה ה', ולכן הן לא שגרתיות עבור התלמידים. היות ואין לתלמידים בכיתה ה' ידע פורמאלי של האלגוריתם לפתירת שאלות כאלו, יש להניח שהתלמידים יאלצו למצוא דרכים חלופיות לפתרון, תוך שימוש בידע קודם ובאמצעי המחשה.

הסרטוטים הסכמטיים משמשים כייצוגים שונים למושגים מתמטיים- במקרים שיוצגו במאמר כייצוגים לשברים הפשוטים. במהלך העבודה, באמצעות סרטוטים סכמטיים, התלמיד נאלץ לעבור מייצוג לייצוג. יכולת המעבר מייצוג לייצוג של מספרים ושל מושגים מתמטיים אחרים, היא תשתית ליצירת קישורים משמעותיים שבין המושגים המתמטיים ולהבניית תובנה מתמטית עמוקה. לכן, בדרך עבודה זו אנו מציגים את המטרה של טיפוח היכולת לעבור מייצוג לייצוג של מספרים, בנוסף לרכישת אסטרטגיות לפתרון בעיות.

מאחר שהבעיות שיוצגו עוסקות גם במושגים שיימדו בעתיד (כגון: מציאת השלם על-פי החלק), יש להניח שבמקרים מסוימים הסרטוטים הסכמטיים יוכלו לשמש למושגים שיימדו, כדימוי מושג ראשוני, ויזואלי, שישמש כידע קודם ליצירת מבנים ומושגים מתמטיים חדשים, שכאמור, יילמדו פורמאלית בשלב מאוחר יותר.

מבוא

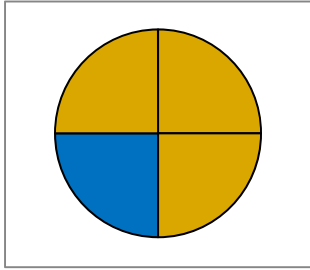
שימוש בסרטוט סכמטי כייצוג של מודל או דימוי מושג עשוי להיות כלי עזר משמעותי ביותר בפתרון תרגילים, בעיות ושאלות, בנושאים שונים במתמטיקה. למרות זאת, רק תלמידים מעטים משתמשים בסרטוטים לצורך פתרון בעיות. נתון זה עולה מבדיקת מבחני מיצ"ב ברמה הארצית, ומשיחות רבות עם מורים, המדווחים על שימוש באסטרטגיות שונות לפתרון בעיות במהלך הלמידה, ומניתוח אסטרטגיות לפתרון שאלות מבחני מיצ"ב פנימיים או אחרים, הנערכים בבתי הספר.

בניתוח הפריטים של מבחני המיצ"ב הוצג לכל פריט אחוז התלמידים שלא ענה על הפריט. אפשר לראות בצורה ברורה שככל שהשאלה פחות שגרתית ופחות מוכרת, עולה אחוז התלמידים הנמנעים מלענות על השאלה. בדרך כלל, אין תיעוד לכך שנעשה ניסיון כלשהו למצוא דרך לפתרון. כלומר, התלמידים בוחרים שלא להתמודד עם הלא מוכר.

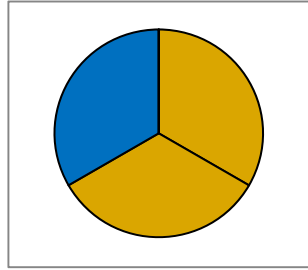
מאחר וההנחה היא, ששליטה אמיתית במתמטיקה היא היכולת של יישום הידע המתמטי על-ידי בחירה ושימוש במודלים המתמטיים המתאימים לפתרון הבעיה, מוסכם על כולם שבתהליכי ההוראה וההערכה יש להציג בפני התלמידים משימות שאינן מוכרות, והדרך לפתרון איננה שגרתית. במשימות שאינן שגרתיות המודל המתמטי איננו "שקוף", וקשה לראות מההקשר הסיפורי והמספרי אילו פעולות חשבון יש לבצע. בשאלות כאלו התלמיד צריך לפרק את הסיטואציה, לארגן מחדש את הנתונים הסיפוריים והמספריים, ולהחליט באיזו אסטרטגיה יפתור את השאלה ובאילו מיומנויות מתמטיות ישתמש.

