ישר המספרים הריק: תלמיד לומד... מורה לומד...

חנה לב-זמיר ומירי שרייבר

ישר המספרים הריק, הנו ישר ללא מספרים, אשר פותח בהולנד בשנות השבעים, ככלי עזר לתלמידים שהתקשו ביישום האלגוריתמים חיבור וחיסור. כלי זה מתבסס על פרוצדורה בלבד. ישר זה, מאפשר ייצוג חזותי התומך בפתרון תרגילים, ומאפשר לכל פותר להשתמש בדרכי חישוב אינטואיטיביות המסתמכות על אסטרטגיות אישיות, תוך תיעוד מהלך החשיבה על הישר. השימוש בישר המספרים מחייב שיקול דעת ושימוש בתובנה מספרית. מרבית החישובים מתבצעים בעל-פה, כשהתלמידים בוחרים אילו מספרים לסמן על הישר. תהליך הפתרון מתועד על הישר והייצוג החזותי מאפשר שקיפות החשיבה. בדרך כלל משתמשים בישר המספרים הריק לפתרון תרגילי חיבור וחיסור במספרים טבעיים, אך ניתן להיעזר בו גם לייצוג תרגילי כפל וחילוק, ופעולות חשבוניות במספרים מכוונים ובשברים. הלגיטימציה להשתמש בישר ככלי אישי לחישוב, טומנת בחובה את הפוטנציאל לקדם התפתחות אסטרטגיות חישוב אצל כל ילד, על בסיס דרכי הפתרון שלו, ומזמנת שיח מתמטי. התלמידים ממלילים את דרך הפתרון כשהם מציגים זאת בפני הכיתה, לומדים זה מזה, ומפתחים מודעות למגוון האסטרטגיות ולהערכת היעילות של כל פתרון. הם לומדים, תוך כדי הפתרון, להשתמש בחוש למספרים ובידע עולם, כדי להתמודד עם בעיות מחיי היום-יום, משתפים זה את זה בדרכי הפתרון, מסבירים ומעריכים את הפתרונות השונים לאותה בעיה. במקביל, ניתוח דרכי הפתרון מאפשר למורים להעשיר את הידע הפדגוגי שלהם.

בעקבות חשיפה למאמרים של אפרת ורובינק (2003), של Bobis (2007), ושל Dixon (2008), המתייחסים לישר המספרים הריק, החליטה מירי (מורה בבית ספר יסודי באזור הצפון), להציג לתלמידיה בכיתה ב את הישר ככלי לפתרון תרגילים ובעיות חשבוניות. דוגמאות לבעיות ולפתרונות התלמידים מובאות במאמר זה, תוך ניתוח אסטרטגיות התלמידים בפתרונות אלה.

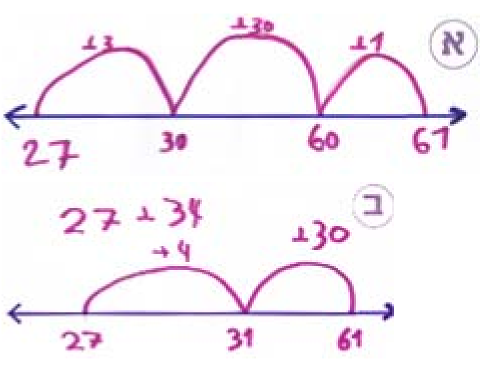
ישר המספרים הריק הוצג בפני התלמידים במהלך שיעור בנושא: אסטרטגיות חישוב שונות לפתרון תרגילים של חיבור מספרים דו-ספרתיים. לאחר שתלמידי הכיתה הציגו את האסטרטגיות השונות בהן השתמשו לפתרון התרגיל, הוצגה בפניהם דרך פתרון בעזרת ישר המספרים הריק, של "תלמיד אלמוני". הם התבקשו להסביר את דרך הפתרון שהוצגה בפניהם. לאחר הדיון על הפתרון של ה"תלמיד האלמוני", נשאלו התלמידים אם ניתן להציג את הפתרון שלהם על גבי ישר המספרים. לכל תלמיד חולק ישר מספרים ריק, והוא התבקש להציג את דרך הפתרון הקודמת שלו על גבי הישר שלפניו. לסיום התבקשו התלמידים לפתור את התרגיל **34 + 27** בעזרת ישר המספרים הריק.

