אקסיומות האוריגאמי

רעות יצחקי

מבוא

אוריגאמי זו אומנות עתיקה של קיפול נייר שמקורה ביפן. היצירתיות הרבה, הדיוק, האתגר הטכני, מגוון השימושים והמורכבות של האוריגאמי, הובילו לכך שבסוף המאה ה- 20 התעורר עניין מתמטי, מדעי, טכנולוגי ורפואי באוריגאמי.

בבסיס האוריגאמי יש שבע אקסיומות המתארות את תהליך קיפול הנייר. מושגי היסוד הם **נקודה**, **קיפול ומישור.** באמצעות אקסיומות אלו ניתן לפתור בעיות מתמטיות וגיאומטריות הניתנות ושאינן ניתנות לפתירה על-ידי גיאומטריית המישור. היוונים היו גדולי ההיסטוריה של התגליות, כאשר פתרו בעיות וניסחו את המערכת האקסיומטית האוקלידית, לכן מפתיע ומפליא לחקור ולראות שבעזרת דף נייר ניתן לפתור בעיות שהיוונים לא הצליחו לפתור.

היסטוריית האוריגאמי

אוריגאמי הנה אומנות קיפולי הנייר. מקור השם הוא בצירוף המילים ביפנית: "אוֹרוּ" ששם הפעולה הוא "אוֹרִי" - לקפל, ו"קַאמִי" - פיסת נייר.

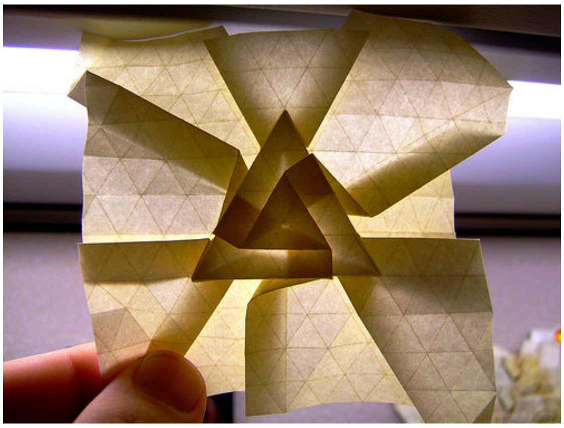
תחילת אומנות קיפולי הנייר איננה ברורה. ישנם היסטוריונים הטוענים כי אומנות האוריגאמי התחילה בסין לאחר המצאת הנייר ב- 105 לספירה, על-ידי צאן לון, אך אין לכך הוכחה; ורק אחר-כך במאה השישית הגיעה ליפן. יש כאלו הטוענים שהתהליך היה הפוך - התחיל ביפן ורק אחר-כך עבר לסין. עד סוף המאה ה- 18, לאומנות האוריגאמי הייתה משמעות תרבותית עמוקה בתרבות היפנית. עד 1797 האומנות הועברה מפה לאוזן, ובשנה זו בפעם הראשונה נכתבו הוראות לעשיית אוריגאמי בספר, שנקרא "אלף קיפולי עגור".

קיפול עגור מסמל הגשמה של משאלות, הצלחה ובריאות, ועל-פי המסורת, קיפול של אלף עגורים מאפשר הגשמה של משאלה. פרסום הספר אפשר פיתוח דגמים מורכבים.

האוריגאמי המודרני התפתח ב- 1930 על-ידי אקירה יושיזאווה (Akira Yoshizawa, 1911-2005). יושיזאווה פיתח שיטת רישום ובה תרשימים המתארים את תהליך הקיפול. זו הייתה שיטת רישום אחידה שכללה סמלים בסיסיים. כמו כן פיתח שיטות קיפול וקיפולים חדשניים. יושיזאווה גם עסק בפתרון בעיות גיאומטריות באמצעות אוריגאמי.

בשנות ה- 50 של המאה ה- 20, כאשר האוריגאמי התפשט לארצות-הברית, החלו לחקור את מורכבות האוריגאמי ונמצא קשר בין אוריגאמי לתחומים נוספים. למעשה, אומנות זו החלה לשמש בפתרון בעיות ואתגרים מתמטיים, טכנולוגיים, רפואיים, חינוכיים ומדעיים.

עם התפתחות המחקר המתמטי של האוריגאמי בשנות ה- 80, החל השימוש באוריגאמי ככלי להוראת גיאומטריה.



אקסיומות האוריגאמי

מקור המילה אקסיומה הוא ביוונית העתיקה. אקסיומה היא הנחה בסיסית אליה מתייחסים כנכונה, והיא מהווה בסיס להוכחה. למעשה, ניתן לפרשה 'כעיקרון מובן מאליו' שאינו מצריך הוכחה. שילוב בין מספר אקסיומות נקרא מערכת אקסיומטית. בדרך כלל דורשים ממערכת כזו מספר דרישות, כגון, אי-סתירה בין האקסיומות ועוד, אך לא ניכנס לסוגיה זו כאן. מערכת אקסיומות של תורה מתמטית מהווה בסיס להמשך התפתחותה של תורה זו.