אנו סבורות ששימוש בסרטוט סכמטי, יכול לסייע לתלמידים בהבנת הסיטואציה והנתונים, ובארגון המידע

איור 1



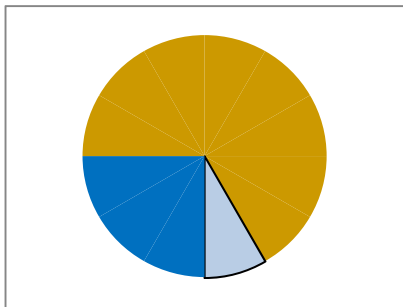
החלק המייצג את התלמידים שבחרו להשתתף בחוג קולנוע



החלק המייצג את התלמידים שבחרו להשתתף בחוג ספורט

מהשוואת השטחים המייצגים את השברים, ניתן לראות שהחלק שבחר להשתתף בחוג לקולנוע גדול מהחלק שבחר להשתתף בחוג לספורט. עובדה שיש להניח שהתלמידים יבחינו בה גם מהשוואת המספרים. הקושי הוא בתרגום הפרש השטחים למספר התלמידים. בשלב הראשון נסמן על הסרטוט את השטח המייצג את ההפרש בין שני השטחים. אפשר לעבוד על שקף או על נייר שקוף, ולהניח את שני העיגולים אחד על השני, כדי להמחיש את ההפרש. בשלב זה חשוב לשוחח על העובדה שהשלמים מייצגים מספר תלמידים, והפרש השטחים מייצג את ההפרש שבין מספר התלמידים בשני החוגים. (איור 2)

איור 2



החלק המייצג את ההפרש בין מספר התלמידים שבחרו להשתתף בחוג קולנוע לבין מספר התלמידים שבחרו בחוג ספורט.

הידע הנדרש לפתרון המשימות שיוצגו:

- הכרת שברים פשוטים;
- הכרת משמעות השבר כחלק משלם, כחלק מכמות;
- הכרת השבר כנקודה על ישר המספרים, ויכולת מיקום שברים פשוטים על ישר המספרים;
- כפל וחילוק מספרים שלמים;
- צמצום והרחבה של שברים;
- חיבור וחסור שברים עם מכנים זהים, דומים וזרים;
- מציאת השלם על-פי החלק (באופן אינטואיטיבי, בעזרת ציור, [ראה ת"ל כיתה ד עמ' 76](#)).

שאלות והצעות לפתרון בעזרת ייצוגים שונים

שאלה 1

מתלמידי הכיתה בחרו להשתתף בחוג ספורט. $\frac{2}{3}$

מתלמידי הכיתה בחרו להשתתף בחוג קולנוע. $\frac{3}{4}$

מספר התלמידים שבחרו להשתתף בחוג קולנוע גדול ב - 3 ממספר התלמידים שבחרו להשתתף בחוג ספורט.

כמה תלמידים בכיתה?

את השאלה ניתן לייצג במספר אופנים:

א. ייצוג השברים כחלקי עיגול

מאחר ומדובר על אותו שלם (אותה כיתה) נייצג את החלקים על שני עיגולים שווים בגודלם, שכל אחד מהם ייצג את השלם – כל תלמידי הכיתה. (איור 1)



בעזרת חישוב או חלוקת העיגולים ל-12 חלקים שווים (חשוב לשוחח מדוע דווקא 12, או להציג לתלמידים את השאלה: לכמה חלקים כדאי לחלק את העיגולים?), אפשר למצוא שהחלק המייצג את ההפרש במספר התלמידים

$$\text{הוא: } \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

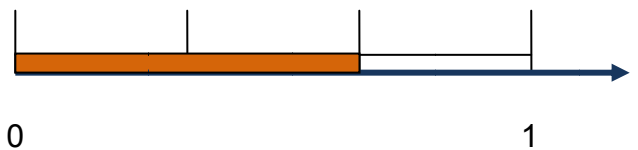
אם $\frac{1}{12}$ משלם הם 3 תלמידים (מידע הנתון בשאלה), הרי שיש לכפול ב-12 כדי למצוא את המספר הכולל של כל תלמידי הכיתה.

