אפשר גם אחרת

מטבעות לא שקטים

משחק מתמטי לשילוב בכיתה

ד"ר גרייסי ויניצקי לנדמן, אורנים–בית הספר לחינוך של התנועה הקיבוצית

מבוא

משחק מתמטי הוא סוג של בעיה מתמטית. התחרות הטמונה במשחק מתמטי מוסיפה, כמובן, מתח ועניין. השאיפה של כל אחד מהשחקנים לנצח עשויה להביאם לנסות לנתח את המשחק כדי לגלות "שיטה" שתאפשר להם להשיג את מטרתם. החיסרון הוא, שאם המשחקים הם שניים המכירים אסטרטגיה לנצח במשחק, אזי המשחק עשוי שלא להתקיים, כי איש משניהם לא יסכים להיות זה שעושה את הצעד השני (ויניצקי–לנדמן, 1999).

המשחק חשוב כסיטואציה שבה ניצבים הלומדים מול בעיה אחת: איך לנצח. עליהם להעלות השערות ולהעמיד אותן במבחן המציאות. תפקיד המורה הוא להסביר את חוקי המשחק ולשחק מספר משחקים כדי להדגימו. מומלץ שהתלמידים ישחקו ביניהם, ולאחר מכן ייתכן שיהיו תלמידים שירצו לשחק נגד המורה. משחק נגד המורה יכול לשמש לתלמידים כדרך לבדיקת השיטות לנצח שפיתחו בעצמם.

אמנם קיימים משחקים מתמטיים רבים בספרות המקצועית, אבל רובם אינם מתאימים לשילוב במסגרת שיעור בכיתה.

להלן תיאור של משחק מתמטי לשני שחקנים, שניתן לשלבו בשיעור מתמטיקה. לפניכם: א. כללי המשחק ב. דוגמאות של משחקים ג. שאלות מנחות לקראת ניתוח המשחק ד. ניתוח המשחק ותיאור אסטרטגיה לניצחון.

התייחסות נוספת למשחק זה ניתן למצוא ב– (Dubrovsky, 1995).

א. כללי המשחק

1. בוחרים מספר מטבעות (מומלץ בין 15 ל- 25 מטבעות).
2. מחלקים את כל המטבעות לשתי ערמות. (א' ו–ב')
3. השחקן הראשון מעביר מטבע אחד מערימה א' לערימה ב' וגורע שני מטבעות מערימה א' או מערימה ב', על פי בחירתו.
4. השחקן השני מעביר מטבע אחד מערימה א' או ב' לערימה השניה, על פי בחירתו, וגורע שני מטבעות מאחת משתי הערימות, על פי בחירתו.
5. השחקנים ממשיכים לשחק לסירוגין.
6. המשחק מסתיים כאשר לאחד השחקנים אין אפשרות לעשות צעד נוסף, הוא המפסיד.

ב. דוגמאות

עם תחילת המשחק חולקו 16 מטבעות לשתי ערימות: אחת של 10 ואחת של 6 מטבעות. מצב זה סומן על ידי זוג המספרים (10,6). מכיוון שמצב זה שווה למצב (6,10) יש להתעלם מסדר המרכיבים בזוג המספרים בעת רישומם. השחקן הראשון מעביר מטבע אחד מהערימה של 10 (ערימה א') לערימה של 6 (ערימה ב') וגורע 2 מטבעות מערימה זו. הוא משאיר 9 מטבעות בערימה א' ו–5 מטבעות בערימה ב'. את המצב הזה נסמן על ידי הזוג (9,5). השחקן השני מעביר מטבע אחד מערימה של 5 המטבעות לערימה א' וגורע 2 מטבעות מערימה א'. כעת יש ערימה אחת שלה 10 מטבעות וערימה שנייה, שבה נותרו 2 מטבעות בלבד. השחקן הראשון משחק שוב: עכשיו הוא מעביר מטבע אחד מהערימה שבה נותרו 2 מטבעות לערימה האחרת, ובלית ברירה גורע 2 מטבעות מהערימה שבה נצטברו 11 מטבעות. השחקן השני ממשיך כפי שמתואר בדיאגרמה הבאה:

(10,6) → (9,7) → (9,5) → (10,4) → (10,2) → (11,1) → (9,1) → (10,0) → (8,0) → (7,1) → (5,1) → (4,2) → (2,2) → (3,1) → (1,1) → (2,0) → (0,0)

שחקן א → שחקן ב → שחקן א → שחקן ב → שחקן א → שחקן ב → שחקן א → שחקן ב

ברגע שמתקבל המצב (0,0) מסתיים המשחק. לשחקן הראשון לא נותרה אפשרות לבצע מהלך נוסף, ולכן הוא המפסיד.