בבסיס החקר המתמטי של האוריגאמי עומדות שבע אקסיומות, המגדירות את הפעולות הגיאומטריות האפשריות בתהליך הקיפול, תחת ההנחה של קיפולים ישרים בלבד המבוצעים על מישור, כאשר בכל שלב מבוצע קיפול אחד בלבד. אקסיומות אלו נקראות **'אקסיומות הוזיטה–האטורי'** (Huzita-Hatori Axioms). שש האקסיומות הראשונות פורסמו ב- 1989 על-ידי המתמטיקאי היפני-איטלקי הומיאקי הוזיטה (Huzita, 1924-2005). הוא נולד ביפן, למד פיסיקה גרעינית והיה עם הזמן למתמטיקאי, אומן אוריגאמי ומדען.

האקסיומה השביעית המשלימה את שש האקסיומות של הוזיטה, נוסחה לאחר מכן על-ידי המתמטיקאי היפני קושירו האטורי (Hatori, 1972).

האטורי יליד טוקיו הוא אומן אוריגאמי נחשב, בעל תארים במדעים, פילוסופיה ולימודים מוזיאונים. כשהחל להתעניין במתמטיקה שבאוריגאמי הוא ניסח את האקסיומה השביעית.

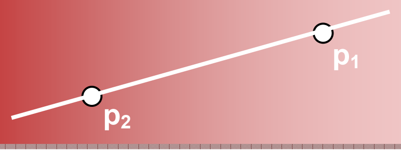
אקסיומות הוזיטה-האטורי

בניסוח אקסיומות האוריגמי, המילה "ישר" היא למעשה קו קיפול של דף נייר, ודף הנייר עצמו הוא המישור, שבו מדובר באקסיומות.

להלן שבע האקסיומות:

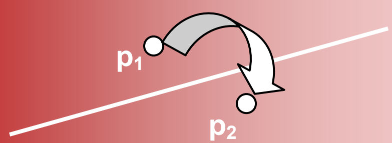
אקסיומה מספר 1

בהינתן שתי נקודות p_1 ו- p_2, ניתן ליצור קו ישר (כלומר, קו קיפול) אחד ויחיד המחבר ביניהן.



אקסיומה מספר 2

בהינתן שתי נקודות p_1 ו- p_2, ניתן לקפל את הדף כך ש- p_1 תהיה מונחת על גבי p_2.

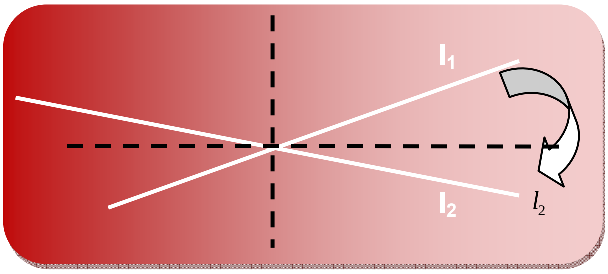


אקסיומה מספר 3

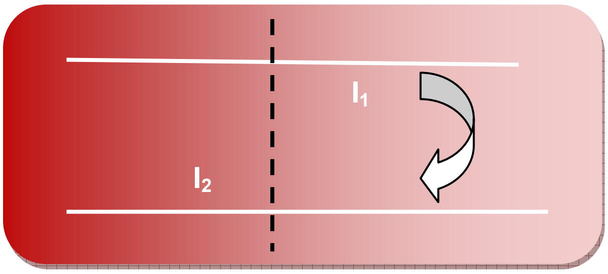
בהינתן שני קווים l_1 ו- l_2, ניתן לבצע קיפול כך ש- l_1 יהיה מונח על-גבי l_2,

לאקסיומה זו משמעות פשוטה בגיאומטריה אוקלידית, ויש שתי אפשרויות לפרשה:

מקרה 1 - הישרים נחתכים. במקרה זה הקיפול נעשה לאורך חוצה הזווית של הישרים:

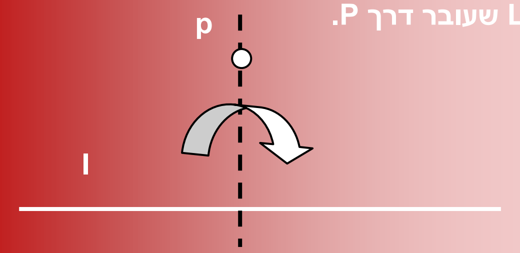


מקרה 2 - הישרים מקבילים ביניהם. במקרה זה הקיפול נעשה לאורך ישר המקביל לשניהם ונמצא במרחק שווה משני הישרים המקבילים.



אקסיומה מספר 4

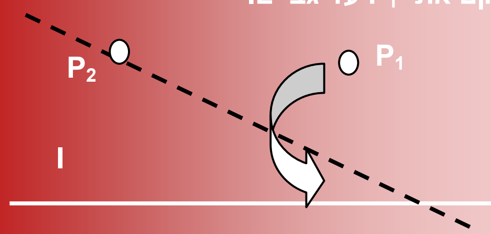
בהינתן נקודה P וקו L, ניתן ליצור קיפול המאונך ל- L שעובר דרך P.



גם לאקסיומה זו יש מקבילה בגיאומטריה האוקלידית - העברת אנך לישר נתון דרך נקודה נתונה.

