



# טיול בעין מתמטית

## בעקבות מתמטיול בשבילי מכללת לוינסקי

אילנה דרוקר, עדינה חכם אהרון, מכללת לוינסקי, ת"א

3. אחת המשתתפות טענה, כי גובה התורן הוא כ- 8 מטרים. כאשר התבקשה לתאר, כיצד הגיעה לאומדן זה, אמרה כי היא עוסקת בגרפיקה ובמידות באמצעות סרגל שאורכו 1 מטר, והיות והיא רואה בדמיונה את הסרגל הנ"ל, יש לה תחושה אינטואיטיבית באשר לאומדנו של מטר אחד. על כן יכולה הייתה לאמוד את גובה התורן מהתבוננות בלבד.

### על המשימה:

האומדן מוגדר כהערכת דבר בקירוב, כהשערה. האומדן הוא צירוף של תחושה אינטואיטיבית של גודל וחישוב מתמטי. בגילאים בוגרים הוא משמש להערכה ובקרה בכל תחומי החיים. את היכולת לאמוד בצורה ריאליסטית ניתן לפתח מגיל צעיר מאוד. כדי שילדים יוכלו לאמוד בתבונה ולא סתם לנחש, יש לחשוף אותם להתנסויות ולהתבוננות בסביבה תוך הנחיה, מתי נכון להעריך ועד כמה קרוב האומדן למידה המדויקת במצב מסוים. האומדן הוא כלי חשוב



בפיתוח חוש למספרים (NUMBER SENSE) היות והוא מפתח, בין השאר, תחושה למספרים קטנים וגדולים ולמספרים שמייצגים מידות. לעתים היכולת לאמוד חשובה יותר מאשר המיומנות הדרושה לביצוע חישוב מדויק או המדידה עצמה.

המתמטיקה מאפשרת לנו לתאר ולהסביר חלק מן החוקיות שעל פיה מתנהלת הסביבה שבה אנו חיים, וכן נותנת בידינו כלים כדי למדוד, לכמת ולהעריך את ממדיהן של תופעות שונות.

במאמר קודם (במספר-חזק 20) הוצג אוסף משימות לביצוע במהלך טיול מתמטי שזימן חוויה מתמטית מיוחדת.

במאמר זה נציג דוגמאות, הסברים ותיאורים של חלק מהמשימות, נביא מדברי הסטודנטיות להוראה במכללה, שעברו את התהליך, וכן נתאר פעילויות שנעשו בעקבות הטיול.

המשימות:

### 1. גובה תורן הדגל

משימה זו עוסקת בנושאים: אומדן, יחס, מדידות אורך.

יש לאמוד את גובה תורן הדגל. יש לתאר את הדרך שלפיה בוצע האומדן.

### לפתרון משימה זו הוצעו מספר דרכים:

1. אומדן גובה התורן ביחס לבניין המכללה העומד בסמוך. גובה התורן הוא כגובה שתי קומות בבניין המכללה. כל קומה גובהה כ- 4 מטרים, מכאן שגובה התורן הוא כ- 8 מטרים.
2. גובה התורן ביחס לגובהו המדויק של אחד המשתתפים בטיול. אומדן גובה התורן בעזרת ההשערה, כמה פעמים "יכנס" גובה בתורן הדגל. כאשר עמדה אחת המשתתפות, שגובהה 1.70, ליד התורן, העריכו המשתתפים כי גובה מוכל 4 פעמים בגובה התורן. מכאן השערותם, כי גובה התורן הוא כ- 7 מטרים.

## 2. טיפוס במדרגות

משימה זו עוסקת בנושאים: יחס, מדידות, גילוי חוקיות, סדרות מספרים. בכמה דרכים ניתן לטפס במדרגות אם מותר לטפס מדרגה אחת, מדרגה אחת או שתי מדרגות גם יחד או שילוב של הדרכים? השלימו את הטבלה:

מספר המדרגות	מספר האפשרויות לטיפוס
1	
2	
3	
4	
5	

שערו: בכמה אופנים ניתן לטפס על 6 מדרגות? בידקו את השערתכם. האם צדקתם? התבוננו בסדרת המספרים שהתקבלה בטור "מספר האפשרויות לטיפוס". מה גיליתם? נסו להמשיך את הסדרה בשני מספרים נוספים.

לפתרון משימה זו הוצעה הדרך המקורית הבאה: על המדרגה הראשונה טיפסה סטודנטית אחת. על שתי מדרגות טיפסו שתי סטודנטיות בשני אופנים שונים (מדרגה אחת – מדרגה אחת או שתי מדרגות יחד).