ב. ייצוג בעזרת ישר המספרים

לצורך כך נסרטט קטע יחידה בין 0 ל-1. קטע היחידה השלם ייצג את השלם - את מספר תלמידי הכיתה.

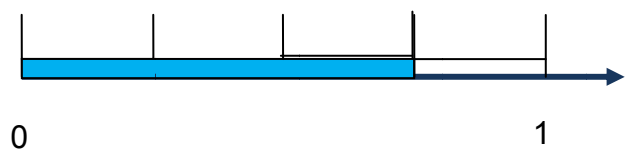


את קטע היחידה נחלק ל-3 חלקים שווים באורכם ונסמן בצבע חום $\frac{2}{3}$ מהקטע..



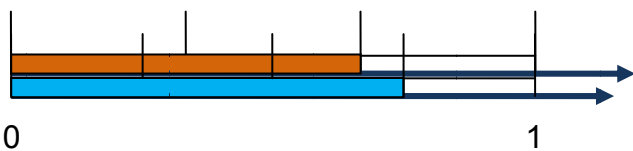
על ישר מספרים נוסף נסמן את אותו קטע יחידה. הפעם נחלק את קטע היחידה ל-4 חלקים שווים, ונסמן בצבע

כחול $\frac{3}{4}$ מקטע היחידה:



כדי לדעת בכמה גדול אורכו של $\frac{3}{4}$ מ- $\frac{2}{3}$, נניח אחד על

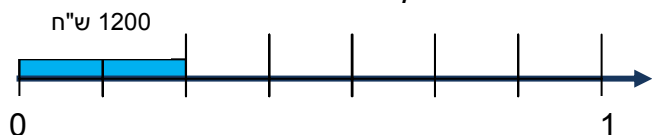
השני, נקודת אפס אחת על נקודת אפס שנייה, וכך ניתן לראות את החלק שמייצג את ההפרש, שהוא 3 תלמידים.



ייצוג בעזרת ישר המספרים

מכיוון ששולמו $\frac{2}{7}$ מהמחיר, נחלק את קטע היחידה ל-7

חלקים שווים, ונסמן $\frac{2}{7}$ מקטע היחידה.



נסמן על הסרטוט גם את העובדה ש- $\frac{2}{7}$ מהמחיר שווה

ל- 1200 שקלים.

בעזרת הייצוג על הישר ניתן לראות ולהסיק ש- $\frac{1}{7}$

מהקטע (מהמחיר) הוא 600 ₪. מאחר ובשלם יש 7 שביעיות, נכפול את 600 ב-7.

אפשר גם לרשום מתחת לכל חלק 600 ₪.

יש להניח שהתלמידים יציעו לרשום לצד כל שתי שביעיות 1,200 ₪. אבל מאחר ובשלם יש מספר אי-זוגי של שביעיות, תתעורר בעיה שתאלץ אותם לפחות פעם

$$\text{אחת לפצל את } \frac{2}{7} \text{ ל- } \frac{1}{7} \text{ ועוד } \frac{1}{7}.$$

נתרגם את הפעולות שעשינו לייצוג מספרי:

בדרך אחת:

$$1200 : 2 = 600$$

(מציאת סכום הכסף המתאים לשביעית אחת).

$$\text{כלומר: } 600 \times 7 = 4200 \text{ (מציאת השלם).}$$

או בדרך שנייה:

$$1200 : 2 = 600$$

$$1200 + 1200 + 1200 + 600 = 4200$$

(מציאת השלם על בסיס ההבנה ש-

$$\left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \frac{1}{7}\right) = 1$$

כדי לסמן את $\frac{2}{3}$ ואת $\frac{3}{4}$ על אותו קטע יחידה, צריך

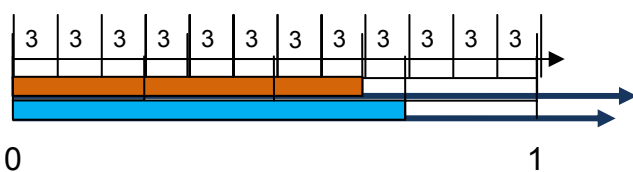
לחלק את קטע היחידה ל- 12 חלקים. פעולה זו היא למעשה הרחבת שברים.