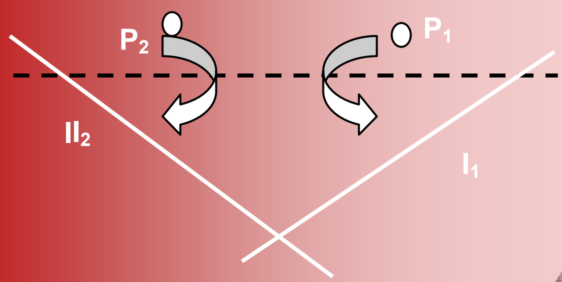
אקסיומה מספר 5

בהינתן שתי נקודות P_1 ו- P_2 וקו L, כך שמרחקה של P_2 מ-L אינו עולה על מרחקה מ P_1-, ניתן ליצור קיפול העובר דרך P_2 שימקם את P_1 על-גבי L.



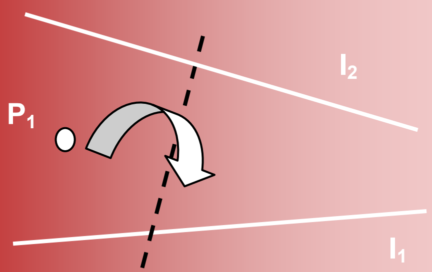
אקסיומה מספר 6

בהינתן שתי נקודות P_1 ו- P_2 ושני קווים l_1 ו-l_2 ניתן ליצור (בתנאים מסוימים) קיפול שימקם בו זמנית את הנקודה P_1 על גבי l_1, ואת הנקודה P_2 על גבי l_2.



אקסיומה מספר 7

בהינתן נקודה P_1 ושני קווים l_1 ו- l_2 ניתן ליצור קיפול שימקם את P_1 על גבי l_1, ובמאונך ל- l_2.



פתרון בעיות מתמטיות בעזרת אקסיומות האוריגאמי

מערכת אקסיומטית שקדמה היסטורית למערכת אקסיומות האוריגאמי, והמהווה חלק חשוב ביותר במתמטיקה, היא גיאומטריית המישור - הגיאומטריה האוקלידית, שפיתחו היוונים. גיאומטריה זו הייתה מבוססת על סרגל ומחוגה. הסרגל לא שימש ככלי למדידת אורך, כל תפקידו היה לסמן קווים ישרים, והמחוגה שימשה כמכשיר להתוויית מעגלים. היוונים הגבילו את עצמם לשני מכשירים פשוטים אלו ובדקו מה ניתן לעשות בעזרתם. כך הם פיתחו מערכת אקסיומטית לגיאומטריה. מערכת זו נקראה על שם המתמטיקאי היווני, אוקלידס (365 - 275 לפני הספירה) שחיבר את ספר ה"יסודות", ספר העוסק בגיאומטריה ובתורת המספרים. שמו של אוקלידס נקשר לגיאומטריית המישור כיוון שניסח את הנחות היסוד (האקסיומות והפוסטולטים) של גיאומטריה זו.

היוונים הגיעו להישגים רבים בזכות המערכת האקסיומטית האוקלידית, אך למרות זאת הם השאירו **חמש בעיות פתוחות -** בעיות שלדעתם אינן ניתנות לפתרון:

בעיה 1: חלוקת זווית כלשהי לשלושה חלקים שווים.

בעיה 2: שרטוט מצולע משוכלל בעל שבע צלעות.

בעיה 3: הכפלת נפח הקובייה.

בעיה 4: תרבוע המעגל - בניית ריבוע השווה בשטחו לעיגול נתון.

בעיה 5: בניית משולש על-פי שלושת חוצי הזווית שלו.

במאה ה- 19 הוכח כי אי-אפשר לבצע מטלות אלו בעזרת סרגל ומחוגה. לעומת זאת, מאוחר יותר נמצא כי בעיות אלו נפתרות בעזרת אקסיומות האוריגאמי.

בגיאומטריה האוקלידית יש 6 בניות בסיסיות הנעשות בעזרת סרגל ומחוגה, וכל בנייה אחרת נעשית בעזרתן. בניות אלה הן: חציית קטע; חציית זווית; העתקת קטע; העתקת זווית; הטלת אנך לישר מנקודה מחוצה לו; הצבת אנך לישר בנקודה עליו. כפי שראינו, בניות אלו ניתן לבצע על-ידי קיפולי נייר. מכאן נובע שבאמצעות אוריגאמי אפשר לכסות את כל תחומה של הגיאומטריה האוקלידית, ולכן ניתן לפתור בעזרת אוריגאמי את כל הבעיות אותן פותרת הגיאומטריה האוקלידית.

על הבניות הבסיסיות בגיאומטריה אוקלידית ניתן לקרוא בגיליון 15 של מספר חזק 2000

מההשוואה בין חמש האקסיומות של אוקלידס לאקסיומות האוריגאמי, ניתן לראות כי האקסיומה הראשונה של אוקלידס ושל האוריגאמי דומות ביניהן, בעוד שכל השאר שונות:

האקסיומה הראשונה של אוקלידס - דרך כל שתי נקודות עובר תמיד קו ישר אחד ויחיד.