להלן דוגמה נוספת של משחק. במקרה זה מתחיל המשחק ב –15 מטבעות המחולקות לשתי ערימות: 11 מטבעות בערימה אחת ו–4 בערימה אחרת.

(11,4) → (12,3) → (12,1) → (13,0) → (11,0) → (10,1) → (8,1) → (7,2) → (5,2) → (6,1) → (4,1) → (3,2) → (3,0) → (2,1) → (0,1)

שחקן א → שחקן ב → שחקן א → שחקן ב → שחקן א → שחקן ב → שחקן א

במקרה זה השחקן השני נשאר ללא אפשרות לבצע מהלך נוסף, ולכן הוא מפסיד.

כדי לתרגל, אפשר להתבונן בדיאגרמה ולנסות לזהות איזה מהלכים ביצע כל שחקן במשחק זה.

ג. שאלות מנחות לניתוח המשחק

כדי להנחות תלמידים לגלות מהי האסטרטגיה שתוביל לניצחון במשחק זה, אפשר לעודד אותם לשחק את המשחק מספר פעמים ולכוון אותם בעזרת השאלות הבאות:

1. **כמה מטבעות היו בהתחלת המשחק?**
2. **איך היו מחולקים המטבעות בהתחלת המשחק?**
3. **איזה שחקן התחיל?**
4. **איזה שחקן ניצח?**
5. **מה היה מצב המטבעות בסוף המשחק?**

כדאי לעודד את התלמידים לשחק מספר פעמים באותם תנאי פתיחה כדי שיוכלו לבדוק, אם התוצאות משתנות כאשר ננקטים מהלכים שונים.

ד. ניתוח המשחק ותיאור אסטרטגיה לניצחון

מסקנה 1. לאחר שכל שחקן שיחק, סך הכל המטבעות יורד ב-2. לכן, לאחר כל מהלך, **זוגיות מספר המטבעות הכולל שנשאר במשחק נשמרת.** למשל, במשחק הראשון שתואר קודם, מתקבל שמכלל 16 המטבעות שהיו בהתחלת המשחק, לאחר מהלך אחד נשארו 14, לאחר שני מהלכים נשארו 12 מטבעות, וכו'.

מסקנה 2. בגלל שבכל מהלך, השחקנים מעבירים מטבע אחד מערימה אחת לערימה אחרת, **לאחר שכל שחקן שיחק, משתנה הזוגיות של מספר המטבעות בכל אחת מהערימות.**

מסקנה 3. המשחק מסתיים אך ורק במצבים (0,2), (0,0) או (0,1). בכל מקרה אחר יהיה אפשר להעביר מטבע אחד מערימה לערימה ולהחסיר 2 מטבעות.

מסקנה זו נובעת מהעובדה שכל מצב בו יש יותר משתי מטבעות הוא לא סופי. המצב (1,1) אשר מתאר מצב בו נשארות שתי מטבעות איננו סופי גם הוא כי הוא מוביל למצב (0,0). לכן, המשחק מסתיים אך ורק באחד מהמצבים (0,0) או (1,0) או (2,0).

מסקנה 4. אורך המשחק נקבע על ידי מספר המטבעות הכולל, שנסמנו ב–N ועל ידי בחירת החלוקה לערימות בתחילת המשחק.

כפי שעולה ממסקנה 1, בכל מהלך יורד מספר המטבעות הכולל ב-2. אם בהתחלת המשחק היו N מטבעות, לאחר מהלך אחד נשארות N-2 מטבעות, לאחר שני מהלכים נשארים $N-2\cdot2$, לאחר שלושה מהלכים נשארות $N-2\cdot3$ מטבעות ובאופן כללי, לאחר k מהלכים נשארים $N-2\cdot K$ מטבעות.

ממסקנה 3 עולה כי מספר המטבעות הכולל בסוף המשחק יכול להיות 0 (במצב של (0,0)), 1 (במצב של (1,0)) או 2 (במצב של (2,0)).

לכן, ניתן להסיק כי:

***אם המצב הסופי במשחק הוא (0,0) אז מתקבל ש: $N-2\cdot k=0$ ומכאן נובע ש: $k=N/2$.**

***אם המצב הסופי במשחק הוא (1,0) אז מתקבל ש: $N-2\cdot k=1$ ומכאן נובע ש: $k=(N-1)/2$.**

***אם המצב הסופי במשחק הוא (2,0) אז מתקבל ש: $N-2\cdot k=2$ ומכאן נובע ש: $k=(N-2)/2$.**

על פי מסקנה 1, זוגיות מספר המטבעות הכולל נשמרת. לכן, אם N מספר המטבעות ההתחלתי הוא אי-זוגי, המצב הסופי חייב להיות (1,0) שהוא המצב הסופי היחיד בו מספר המטבעות הכולל הוא אי-זוגי. לכן מספר המהלכים הוא $(N-1)/2$. באותו אופן, אם N מספר המטבעות ההתחלתי הוא זוגי, המצבים הסופיים הם (0,0) או (2,0). במקרים אלה מתקבל שנדרשים $N/2$ או $(N-2)/2$ מהלכים לסיום המשחק.