איורים 1א, 1ב ו- 1ג מתארים את פתרון תרגיל החיבור **34 + 27**, על-ידי שלושה תלמידים:

פתרון תרגיל החיבור: 34 + 27

תלמיד א

תלמיד ב



איור 1: ייצוג חזותי לפתרון תרגיל חיבור

תלמיד א1 בחר באסטרטגיית הוספה למחובר הראשון (27), תוך שהוא מפלג את המחובר השני באופן גמיש. בתחילה הוא הוסיף 3, כדי להשלים את המחובר לעשרת הקרובה (30), בהמשך הוא הוסיף 30 ולבסוף הוסיף 1.

תלמיד ב1, פעל באופן דומה, אלא, שפילג את המחובר בדרך אחרת, המעידה על ידע אחר. הוא פילג את 34 לפי המבנה העשורי (4 + 30). בתחילה הוסיף 4 ל- 27, ואז הוסיף 3 עשרות ל- 31.

שני הפתרונות (א1 ו- ב1), מעידים על העדפת הוספה של עשרות שלמות, כשהראשון מוסיף עשרות שלמות לעשרות שלמות, בעוד שהשני מוסיף עשרות שלמות למספר שאינו עשרת שלמה.

תלמיד ג1, השתמש באסטרטגיית הוספה למחובר הגדול יותר (34). הוא פילג את המחובר 27 לפי המבנה העשורי, ולא הוסיף את ה- 20 בבת אחת אלא, התקדם על הישר בשתי "קפיצות" של 10.

להלן תרגום דרך החישוב הייחודית של כל תלמיד, לשפת החשבון.

תלמיד א1
27 + 3 + 30 + 1 = 61
תוך שהוא מחשב "בראש"
27 → 30 → 60 → 61

תלמיד ב1
27 + 4 + 30 = 61
תוך שהוא מחשב "בראש"
27 → 31 → 61

תלמיד ג1
34 + 10 + 10 + 7 = 61
תוך שהוא מחשב "בראש"
34 → 44 → 54 → 61

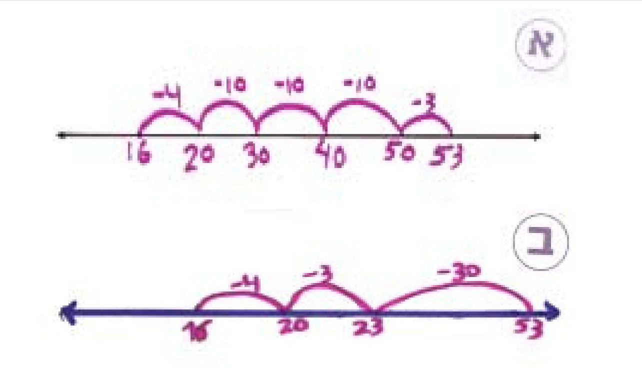
כמורים אנו יכולים ללמוד על הידע של התלמידים ועל דרכי החישוב שלהם באמצעות הייצוג על הישר, שכן, התהליך מתועד ושקוף. ייצוג חזותי זה, ניתן לקישור עם הייצוג הסימבולי (תרגיל השרשרת), ומזמן שיח מתמטי, הבוחן דמיון ושוני בין הייצוגים הוויזואליים והייצוגים הסימבוליים, ואף חשיבה משותפת על דרך נוספת, בה ניתן לייצג תרגיל.

ניתן להעלות שאלות, כמו:

- במה שונה הדרך של ג1 מהדרכים של א1 ו- ב1?
- כיצד ניתן להציג את הפתרון של תלמיד ג1 בדרך נוספת?

פתרון תרגיל החיסור: 37 - 53

איורים א2 ו- ב2, מתארים את פתרון תרגיל החיסור על-ידי שני תלמידים. בשתי הדוגמאות התלמידים מבצעים את ההפחתה מהמחוסר (53).