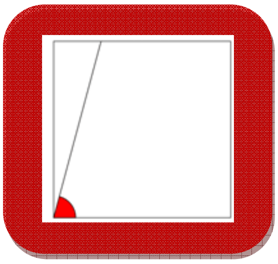
האקסיומה הראשונה של האוריגאמי - בהינתן שתי נקודות, ניתן לקפל קיפול ישר אחד ויחיד המחבר ביניהן.

האקסיומות מתבססות על מושגי יסוד בכל אחת מהמערכות. בשתי המערכות מושגי היסודי הם: נקודה, קו קיפול הזהה לישר, ונייר הזהה למישור.

בעיה 1: חלוקת זווית לחלקים שווים

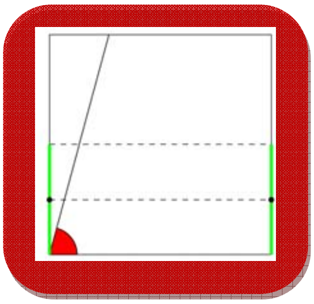
בעיית חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים באמצעות סרגל ומחוגה היא אחת משלוש הבעיות המפורסמות של העולם העתיק. בעיה זו לא יכולה להיפתר על-ידי הגיאומטריה האוקלידית (הוכחה כבלתי-אפשרית ב-1836): לא כל זווית ניתן לחלק לשלושה חלקים שווים. למשל, זווית של 90^0 ניתן לחלק ל- 3 חלקים שווים בעזרת סרגל ומחוגה. לעומת זאת, זווית של 60^0 לא ניתן לחלק, משום שאי-אפשר לבנות זווית של 20^0 בעזרת כלים אלו. מתמטיקאי בשם Hisashi Abi הוכיח שניתן לפתור בעיה זו בעזרת קיפולי נייר. להלן הפתרון[1] .

1. לוקחים דף בצורת ריבוע, ובוחרים זווית כלשהי שאותה רוצים לחלק ל- 3 חלקים שווים (איור 1)



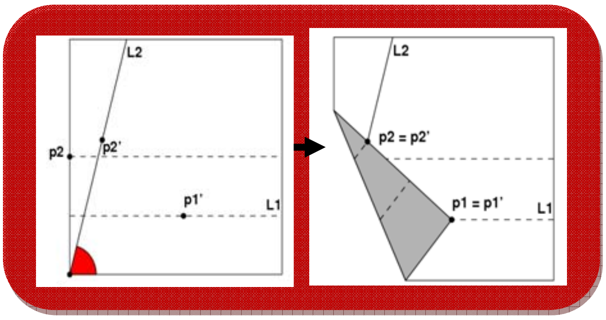
איור 1

2. על-ידי השימוש באקסיומה 3, יוצרים קיפול המקביל לשוק הזווית (לצלע הריבוע), מקפלים קיפול נוסף, בגודל של הקיפול הקודם, ופותחים. בשלב זה ביצענו משהו שקיים גם בגיאומטריה אוקלידית, למעשה, השתמשנו באקסיומות המקבילים. (איור 2)



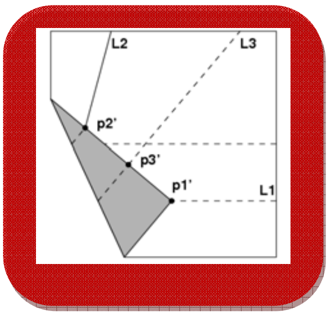
איור 2

3. על ידי שימוש באקסיומה 5 מקפלים את נקודה P_1 (קדקוד הזווית) על נקודה כלשהי על הישר L_1 וכך גם P_2 על L_2. (איור 3)



איור 3

4. קיבלנו את הקיפול שבשרטוט. כעת מגדילים את L_1 על-ידי $P_{3'}$, ויוצרים קפל חדש L_3. (איור 4)

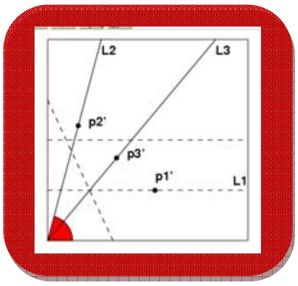


איור 4

[1] השרטוטים בבעיה זו לקוחים מ-

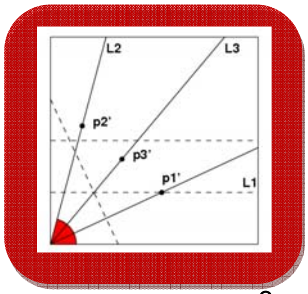
Casper, H.(n.d). *The power of origami.* Retrieved March 1, from: http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308-03b/projects-03b/hoc/CasparHo.ps

5. פותחים את הקיפול וממשיכים את L_3. (איור 5)



