מחקר שימושי

קשיים בהבנת המבנה הכפלי

ד"ר אירית פלד-אוניברסיטת חיפה, ד"ר לאוניד לבנברג, איבי מכמנדרוב, רות מירון-המרכז לטכנולוגיה חינוכית, תל-אביב.

עובד בידי ד"ר מיכל סוקניק מתוך מאמר שהופיע ב: Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1999, Haifa, Israel

אנו מלמדים את הילדים פעולות חשבון בסיסיות מתוך כוונה שהם ייושמו אותן בסיטואציות שונות. אנו גם מצפים לראות התקדמות לאורך זמן בבחירת המודל המתמטי המתאים למצב מסוים, כלומר, ביכולת ליישם מודלים יעילים יותר במקרים הרלוונטיים.

ממחקרים שונים, כגון Kouba (1989) ו- Mitchelmore and Mulligan (1996) עולה שילדים לא משתמשים בכפל כשהם פותרים בעיות מילוליות "כפליות". ילדים רבים משתמשים בחיבור, ויש הבוחרים להשתמש בתהליך מנייה ארוך. נהוג לטעון שילדים משתמשים בכלי היעיל יותר, או בדרך הקצרה יותר, כשאלה נמצאים ברשותם. אם ילדים נוטים להיות יעילים, מדוע רבים מהם אינם משתמשים בכפל אלא, במנייה או בחיבור? אפשר להציע שני הסברים: או שהם אינם מסוגלים לזהות את המבנה של בעיה מילולית כפלית כמבנה כפלי, או שהם כן מזהים מבנה כפלי, אך אין הם יודעים את עובדות הכפל הרלוונטיות. בעבודה זו אנו מבחינים בין שני מכשולים אלה על-ידי הסתכלות לא רק על אסטרטגיות הפתרון של הילדים, אלא גם על הדרך שבה הם תופסים מצבים שונים.

בנוסף לבעיות מילוליות, שנחקרו רבות בעבר, ניתנו במחקר זה מטלות שבהן התבקשו הנבדקים לבנות מצבים שונים של עצמים.

שיטה

במחקר השתתפו 54 ילדים מכיתות ג' ו-ד', שמורתם זיהתה אצלם קשיים מסוימים במתמטיקה.

כל ילד רואיין בראיון אישי על-ידי מורתו. מטרות הראיון היו:

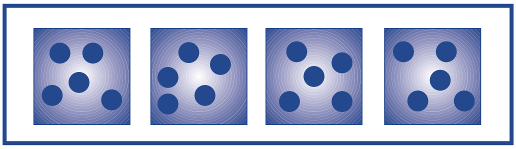
- למצוא באיזה מודל מתמטי הילדים משתמשים באופן ספונטני כשהם מתארים מצב מסויים בעל מבנה כפלי.
- לראות איזו אסטרטגיה הילדים מיישמים ספונטנית כשהם מחשבים את הכמות הכוללת של מצבי הכפל הנ"ל.
- למצוא כיצד הם פותרים תרגילי כפל שניתנים להם בעל-פה.
- לבדוק את הקשר בין שלושת המרכיבים הקודמים, כלומר בין ידיעת עובדות כפל לבין זיהוי מבנה כפלי ושימוש בכפל במצבים שונים.

פירוט הראיון

במטלות השונות של הראיון הוצגו מצבים כפליים שונים של עצמים. כל סוג של מצב הוצג כמה פעמים במספרים שונים (10X2, 4X2, 10X5, 4X5). כאן אנו מפרטים רק את הדוגמאות במקרה של 4X5. לא נאמר לילד שהראיון הוא בנושא כפל, עד שניתנו לו תרגילי כפל (בסוף הראיון). להלן פירוט המטלות שהיו בראיון:

קבוצות שוות

במטלה זו השתמשו בכרטיסיות שעליהן מצוירות קבוצות שוות של עיגולים. לדוגמה, כרטיסיה עם ארבע קבוצות שבכל אחת יש חמישה עיגולים:



ניתן לראות שכל הקבוצות שוות זו לזו במספר העיגולים שהן מכילות, אולם העיגולים אינם מסודרים בדיוק באותה צורה. המטלות שהתלוו למצב זה היו:

המורה נתנה לילד את הכרטיסיה באופן שהיא לא ראתה את המצויר בה. היא אמרה לילד: ״זה הציור שלך. אני לא יודעת מה מצויר שם, רק אתה רואה את זה. הייתי רוצה שתתאר לי את מה שמצויר אצלך, כך שאני אוכל לצייר אותו דבר על הנייר שלי.״

המטרה של מטלה זו היא לראות לאילו פרטים בציור הילד מתייחס. הפרטים החשובים הם: א. הקבוצות שוות. ב. בכל קבוצה יש 5 עיגולים. ג. יש ארבע קבוצות. אם הילד לא התייחס לפרטים אלה, עזרה לו המורה להבחין שהקבוצות שוות, ואז שאלה על גודל הקבוצות ועל מספרן. לאחר מכן שאלה המורה: ״כמה עיגולים יש בציור בסך הכל?״ מטרת שאלה זו הייתה לברר כיצד מצא הילד את המספר הכולל של העיגולים: על־ידי מנייה מהתחלה, באמצעות מנייה בחמישיות או חיבור חוזר, או על־ידי תרגיל כפל.