להלן מוצג ניתוח המשחק בארבעה מקרים שונים: בשני המקרים הראשונים מספר המטבעות ההתחלתי N הוא אי-זוגי (N=19; N=17) ובשני המקרים האחרים מספר זה הוא זוגי (N=18; N=20). נבחר להציג שני מקרים מכל סוג כי בכל אחד מהם מספר המהלכים שונה והצגה זו מאפשרת לזהות את ההיבטים המשותפים והשונים בין שני המקרים. המטרה העיקרית הינה להראות איך היבטים אלה משפיעים על אסטרטגית הניצחון במשחק זה.

ד.1 ניתוח המשחק במקרה N=19.

כיוון ש-19 הוא מספר אי-זוגי, לאורך כל המשחק סך כל המטבעות הוא מספר אי-זוגי. לכן משחק זה מסתיים תמיד במצב (1,0). במשחק עם 19 מטבעות, החלוקה ההתחלתית של המטבעות היא בהכרח לערימה אחת בעלת מספר זוגי של מטבעות והאחרת בעלת מספר אי-זוגי של מטבעות.

לפי מסקנה 4, המשחק מסתיים לאחר 9 מהלכים (כי $9=\frac{19-1}{2}$) , זאת אומרת, מספר אי-זוגי של מהלכים.

אם השחקן רוצה לנצח, כדאי לו להתחיל וכל מהלך חוקי יוביל אותו לניצחון.

ד.2 ניתוח המשחק במקרה N=17.

כיוון ש-17 הוא מספר אי-זוגי, לאורך כל המשחק סך כל המטבעות הוא מספר אי-זוגי. לכן משחק זה מסתיים תמיד במצב (1,0). כמו במשחק הקודם, המצב ההתחלתי הוא (אי-זוגי, זוגי). לפי מסקנה 4, המשחק מסתיים לאחר 8 מהלכים (כי $8=\frac{17-1}{2}$) , זאת אומרת, מספר זוגי של מהלכים.

אם השחקן רוצה לנצח, כדאי לו להיות שחקן שני וכל מהלך חוקי יוביל אותו לניצחון.

חשוב לציין פעם נוספת, כי המשחק מוכרע ברגע שקובעים את הכמות הכוללת של המטבעות. במקרה של מספר מטבעות כולל אי-זוגי המשחק מוכרע אפילו לפני שמחלקים את כלל המטבעות לשתי ערימות. כפי שעולה מהניתוח שהוצג קודם, לא משנה איזה מהלכים (חוקיים) יתבצעו לאחר חלוקה זו, התוצאה צפויה מראש.

ד.3 ניתוח המשחק במקרה N=18.

כיוון ש-18 הוא מספר זוגי, לאורך כל המשחק סך כל המטבעות הוא מספר זוגי. לכן משחק זה מסתיים תמיד במצב (0,0) או במצב (0,2). לפי מסקנה 4 מספר המהלכים עד תום המשחק הוא 9 (כי $9=\frac{18}{2}$), או 8 כי (כי $8=\frac{18-2}{2}$).

כדי להגיע למצב סופי – שהוא כאמור (זוגי, זוגי) נדרשים מספר זוגי של מהלכים אם המצב ההתחלתי הוא (זוגי, זוגי) ומספר אי-זוגי של מהלכים אם המצב ההתחלתי הוא (אי-זוגי, אי-זוגי). לכן:

- אם החלוקה של המטבעות במצב ההתחלתי היא כך שנוצרות שתי ערימות בעלות מספר אי זוגי של מטבעות, נדרשים 9 מהלכים עד סוף המשחק. במקרה זה השחקן **הראשון** מנצח, ולא משנה איזה צעדים חוקיים הוא יעשה. המצב הסופי במקרה זה הוא (0,0) כי $18-2\cdot 9=0$.

- אם החלוקה של המטבעות במצב ההתחלתי היא כך שנוצרות שתי ערימות בעלות מספר זוגי של מטבעות, נדרשים 8 מהלכים עד סוף המשחק. במקרה זה השחקן **השני** מנצח, ולא משנה איזה צעדים חוקיים הוא יעשה. המצב הסופי במקרה זה הוא (0,2) כי $18-2\cdot8=2$.