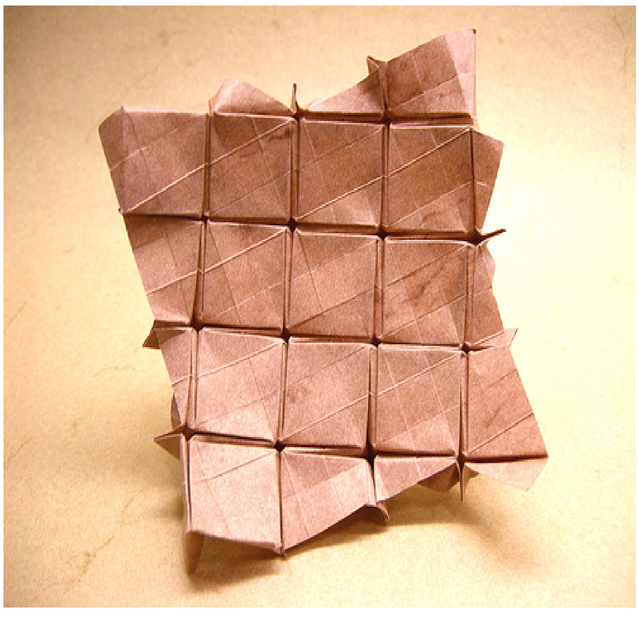
איור 5

6. על סמך אקסיומה 3 מקפלים את הצלע התחתונה שתיפגש עם L_3. נוצר קו קיפול חדש שעובר דרך $P_{1'}$. (איור 6)



איור 6

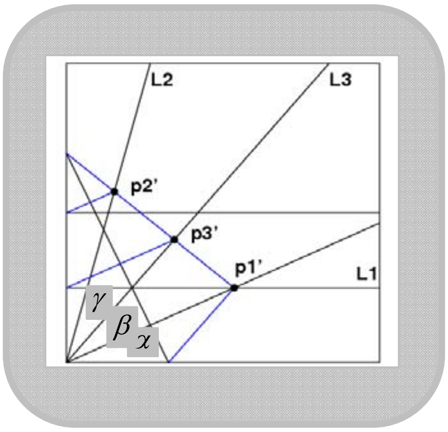
בשלב זה נוצרו 3 זוויות, נוכיח עתה שהן שוות.



הוכחה לנכונות הפתרון

ההוכחה נעשית בעזרת הגיאומטריה האוקלידית.

על מנת להוכיח את נכונות הפתרון הזה, צריך להוסיף בניית עזר (הקווים הכחולים שבשרטוט באיור 7).

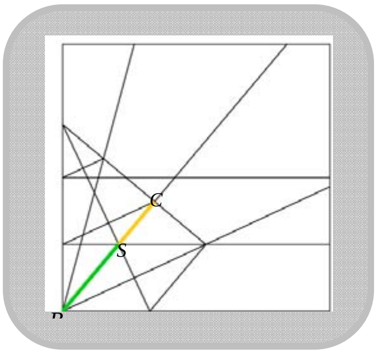


איור 7

נגדיר: $p_2'=F, p_3'=C, p_1'=D$

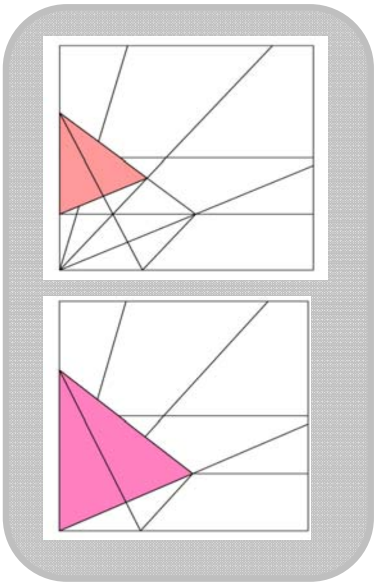
צריך להוכיח: $\alpha=\beta=\gamma$

לא ידוע מהקיפול אם CS ו- SB (הקטע הירוק והקטע הצהוב באיור 8) נמצאים על אותו ישר, לכן תחילה נוכיח זאת.

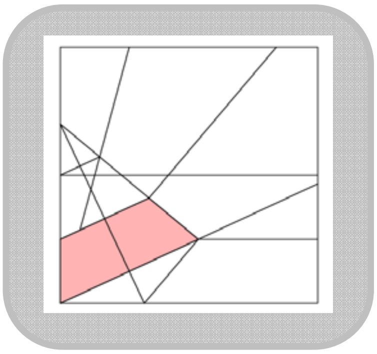


איור 8

לפי הקיפול, שני הזוגות של המשולשים הוורודים (באיור 9) חופפים ביניהם, ולכן גם הטרפזים הורודים (באיור 10) חופפים ביניהם:



איור 9



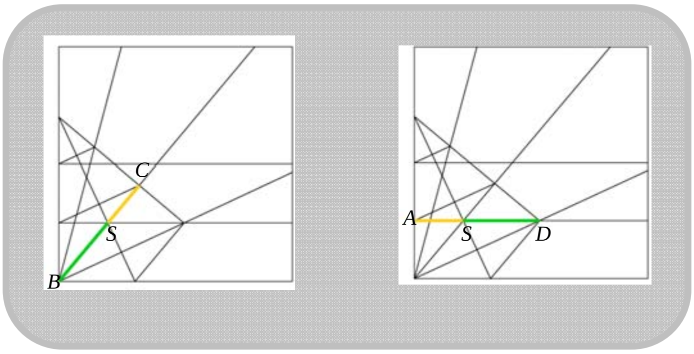
איור 10

מחפיפת הטרפזים נובע שהצלעות חופפות בהתאמה ולכן שתי הצלעות הירוקות בשרטוט שוות: AB=CD.

כך נוצר טרפז שווה-שוקיים ABCD .