איור 2: ייצוג חזותי לפתרון תרגיל חיסור

תלמיד א2, פילג את המחסר 37, ל: 3, 10, 10, 10 ו- 4. הוא השתמש באסטרטגיית הפחתה לעשרת קרובה (3-), ובהמשך הפחית בשלושה מהלכים 30,

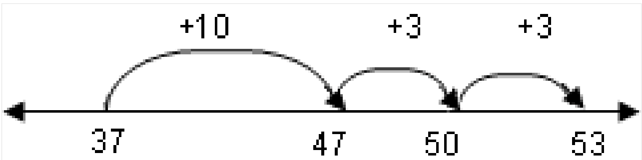
ולבסוף הפחית 4.

תלמיד ב2, פילג את המחסר 37, ל: 30, 3 ו- 4. הוא יודע להחסיר עשרות שלמות מכל מספר. ואחר כך לפצל את 7 היחידות בדרך נוחה לו, תוך שימוש באסטרטגיית תחנת העשר.

להלן תרגום דרך החישוב של שני התלמידים באמצעות ביטוי חשבוני.

תלמיד א2
53 - 3 - 10 - 10 - 10 - 4 = 16 תוך שהוא מחשב "בראש" 53 → 50 → 40 → 30 → 20 → 16
תלמיד ב2
53 - 30 - 3 - 4 = 16 תוך שהוא מחשב "בראש" 53 → 23 → 20 → 16

חשוב לציין, שישר המספרים הריק, מאפשר ייצוג של פעולת החיסור תוך שימוש באסטרטגיה הבודקת כמה עלינו להוסיף ל- 37 כדי להגיע ל- 53. דרך זו לא הוצגה על-ידי התלמידים. איור 3 מציג דוגמה לשימוש באסטרטגיה זו:



איור 3: ייצוג חזותי לפתרון תרגיל חיסור תוך שימוש באסטרטגיית ההוספה

חישובי זמן

Dixon (2008), מתארת שימוש בישר המספרים כדי לייצג פתרון תרגילים העוסקים בחישובי זמן. מירי בחרה בשתי בעיות זמן מהמאמר של דיקסון, (תוך שהיא מבצעת שינויים והתאמות לתלמידיה בכיתה ב).

המשותף לשתי הבעיות שהוצגו היה, שבשתיהן נתונה שעת ההתחלה של הפעילות ושעת סיומה, ועל התלמידים לחשב את משך הפעילות.

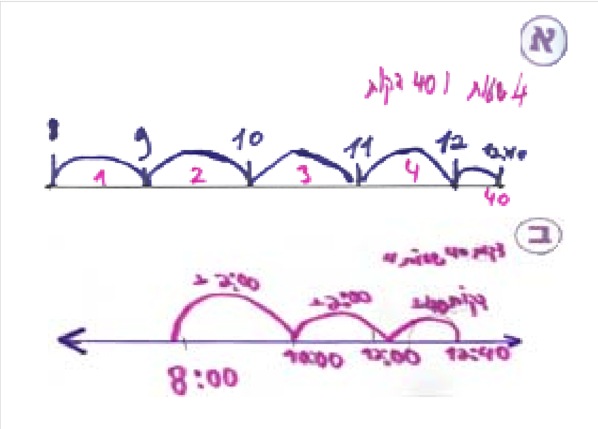
לכל בעיה, הבאנו שני פתרונות כדוגמה מעבודות התלמידים. מהדוגמאות, ניתן ללמוד כי התלמידים יודעים להבחין בין השעה והדקות בשעה. הם מייצגים זאת על הישר ומתייחסים לכך בתשובותיהם.

<u>בעיה 1</u>

בבית ספרנו מתחילים ללמוד בשעה 8:00

ומסיימים את יום הלימודים בשעה 12:40.

מהו משך יום הלימודים?



איור 4: ייצוג חזותי לפתרון בעיית זמן מס' 1

איורים א4 ו- ב4 מתארים פתרונות תלמידים לבעיה זו.