בעזרת ייצוג זה קל לראות כי החלק שאינו צבוע בשני הצבעים, הוא $\frac{1}{12}$ מקטע היחידה המייצג את השלם. כדי

לדעת את מספר התלמידים הכולל, אפשר לסמן על הישר

כמה תלמידים מייצג כל $\frac{1}{12}$ מקטע היחידה, ובעזרת

חיבור חוזר או כפל למצוא את המספר הכולל של התלמידים בכיתה.



שני הייצוגים שהצגנו - עיגול, וישר המספרים, ממחישים את ההפרש שבין החלקים. מאחר והתלמידים מזהים את ההפרש עם פעולת החיסור, חשוב מאוד שייצגו את הפעולה, לאחר השימוש בייצוגים ובסרטוטים הסכמטיים,

$$\text{גם בייצוג המספרי - בעזרת תרגיל: } \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

שאלה 2

שילמתי $\frac{2}{7}$ ממחיר הרהיטים שקניתי, כתשלום

ראשון.

התשלום הראשון היה 1200 ₪.

מה מחיר הרהיטים שקניתי?

בשלב זה נשווה $\frac{1}{5}$ של הקטע הארוך ל- $\frac{1}{5}$ של הקטע

הקצר יותר. אפשר לגזור את הקטע לחמישיות ולהניח

$\frac{1}{5}$ של הקטע הארוך מעל $\frac{1}{5}$ של הקטע הקצר יותר.



חמישית מהקטע הארוך
חמישית מהקטע הקצר

מכיוון שהנתונים מתייחסים להשוואה בין $\frac{3}{5}$ של כל

אחד מהקטעים, הסרטוט יחזור על עצמו 3 פעמים.

מאחר ו- $\frac{3}{5}$ של המספר הראשון גדול ב- 9 מ- $\frac{3}{5}$ של

המספר השני, ניתן להסיק שכל $\frac{1}{5}$ של המספר הראשון

גדול ב- 3 מ- $\frac{1}{5}$ של המספר השני. עובדה זו ניתן לציין

על הסרטוט:



כדי להתייחס להפרש שבין שני המספרים (כלומר, שני

השלמים) יש צורך לקחת $\frac{5}{5}$. כלומר 5 פעמים את

ההפרש שבין שני הקטעים: $5 \times 3 = 15$

שאלה 3

$\frac{3}{5}$ של מספר גדול ב- 9 מ- $\frac{3}{5}$ של מספר שני.

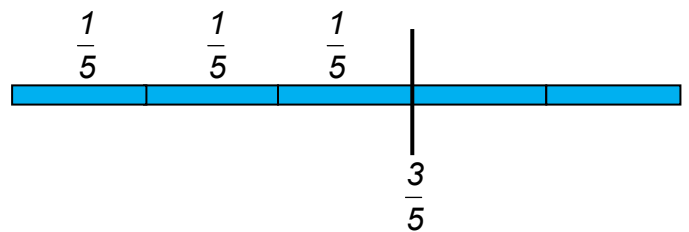
בכמה גדול המספר הראשון מהמספר השני?

ייצוג בעזרת קטעים

בשלב הראשון נעלה בפני התלמידים את השאלה: מי משני המספרים קטן יותר? הבנה זו חיונית לבחירת אורך הקטעים שייצגו כל מספר.