בטרפז שווה-שוקיים האלכסונים בנקודת החיתוך שלהם יוצרים שני משולשים שווי-שוקיים דומים, שציר הסימטריה המשותף שלהם הוא גם ציר סימטריה של הטרפז.

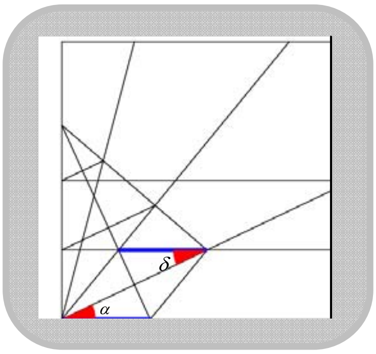
מכאן נובע שהקטע הירוק והצהוב (בסרטוט 11) נמצאים על אותו קו ישר - מ.ש.ל.



איור 11

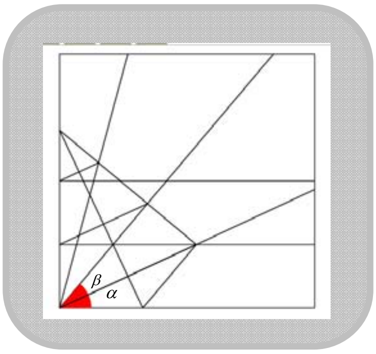
כעת ניתן להוכיח ששלוש הזוויות שוות, כלומר, ש- $\alpha = \beta = \gamma$.

א. שני הישרים הכחולים בשרטוט (איור 12) מקבילים ביניהם, וזאת מפני שבפתרון נוצרו, בעזרת הקיפול והאקסיומות, ישרים מקבילים. הזוויות המתחלפות הפנימיות של הישרים שוות, לכן $\alpha = \delta$ (זוויות אדומות בשרטוט באיור 12)



איור 12

ב. משולש BSD הוא שווה-שוקיים. השוקיים שוות בגלל שהן חלקי האלכסונים של הטרפז שווה-השוקיים ABCD. במשולש שווה-שוקיים זוויות הבסיס שוות, לכן $\beta = \delta$ (הזוויות האדומות בשרטוט באיור 13).

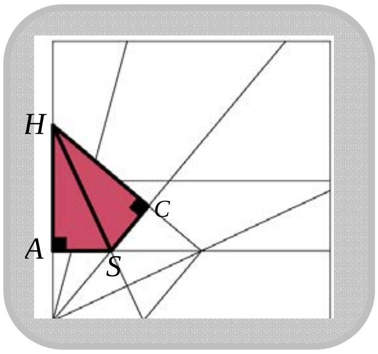


איור 13

ג. מ- א' ומ- ב' נובע כי: $\beta = \alpha$.

(הזוויות האדומות בשרטוט באיור 13)

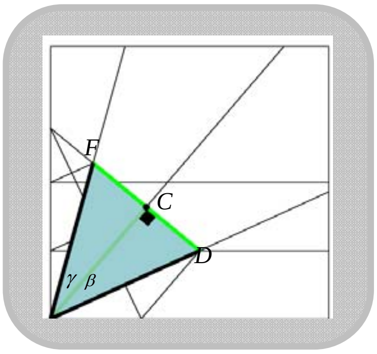
ד. מהקיפול נובע כי המשולשים HAS ו- HCS הם חופפים וישרי-זווית (המשולשים האדומים באיור 14).



איור 14

מהקיפול נובע כי FC=CD (הישרים הירוקים בשרטוט 14), ומסעיף ד' נובע כי הזווית η והזווית הצמודה לה הן זוויות ישרות (מסומן בשרטוט).

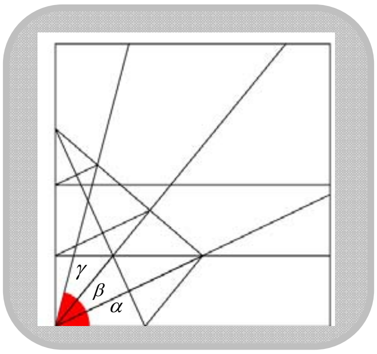
שני המשולשים FBC ו- CBD (באיור 15) חופפים משום שיש להם צלע משותפת (צלע BC), זווית ישרות שוות ו- CD=FC. במשולשים חופפים הזוויות שוות בהתאמה ולכן $\beta = \gamma$.



איור 15

ו. מ- ה' ו- ג' נובע כי $\alpha = \beta = \gamma$. (איור 16)

שלוש הזווית שוות בגודלן - מ.ש.ל



איור 16

בעיה 2: בניית מצולע משוכלל בעל שבע צלעות

אוקלידס בספרו 'יסודות' (אלמנטים) מתאר בניית מצולעים משוכללים אחדים באמצעות סרגל ומחוגה. בנייה של מצולע משוכלל בן n צלעות שקולה לחלוקה של המעגל ל- n קשתות שוות. כמו כן, בניית מצולע משוכלל בעל n צלעות מאפשרת בניית מצולע משוכלל בן 2n צלעות, על-ידי חציית קשתות המעגל החוסם את המצולע המקורי, וכך ניתן להגיע למצולעים משוכללים אחרים. מכך ניתן להסיק כי כבר בתקופתו של אוקלידס ידעו לבנות במחוגה ובסרגל בלבד מצולעים משוכללים בני n צלעות כאשר n= 3,4,5,6,8,10,12,15,16,20 (שמוקלר, 2005, עמ' 28).