על שלוש מדרגות טיפסו שלוש סטודנטיות בשלושה אופנים שונים (מדרגה אחת – מדרגה אחת – מדרגה אחת, או מדרגה אחת ושתי מדרגות יחד או שתי מדרגות יחד ומדרגה אחת) וכך הלאה עד למדרגה החמישית.

מספר האפשרויות לטיפוס מופיעות בטבלה הבאה:

מספר המדרגות	מספר האפשרויות לטיפוס
1	1
2	2
3	3
4	5
5	8

מכאן הסיקו הסטודנטיות את החוקיות העומדת מאחורי מספר האפשרויות לביצוע המשימה. על 6 מדרגות ניתן לטפס ב-13 אפשרויות שונות.

במשימה זו מתקבלת סדרת מספרים בעלת חוקיות מסוימת, שניתן "לגלות" אותה על-פי האיברים הראשונים של הסדרה. החוקיות היא: כל מספר בסדרה, החל מהאיבר השלישי, הוא סכום של שני האיברים הקודמים לו. למשל:  $1+2=3$   $2+3=5$ ,  $3+5=8$  וכך הלאה...



### על המשימה:

סדרה היא קבוצה מסודרת של איברים (מספרים, צורות וכו') שבה, קיימת בד"כ חוקיות מסוימת. ידוע מי האיבר הראשון, האיבר השני, האיבר האחרון וכו'. מספר האיברים בסדרה יכול להיות סופי (סדרה סופית) או אין-סופי (סדרה אין-סופית). במשימה שלפנינו מתקבלת סדרת מספרים אין-סופית, הידועה בשם סדרת פיבונאצ'י. ליאונארדו פיבונאצ'י (הידוע גם בשם ליאונארדו דה-פיזה) היה מתמטיקאי שחי במאה ה-13 ופרסם ב-1202 בעיה בשם: "בעיית הארנבים", שלימים נודעה כסדרת פיבונאצ'י. לסדרת זו חשיבות רבה בעיקר בשל העובדה, שניתן לגלות בטבע תופעות רבות, אשר מתנהלות על פי אותה חוקיות (כלומר: כל מספר בסדרה הוא סכום של שני האיברים הקודמים לו).

## בעיית הארנבים:

מדען החליט לחקור את חייהם של הארנבים. הוא סגר ארנב וארנבת בחדר. בכל חודש הביא זוג הארנבים לאוויר העולם זוג ארנבים חדש (ארנב וארנבת). זוג ארנבים חדש מתחיל להביא לעולם זוג ארנבים נוסף חודשיים לאחר היוולדו. השאלה שהטרידה את המדען הייתה: בהנחה שהתהליך יימשך באופן אחיד ורציף – כמה ארנבים יהיו בחדר כעבור שנה?

בפתרון בעיית הארנבים גילה פיבונאצ'י את החוקיות של סדרת המספרים: 1, 1, 2, 3, 5... (בדומה לפתרון שהוצע למשימת המדרגות):

מספר החודש	סה"כ מספר הזוגות
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5

## פעילויות שנעשו בעקבות הטיול המתמטי:

1. בעקבות סדנה בת מספר מפגשים בנושא קווים ומצולעים, שהועברה לילדי הגן הפועל במכללת לוינסקי על ידי סטודנטיות מהמכללה, יצאו ילדי הגן (בגילאי 5-6) בהנחיית הסטודנטיות גם הם לטיול מתמטי בסביבתם. הילדים רוכזו ליד שער המכללה. הוטלה עליהם המשימה לתאר את הריצוף על המדרכה בכניסה למכללה ולזהות צורות גיאומטריות המופיעות בריצוף. בריצוף זה ניתן לזהות משושים משוכללים אשר בתוכם חסומים עיגולים.

ריצוף הוא כיסוי שטח בצורות על פי כללים מסוימים:

- אין רווחים בין המרצפות.
- מרצפת אחת אינה מונחת חלקית על מרצפת אחרת.
- קדקודי מרצפות נוגעים רק בקדקודי מרצפות, ולא בצלעות.
- כדי לרצף צריך שסכום הזוויות מסביב לכל קדקוד יהיה 360 מעלות.