נבחר קטע (או פס נייר מלבני) באורך כלשהו. נחלק את הקטע לחמישה חלקים שווים, ונסמן עליו $\frac{3}{5}$. נרשום ליד

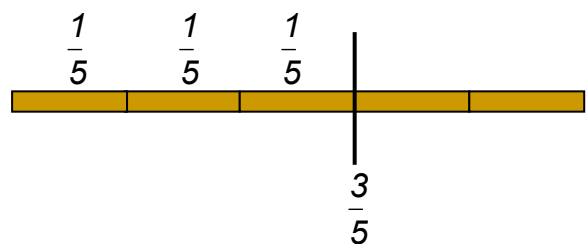
כל חלק: $\frac{1}{5}$.



מאחר והמספר השני קטן יותר נבחר עכשיו קטע קצר יותר וגם אותו נחלק ל- 5 חלקים שווים ונסמן עליו $\frac{3}{5}$. גם

את הקטע הקצר יותר נחלק לחמישה חלקים שווים ונסמן

עליו את $\frac{3}{5}$. נרשום ליד כל חלק: $\frac{1}{5}$.

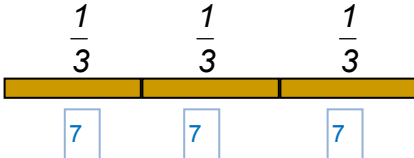


שאלה 4

$\frac{1}{3}$ של מספר שווה ל-7 ושווה ל- $\frac{1}{5}$ של מספר אחר.
מצאו את שני המספרים.
פי כמה גדול המספר הראשון מהמספר השני?

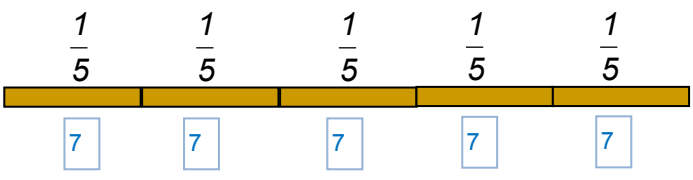
א. ייצוג באמצעות קטעים

גם בשאלה זו חשוב בשלב הראשון להעלות בפני התלמידים את השאלה: מי משני המספרים קטן או גדול יותר? הבנה בסיסית של מהות השבר, צריכה להוביל את התלמידים לתובנה שאם $\frac{1}{3}$ של מספר מסוים שווה ל- $\frac{1}{5}$ של מספר אחר, הרי שהמספר השני יהיה גדול יותר, כי הכמות המופיעה במספר הראשון שלוש פעמים, מופיעה במספר השני חמש פעמים.
נבחר קטע שייצג את המספר הראשון. נחלק אותו לשלושה חלקים שווים (כי ידוע לנו ש- $\frac{1}{3}$ ממנו שווה ל-7). נרשום ליד כל חלק שהוא שווה ל-7. אפשר גם להתבונן תחילה על השליש, ולא על השלם: לסרטוט קטע שמייצג את ה- $\frac{1}{3}$, לכתוב לידו 7, ולאחר מכן ל"שכפל" אותו עוד פעמיים, בהתבסס על הידיעה שבשלם יש שלושה שלישים.



את המספר השני נבנה מחמישה חלקים זהים לשלושת החלקים שייצגו את המספר הראשון.

כל חלק כזה בקטע הראשון הוא $\frac{1}{3}$ ובקטע השני הוא $\frac{1}{5}$

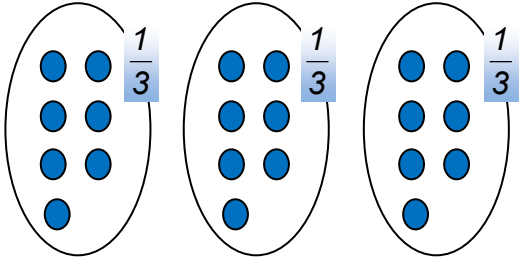


ולכן המספר הראשון הוא $7 \times 3 = 21$ והמספר השני הוא $7 \times 5 = 35$.
את הפעולות שבוצעו על הסרטוט ניתן לבטא גם בייצוג מספרי: אם $\frac{1}{3}$ של מספר ראשון הוא 7 אז המספר הראשון הוא $7 \times 3 = 21$.

מכיון ש- $\frac{1}{3}$ של המספר הראשון שווה ל- $\frac{1}{5}$ המספר השני, הרי שהמספר השני הוא: $7 \times 5 = 35$.