המתמטיקאי הגרמני קרל פרידיך גאוס, שחי בין השנים 1777 - 1855, חקר את הקשר בין תכונות המספר n - מספר צלעות של מצולע משוכלל, לבין האפשרות לבנותו באמצעות סרגל ומחוגה בלבד.

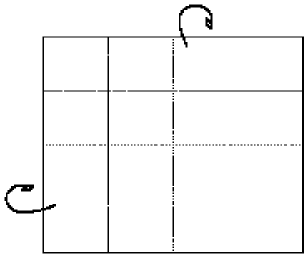
נסמן ב- F מספרים מהצורה $2^{(2^k)}+1$ כאשר $k \ge 0$ הנו מספר ראשוני (מספרים מהצורה הזו נקראים מספרי פרמה). גאוס הראה כי אם מספר טבעי n ניתן לפירוק לגורמים ראשוניים מהצורה: $n = 2^k \quad (k \ge 2, k \in N)$ או $n=2^kF_1F_2\ldots F_S$, כאשר $F_1,F_2,\ldots,F_S$ הנם מספרי פרמה ראשוניים שונים, אז ניתן לבנות בעזרת מחוגה וסרגל בלבד מצולע משוכלל בעל n צלעות, ולהפך כאשר הוא לא מהצורה הנ"ל, כלומר, לא ניתן לבצע בנייה זו (שמוקלר, 2005, עמ' 28). לדוגמה, מצולע בעל 3 צלעות ניתן לבנות בעזרת סרגל ומחוגה : $3 = 2^{2^0}+1 = F$.

כאשר n=7 , n הוא לא מהצורה $n = 2^k$ וגם לא מהצורה $n=2^kF_1F_2\ldots F_S$, משמע, לא ניתן בעזרת סרגל ומחוגה לבנות משובע משוכלל, ולכן לא הצליחו היוונים לפתור בעיה זו. לעומת זאת, בעזרת האוריגאמי ניתן לבנות מצולע משוכלל בעל שבע צלעות.

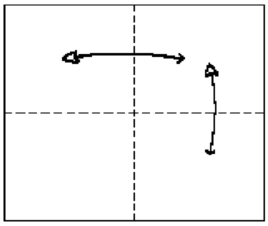
בניית משובע משוכלל באמצעות אוריגאמי

בניית המשובע נעשית על-ידי 14 קיפולים, לכן לא אפרט את שלבי הקיפול. הבנייה נעשית על בסיס אקסיומות האוריגאמי. הוזיטה הוכיח את הנכונות של פתרון זה על-ידי גיאומטריה אוקלידית. יותר מאוחר נכונות פתרון זה הוכחה באמצעות מחשב אך לא אדון בהוכחה. להלן שלבי הקיפול[2]:

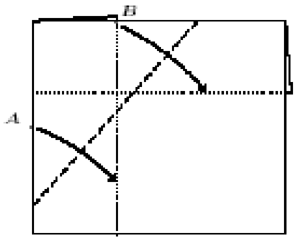
שלב 1



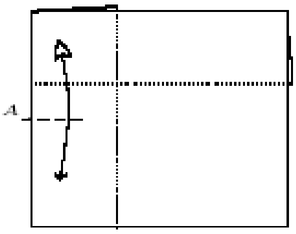
שלב 2



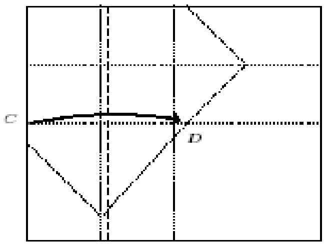
שלב 3



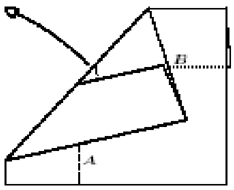
שלב 4



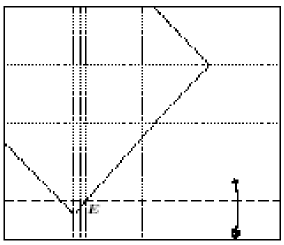
שלב 5



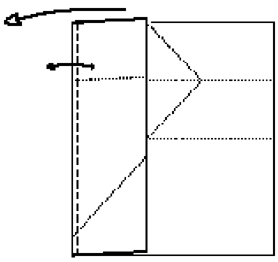
שלב 6



שלב 7

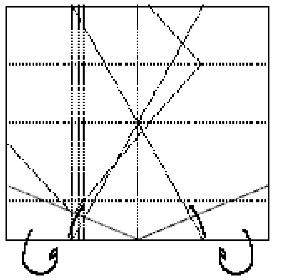


שלב 8

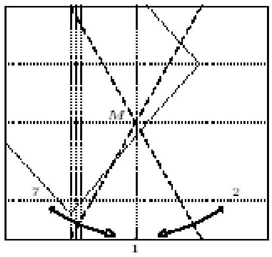


[2] השרטוטים לקוחים מ: Geretschlager, R. (1997) . *Folding the Regular Heptagon* (electronic version). Crux mathematicorum. No. 2. Volume 23, pp. 81-88.