הריצוף של המדרכה במכללה הוא "ריצוף משוכלל", דהיינו, ריצוף בסוג אחד בלבד של מצולע משוכלל. ב"ריצוף משוכלל" זווית המצולע המהווה את המרצפת חייבת להיות גורם של 360. כדי לרצף צריך שיהיו סביב כל קדקוד בריצוף לפחות שלושה מצולעים. מכאן שהזווית של המצולע בריצוף אינה יכולה להיות גדולה מ-120 מעלות. מתנאים אלו נובע כי המצולעים המתאימים לריצוף משוכלל הם משולש שווה צלעות, ריבוע ומשושה משוכלל בלבד (המצולעים בריצוף משוכלל חופפים).

הילדים התבקשו לתאר את הריצוף על המדרכה בכניסה למכללה. הם תיארו אותו כך:

"אני רואה עיטור"

"העיטור הוא קו עקום סגור"

"אני רואה צלעות שהם קווים שזורים"

"הנה משושה כי יש כאן שש צלעות"

"יש כאן גם שש פינות".

2. במשימה אחרת העוסקת בריצוף (משימה 9) התבקשו הילדים לתאר, מאלו צורות גיאומטריות מורכב הריצוף ברחבת הכניסה למכללה. הילדים זיהו משולשים וריבועים. כאשר נשאלו "איך אתם יודעים שזה משולש?" ענו תשובות שונות:

"כי כה נראה כמו משולש" או "כי רואים שפה

משולש"

"פה משולש כי ההורים סיפרו לי"

"פה משולש כי כה עם שלוש צלעות" או "כי יש

לו שלוש פינות".



מתשובות הילדים הסיקו הסטודנטיות כי הילדים מנמקים את תשובותיהם ברמות חשיבה שונות לפי תיאוריות ואן-הילה: חלק מהילדים מנמקים לפי רמת חשיבה-1 ההכרה (Recognition). ברמה זו יודע הילד לזהות צורות גיאומטריות, להבחין בין צורות גיאומטריות שונות, הצורה נתפסת בשלמותה כפי שהיא נראית. ילד הנמצא

כמה מצולעים מכל סוג ניתן לזהות?  
נסו לאמוד את אורך חפיסת השוקולד.  
הסבירו כיצד בוצע האומדן.



### ג. משימת סימנים בדרך

משימה זו עוסקת בנושאים: סוגי קווים, זוויות, מצולעים, סימטריה.  
התבוננו בתמרורים: "עצור" "אין-כניסה" ו"דרך חד-סיטרית" ותארו אותם במילים.  
אילו צורות גיאומטריות ניתן לזהות בתמרורים?  
האם ניתן למצוא סימטריה בתמרורים? אם כן, מאיזה סוג?



### ה. הטילול המתמטי מנקודת הראות של הסטודנטיות:

הסטודנטיות סברו, שחשיפת תלמידים לסגנון זה של הוראה, יתרונותיה עמה מהסיבות דלהלן:  
"למדידת מתמטיקה תוק כפי שיוצא מרחיבה את האופקים של התלמיד ויורמת לו לראות את המתמטיקה לא כתחום סגור ורחוק מעולמו, אלא כחשה אחי-היום-יום שלו".  
"יש לתלמידים אפשרות להתבונן, לחשוב, לבטא את מחשבותיו במילים ולנמק בדרך מעניינת".  
"מתמטיקה מפתח אצל הילמד סקרנות לסביבתו".  
"הטילול המתמטי מאתגר ויוצר מוטיבציה אצל התלמידים".  
"מתמטיקה יוצר למידה מתוק הנאה".

בשלב זה עדיין אינו מכיר את התכונות המיוחדות לאותה צורה גיאומטרית. לרמה זו מתאימים הנימוקים כמו:

"כי מה נראה כמו *esien*".

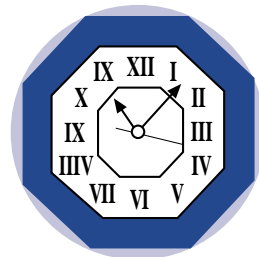
הנימוקים של הילדים שטענו, כי זהו משולש משום שיש לו שלוש צלעות או שלוש פינות, מתאימים לרמת חשיבה 2- אנליזה (Analysis). ברמה זו הילד מכיר חלק מהתכונות של הצורות הגיאומטריות שהוא רואה. הנימוקים של הילדים ברמה זו מסתמכים על אנליזה לא פורמלית של תכונות הצורה הגיאומטרית. פעילות זו נתנה לסטודנטיות הזדמנות להתרשם מן האופנים שבהם ילדים רואים ומזהים צורות גיאומטריות ותכונותיהם.