תלמיד א4, ייצג את הפתרון באמצעות "התקדמות" על הישר משעה 8, בקפיצות של שעה. בכל קפיצה הוא רשם מתחת לקשתות את השעות שחלפו באמצעות המספרים 1, 2, 3,....., ומעל הוא רשם את השעה (כעבור שעה, השעה 9... וכו').

תלמיד ב4, ייצג את שעת ההתחלה 8:00, והתקדם בקפיצות של שעתיים. מעל הקשת רשם את מספר השעות (2:00 +, 2:00 +, 40 דקות) ומתחת את השעה אליה הגיע (10:00, 12:00...) לבסוף ספר את השעות וציין את משך הזמן תוך התייחסות לשעות ולדקות.

<u>בעיה 2</u>

מיתר החלה לצפות בסרט בשעה 3:30

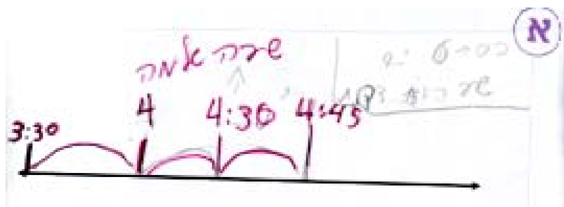
הסרט הסתיים בשעה 4:45.

כמה זמן צפתה מיתר בסרט?

בבעיה 1 שעת ההתחלה היתה שעה שלמה. בבעיה 2, שעת ההתחלה היא אמצע שעה (3:30).

איורים 5א ו- 5ב מתארים ייצוג של שני פתרונות תלמידים לבעיה 2.

תלמיד 5א



תלמיד 5ב

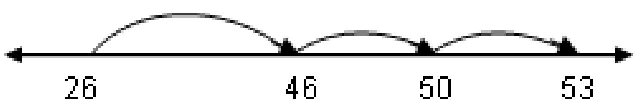
איור 5: ייצוג חזותי לפתרון בעיית זמן מס' 2

תלמיד 5א, פתר את הבעיה בהתקדמות בחצאי שעות, תוך ציון בכל נקודה לאיזו שעה הגיע: 4:45 ← 4:30 ← 4:00 ← 3:30. תלמיד 5ב, התקדם בקפיצות של שעות מלאות, מ- 3:30 עד 4:30 (ביניהן רשם שעברה שעה), ומ- 4:30 הוסיף 15 דקות עד השעה היעודה, לבסוף ציין שבסרט יש 15 דקות ושעה.

כפעילות המשך לפעילויות הנ"ל, הציגה מירי לתלמידים מגוון ייצוגים ויזואליים לפתרון תרגיל על ישר המספרים, ובנפרד הציגה את הביטויים החשבוניים לייצוגים אלה. על התלמידים היה לקשר בין ייצוג ויזואלי לתרגיל המתאים. בשלב הבא תלמידים התבקשו להוסיף את הביטוי החשבוני שמתאר את דרך החישוב על-פי הצגתו על הישר. לדוגמה, התלמידים התבקשו לזהות את הייצוג לתרגיל:**27 + 26** ולרשום לידו את התרגיל המתאר את דרך החישוב המוצגת על הישר (ר' איור 6).

התרגיל המתאים:

$$26 + \overbrace{20 + 4 + 3}^{27} = 53$$



איור 6: מהייצוג הוויזואלי, לכתיבת תרגיל מתאים

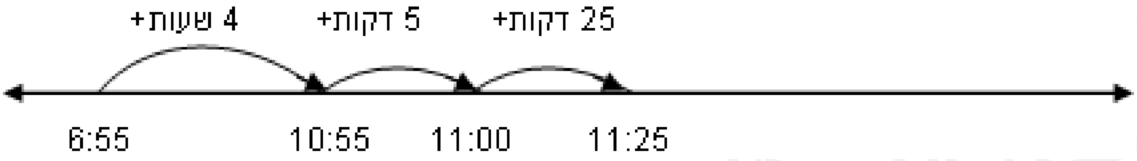
בעיות הזמן במאמר שמציעה Dixon (2008), הולכות ונעשות מורכבות. כמו, חישוב פרק הזמן בין 1:20 לבין 4:40 , בעיות בהן נתונה שעת התחלה ומשך הפעילות, ועל התלמידים לחשב את שעת הסיום, ובעיות בהן ידועים משך הפעילות וזמן הסיום, ועל התלמידים לחשב את מועד ההתחלה. הבעיות הוצגו לתלמידים, כסיטואציות הרלוונטיות לחיי היום-יום שלהם, דבר שהקל את ההתמודדות שלהם עם חישובי הזמן, גם אם היו מורכבים. איור 7 מדגים בעיות מסוג זה (בעיות 3 ו- 4, ר' בעמוד הבא), אשר ניתנו לתלמידי כיתה ג של Dixon.