ב. ייצוג בעזרת כמויות

כדי למצוא את המספר הראשון, מציירים כמות של 7 עיגולים, המייצגים שלישי של השלם. מאחר וידוע שבשלם יש שלושה שלישים, מוסיפים עוד שתי קבוצות של עיגולים כאלו. כל קבוצת עיגולים מייצגת שלישי מהשלם. בסך הכול בשלם המייצג את המספר הראשון יהיו: $7 + 7 + 7 = 21$ או $7 \times 3 = 21$ עיגולים.



למודעותם שבמקרים בהם המודל המתמטי הנחוץ לפתרון הבעיה אינו שקוף וברור, כדאי לנסות ולסרטוט ייצוג או ייצוגים להצגת נתוני הבעיה.

על כותבות המאמר:

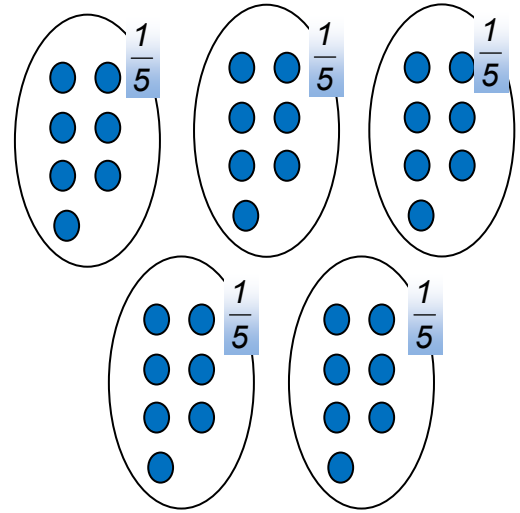
עירית גרשקוביץ
 מדריכה למתמטיקה במחוז מרכז.
 רכזת תחום מתמטיקה - יסודי במרכז פסג"ה כפר-סבא

נרדה הוס
 מדריכה למתמטיקה במחוז מרכז.
 רכזת תחום מתמטיקה - יסודי במרכז פסג"ה פתח תקוה

דליה חן
 מדריכה מחוזית למתמטיקה במחוז מרכז.

קלרה שפושניק
 מדריכה למתמטיקה במחוז מרכז.
 מרצה למתמטיקה ולמתודיקה של המתמטיקה במכללה לבנות בית-רבקה.

באותו אופן, במספר השני כמות של 7 עיגולים ייצגו חמישית מהשלם, ולכן במקרה זה יופיעו 5 קבוצות של עיגולים כאלו, ובסך הכול בשלם המייצג את המספר השני יהיו: $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$ או $7 \times 5 = 35$ עיגולים.



סיכום

במאמר זה ניסינו להציג שימושים שונים של סרטוטים סכמטיים של ייצוגים, היכולים לשמש ככלי עזר בפתרון בעיות שונות, ובהבנת מושגים מתמטיים מופשטים. הצגנו דוגמאות ספורות של שימושים כאלו לצורך פתרון שאלות בתחום השברים. דוגמאות כאלו יכולות להמחיש לתלמידים, ועוד יותר למורים, את האפשרות לפתרון בעיות מתמטיות מסוגים שונים בעזרת סרטוטים סכמטיים של ייצוגים כלשהם. אנו סבורים שאחד הכלים הבסיסיים שצריכים להיות ביד כל תלמיד הוא היכולת ליצור סרטוט סכמטי, המייצג את נתוני הבעיה המתמטית. אנו סבורים שסרטוט נתוני בעיה באמצעות ייצוג מוכר, שמשתמשים בו בנושאים מתמטיים שונים, כגון, ישר המספרים, עשוי לסייע לתלמיד למצוא אסטרטגיה לפתרון, ולהתאים את המודל המתמטי הנחוץ לפתרון הבעיה. לכן, חשוב לדעתנו להציג לתלמידים אסטרטגיות לפתרון בעיות, המשלבות הישענות על סרטוטים סכמטיים, ולהביא