לסיכום, במקרה של משחק עם 18 מטבעות, אם שחקן רוצה לנצח כדאי לו:

א) להיות ראשון אם החלוקה ההתחלתית של המטבעות היא במצב של (אי-זוגי, אי-זוגי)

או

ב) להיות שחקן שני אם החלוקה הראשונית של המטבעות היא במצב של (זוגי, זוגי).

לדוגמה, במצבים התחלתיים (9,9) או (11,7) כדאי להיות שחקן ראשון ובמקרה של מצבים התחלתיים כמו (12,6) או (10,8) כדאי להיות שחקן שני.

ד.4 ניתוח המשחק במקרה N=20.

כיוון ש-20 הוא מספר זוגי, לאורך כל המשחק סך כל המטבעות הוא מספר זוגי, כמו במקרה הקודם. לכן משחק זה מסתיים תמיד במצב (0,0) או במצב (0,2). לפי מסקנה 4 מספר המהלכים עד תום המשחק הוא 10 או 9.

כדי להגיע למצב סופי – שהוא כאמור (זוגי, זוגי) נדרשים מספר זוגי של מהלכים אם המצב ההתחלתי הוא (זוגי, זוגי) ומספר אי-זוגי של מהלכים אם המצב ההתחלתי הוא (אי-זוגי, אי-זוגי). לכן:

- אם החלוקה של המטבעות במצב ההתחלתי היא כך שנוצרות שתי ערימות בעלות מספר אי זוגי של מטבעות, נדרשים 9 מהלכים עד סוף המשחק. במקרה זה השחקן **הראשון** מנצח, ולא משנה איזה צעדים חוקיים הוא יעשה. המצב הסופי במקרה זה הוא (2,0) כי $20-2\cdot9=2$.
- אם החלוקה של המטבעות במצב ההתחלתי היא כך שנוצרות שתי ערימות בעלות מספר זוגי של מטבעות, נדרשים 10 מהלכים עד סוף המשחק. במקרה זה השחקן **השני** מנצח, ולא משנה איזה צעדים חוקיים הוא יעשה. המצב הסופי במקרה זה הוא (0,0) כי $20-2\cdot10=0$.

לסיכום, במקרה של משחק עם 20 מטבעות, אם שחקן רוצה לנצח כדאי לו:

א) להיות ראשון אם החלוקה ההתחלתית של המטבעות היא במצב של (אי-זוגי, אי-זוגי)

או

ב) להיות שחקן שני אם החלוקה הראשונית של המטבעות היא במצב של (זוגי, זוגי).

לדוגמה, במצבים התחלתיים (15,5) או (11,9) כדאי להיות שחקן ראשון ובמקרה של מצבים התחלתיים כמו (12,8) או (10,10) כדאי להיות שחקן שני.

חשוב לציין כי במקרה של מספר מטבעות כולל זוגי המשחק מוכרע ברגע שמחלקים את כלל המטבעות לשתי ערימות, ולא משנה איזה מהלכים חוקיים יתבצעו לאחר חלוקה זו.

סיכום האסטרטגיה לניצחון במשחק "מטבעות לא שקטים":

- **אם מספר המטבעות הכללי אי זוגי, כדאי להיות שחקן ראשון, אם מספר המהלכים הוא אי-זוגי אחרת כדאי להיות שחקן שני.**
- **אם מספר המטבעות הכללי זוגי, כדאי להיות שחקן ראשון אם המטבעות מחולקים לשתי ערימות בעלות מספר אי-זוגי של מטבעות, אחרת, כדאי להיות שחקן שני.**

לסיום

מהצגה זו של ניתוח המשחק נובע כי הידע המתמטי שנדרש כדי לשחק וליהנות מהמשחק הוא ידע יחסית בסיסי. להערכתי, ניתן לשלב משחק זה בכל הכיתות הבוגרות של בית הספר היסודי ועד בכלל. לכן, נשאר רק לשחק! אבל לכל מי שהמשחק הזה נראה גמור כי האסטרטגיה הוצגה במלואה, נציג שאלה למחשבה:

איך משתנה אסטרטגית המשחק אם משנים את כללי המשחק באופן הבא: מעבירים מטבע אחד מערימה אחת לאחרת ומורידים רק מטבע אחד מערימה כלשהי?

בהצלחה!

מקורות

Dubrovsky, V. (1995): Winning Strategies A manual for the mathematical gambler, *Quantum 6(1) pp.*61-65

ויניצקי-לנדמן (1999) לחלק ולחסר משחק מתמטי מספר חזק 17 עמ׳ 31-34