באמצעות דוגמה של פתרון בעיה 3, ניתן ללמוד על האסטרטגיה בה נוקט התלמיד ועל הידע אותו הוא מביא לפעילות. כשם שבתרגילי החיבור היו תלמידים שהוסיפו בשלב הראשון 3 עשרות, כך תלמיד זה הוסיף 4 שעות והשלים לשעה עגולה על-ידי הוספת 5 דקות. התלמיד ציין על גבי הישר את שעת הסיום על-ידי הוספת 25 דקות כדי להגיע לשעה היעודה.

אסטרטגיית הפתרון המוצגת לבעיה 4 מציגה הפחתה בשני שלבים: בהתחלה 3 שעות, ובהמשך עוד 10 דקות.

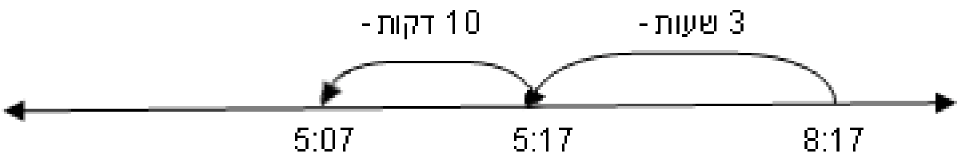
<u>בעיה 3</u>

באיזו שעה הסתיימה הפעילות, אם החלה בשעה 6:55 ונמשכה 4 שעות ו- 30 דקות?



<u>בעיה 4</u>

באיזו שעה החלה הפעילות אם נמשכה 3 שעות ו- 10 דקות, והסתיימה בשעה 8:17?



איור 7: בעיות זמן מורכבות

חשוב לציין, שתהליך הפתרון באמצעות ישר המספרים לא היה מוכר לתלמידים בכיתה של מירי, אך, בקלות רבה הם השתמשו בו ככלי להצגת דרך הפתרון שלהם. בהמשך לפעילות זו, מירי שמה לב לעובדה, שעל אף שלמדו לפתור תרגילים בעזרת אלגוריתמים מוכרים ומקובלים, הם אימצו את השימוש בכלי זה, והמשיכו לפתור תרגילים באמצעות הישר, ופעמים רבות ייצגו את הפתרון ביותר מדרך אחת.

חנה לב-זמיר

מנהלת מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי באוניברסיטת חיפה. עורכת כתב העת מספר חזק 2000. מרצה לדידקטיקה של הוראת המתמטיקה במכללת אורנים.

מירי שרייבר

מדריכה למתמטיקה במחוז חיפה, מנחה סטודנטים להוראת מתמטיקה במרכז "מעיין" מכללת אורנים. מחנכת א-ב בביה"ס היסודי ע"ש רבין בנשר, וסטודנטית לתואר M.A בחינוך מתמטי, אוניברסיטת חיפה.

מקורות

אפרת, א' ורובינק, ה' (2003). דרך אחרת לחבר ולחסר. *מספר חזק 2000*, גיליון 5, 20-21.
http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/mispar_chazak/5/addition_and_subtraction.pdf

Bobis, J. (2007). The empty number line: A useful tool or just another procedure? *Teaching Children Mathematics 15* (8), 410-413.
http://mathcenter-k6.haifa.ac.il/articles(pdf)/article88.pdf

Dixon, J. K. (2008). Tracking time: Representing elapsed time on an open timeline. *Teaching Children Mathematics, 15*(1), 18-24.