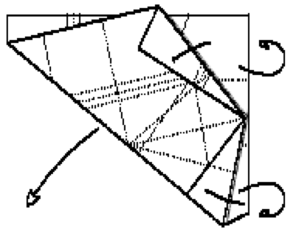
שלב 9



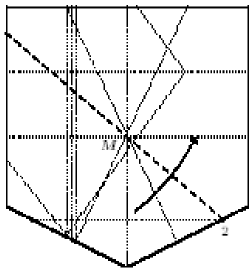
שלב 10



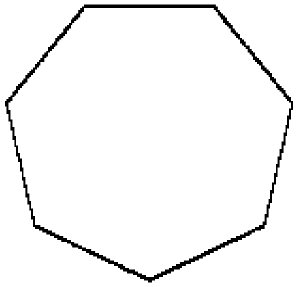
שלב 11



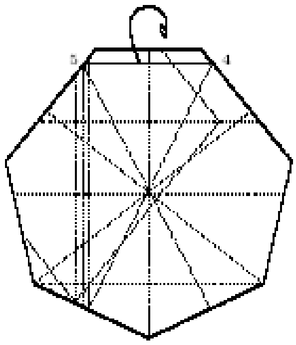
שלב 12



שלב 13



שלב 14



מסקנות

המסקנה הראשונה שעולה מההיכרות עם הנושא היא שאקסיומות האוריגאמי זו מערכת עצמאית בלתי תלויה.
בנוסף לכך, האקסיומות של אוקלידס והאקסיומות של האוריגאמי הן שונות אך יש ביניהן מן המשותף:

א. מושגי היסוד בשתי המערכות זהים וכך גם האקסיומה הראשונה.

ב. אקסיומות האוריגאמי משלבות את הגיאומטריה האוקלידית. במספר אקסיומות הוזיטה - האטורי ניתן לראות את שילוב הגיאומטריה האוקלידית: באקסיומה 3, נעשה שימוש במושגי גיאומטריה אוקלידית: חוצה זווית, ישר מקביל לשני ישרים נתונים העובר באמצע המרחק ביניהם, וכן גם באקסיומה 4, בהעברת אנך.

ג. בפתרון הבעיות משולבים מושגים מהגיאומטריה האוקלידית, למשל, ההוכחה לפתרון בעיית חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים, נעשית על-ידי גיאומטריה אוקלידית, בעוד שהחלוקה עצמה נעשית על-ידי אוריגאמי.

מקורות

פז, ג' (2007). *אקפלה: גילוי עובדות גיאומטריות ותרגולן בעזרת קיפולי נייר*,(עמ' 271- 285). הוצאת המחבר.

רייז, ר' (2003) . *שימוש בקיפולי נייר בהוראת גיאומטריה.* (גרסה אלקטרונית). נדלה ב- 15 באוגוסט, 2010 . קשר חם, מהאתר: http://kesher-cham.technion.ac.il/clickit_files/files/index/552619713/388154381/670373517.pdf

שמוקלר, א' (2005). אוילר וגאוס - שניים מגדולי המתמטיקאים. *על"ה 33*, 23-29.

Origami history. Retrieved September 3, 2009, from Andersen, E, paerfolding: 2004. http://www.paperfolding.com/history

Casper, H. (n.d). *The power of origami.* Retrieved March 1, from: http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308-03b/projects-03b/hoc/CasparHo.ps

Huzita, Y. (n.d). *Centro diffusione origami*. Retrieved April 10, 2009, from: http://www.origami-cdo.it/articoli/yoshizawahuzita.htm

Hatori, K. (n.d). *History of origami*. Retrieved June 20, 2009, from k's origami: http://origami.ousaan.com/library/historye.html

Hull, T. (1999). *Origami and geometric constructions*. Retrieved August 15 , 2010, from origami mathematics: http://mars.wnec.edu/~th297133/omfiles/geoconst.html

Geretschlager, R. (1997) . Folding the Regular Heptagon (electronic version). *Crux mathematicorum 23*(2), 81-88. Retrieved August 15 , 2010, from: http://cms.math.ca/crux/v23/n2/page81-88.pdf

Mactutor (1999). *Euclid of Alexandria*. Retrieved May 24, 2009, from: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid.html

Origami resource center. (2009). *History of origami*. Retrieved June 20, 2009, from: http://www.origami-resource-center.com/history-of-origami.html

Orikata, H. S. (n.d). *Origami tanteida*. Retrieved April 10, 2009, from: http://www.strangehorizons.com/2002/20020311/folding.shtml

Weisstein, E. W. (2008). *Angle trisection*. Retrieved March 19, 2009, from Wolfram Mathworld: http://mathworld.wolfram.com/AngleTrisection.html

Yoshizawa, A. (2005). *Bookofjoe.* Retrieved April 5, 2009, from: http://www.bookofjoe.com/2005/04/akira_yoshizawa.html

על כותבת המאמר:

רעות יצחקי

סטודנטית שנה רביעית במכללת אחווה לתואר ראשון במתמטיקה ובחינוך מיוחד. מתגוררת בבאר-שבע ומורות שילוב במתמטיקה בבית ספר עומרים.