### משימות נוספות שחוברו ע"י

#### הסטודנטיות:

#### א. משימת השעון

משימה זו עוסקת בנושאים: זוויות, מצולעים, מעגל, זיהוי צורות וסימטריה.  
התבוננו בשעון שלפניכם ותארו אותו במילים.  
אלו מצולעים ניתן לזהות בשעון?  
האם ניתן לזהות סימטריה, אם כן מאיזה סוג?  
אלו סוגי קווים ניתן לזהות בשעון?  
אם ידוע כי המרחק בין נקודת מפגש המחוגים לבין אחד מקדקודי השעון הוא 10 ס"מ, מהו קוטר המעגל החוסם את השעון?



#### ב. משימת חפיסת השוקולד

משימה זו עוסקת בנושאים: מצולעים, גופים, מדידות אורך.  
התבוננו בחפיסת השוקולד ותארו אותה במילים.  
איך קוראים לצורה של חפיסת השוקולד?  
אילו מצולעים ניתן לזהות בצורת החפיסה?

הסטודנטיות התייחסו בחיוב לחשיפת פרחי-הוראה ומורים לסגנון זה של הוראה. מדבריהן ניתן להסיק, כי הטיול המתמטי חולל שינוי בהשקפתם על הוראת המתמטיקה:

"הטיול המתמטי דרש ממני הפעלת חשיבה לואית, שיתוף פעולה, יצירתיות ודמיון".

"הטיול המתמטי תרם לי באופן אישי להשקפתי על הוראת המתמטיקה. לפני-כן לא חשבתי כי ניתן לעמוד מתמטיקה מהסביבה הטבעית מחוץ לכיתה".

"אינתי דברים שלא חשבתי עליהם קודם, לדואמה: במשימת הריצופים ליד שער המכללה, לפני הטיול המתמטי לא שמתי לב למושג, לעיבוד ולכך

שהעיבוד חסום בתוך המשושה".

"הטיול המתמטי ארס לי להבין שניתן לעמוד מתמטיקה בדרכים שונות ומאונות, ובכל מקום ניתן לעזור אצל הילד חשיבה".

לסיכום, ההתנסות בדרך הוראה בלתי שגרתית הראתה לנו כיצד ניתן להניע תלמידים בני גילים שונים לעסוק במשימות מעוררות מחשבה וקשורות לחיי היום-יום.

גילינו את יופיה של המתמטיקה, כפי שכתבה אחת הסטודנטיות לאחר הטיול:

"הטיול עורר בי סקרנות, ראייה נוספת ויפה על הסביבה, מבט מיוחד וסוג מהמקובל בשיעורי המתמטיקה".

## רשימת מקורות

- אופיר, ש' וינצקי-לנדמן, ג' (1998).
- חמישים שנה למדינת ישראל, טיול מתמטי בחיפה. חיפה: "קשר חם", הטכניון.
- אלברט, ג' לינצ'בסקי, ל' כהן, נ' (1992).
- הוראת הגיאומטריה בבית הספר היסודי. מכון מופ"ת, משרד החינוך והתרבות, אגף להכשרת עובדי הוראה.
- דרוקר, א' חכם אהרון, ע' רדאי, א' (1999).
- מתמטיול בשבילי מכללת לוינסקי, אוסף משימות. תל אביב: מכללת לוינסקי לחינוך.
- דרוקר א' רדאי, א' חכם אהרון, ע' (2000).
- מתמטיול בשבילי מכללת לוינסקי. מספר חזק 20. מכללת בית ברל.
- פטקין, ד' רייז, ר' ואן דורמולן אברהמי, נ' (1996).
- לעשות מתמטיקה-תאורית ואן הילה והוראת גאומטריה. חיפה: המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, "מחר 98 הטכניון".
- פטקין, ד' דרוקר, א' (1998).
- סיום מתמטי בעיר נתניה. נתניה: מרכז מורים אזורי נתניה.
- פטקין, ד' דרוקר, א' (1999).
- סיום מתמטי. תל אביב: הוצאת מכללת סמינר הקיבוצים.
- פישמן, ש' פרקינס, ד' ג'יי, א' (1997).
- הכתה החושבת-למידה והוראה בתרבות של חשיבה. ירושלים: הוצאת מכון ברנקו וייס לטיפוח החשיבה.
- פישמן, ש' פרקינס, ד' (1997).
- שפת החשיבה. חינוך החשיבה, 11.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989).
- Curriculum and Evaluation Standards for School mathematics. VA: Reston.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991).
- Professional Standards for Teaching Mathematics. VA: Reston.