שורת כפל מבדידים

במטלה זו הוצג סידור של בדידים שווים שהיו מונחים בשורה.

לדוגמה, שורה שבה ארבעה בדידים של 5:

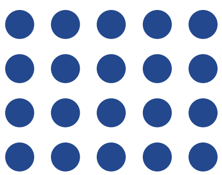
5	5	5	5

המטלות שהתלוו למצב זה היו: תחילה סדרה המורה את שורת הבדידים ושאלה את הילד מה הוא רואה, והאם הוא מבחין בסדר מיוחד. אם הילד לא ענה בתשובה מלאה, עזרה לו המורה להבחין שהבדידים שווים, ואחר כך שאלה אילו בדידים וכמה בדידים יש.

אחרי שהובהר היטב שיש ארבעה בדידים של 5, שאלה המורה: ״מה אורך השורה?״ ותיעדה את דרך הפתרון.

מערך מלבני

במטלה זו הוצג מערך מלבני של איקסים או עיגולים. לדוגמה, מערך בגודל 4x5 הנראה כך:



המטלות שהתלוו למצב זה היו:

המורה הציגה לפני הילד את המערך וביקשה ממנו להתבונן בו היטב ולנסות לזכור אותו, כי אחר כך הוא יתבקש לצייר אותו מהזיכרון. כשהילד אמר שהוא מוכן, הסתירה המורה את הציור והילד צייר אותו מהזיכרון. לאחר שסיים, הראתה המורה לילד את המערך המקורי וביקשה שיבדוק אם צייר נכון. לבסוף שאלה המורה: ״כמה עיגולים יש כאן ביחד?״ ותיעדה את דרך הפתרון.

תרגילי כפל

הילד התבקש לפתור תרגילי כפל שהתאימו למצבי הכפל השונים, כגון 4x5, והמורה תיעדה את אופן הפתרון. כאמור, השאלות שהוזכרה בהן במפורש פעולת הכפל הופיעו רק בסוף הראיון, על מנת למנוע רמזים כלשהם לגבי בחירת הפעולה במצבים השונים במטלות הקודמות.

תוצאות

בטבלאות להלן אפשר לראות את אחוזי התלמידים שזיהו את המצב שהוצג לפניהם כמצב כפל, לעומת אחוזי התלמידים שלא זיהו זאת. כן יש הפרדה בין אלה שהצליחו לחשב בראש את התוצאה של 4x5 (תוך שימוש בשליפת עובדות או חיבור חוזר), בין אלה שלא הצליחו לעשות זאת (ונזקקו, למשל, לשימוש בעצמים). הטבלאות מוצגות עבור כל מטלה בנפרד:

קבוצות שוות

	אחוז (ומספר) התלמידים שזיהו מצב כפלי	אחוז (ומספר) התלמידים שלא זיהו מצב כפלי
תלמידים שפתרו תרגיל כפל בראש (32 תלמידים)	22% (7)	78% (25)
תלמידים שפתרו תרגיל כפל בעזרת עצמים (22 תלמידים)	0% (0)	100% (22)
סך כל התלמידים (54 תלמידים)	13% (7)	87% (47)

טבלה מס׳ 1

שורת כפל מבדידים

	אחוז (ומספר) התלמידים שזיהו מצב כפלי	אחוז (ומספר) התלמידים שלא זיהו מצב כפלי
תלמידים שפתרו תרגיל כפל בראש (32 תלמידים)	16% (5)	84% (27)
תלמידים שפתרו תרגיל כפל בעזרת עצמים (22 תלמידים)	9% (2)	91% (20)
סך כל התלמידים (54 תלמידים)	13% (7)	87% (47)

טבלה מס׳ 2

מערך מלבני

	אחוז (ומספר) התלמידים שזיהו מצב כפלי	אחוז (ומספר) התלמידים שלא זיהו מצב כפלי
תלמידים שפתרו תרגיל כפל בראש (32 תלמידים)	31% (10)	69% (22)
תלמידים שפתרו תרגיל כפל בעזרת עצמים (22 תלמידים)	9% (2)	91% (20)
סך כל התלמידים (54 תלמידים)	22% (12)	78% (42)

טבלה מס׳ 3

טבלאות אלה מראות שבכל שלושת המצבים שהוצגו לילדים היה אחוז גבוה למדי של תלמידים שלא זיהו אותם כמצב של כפל. עובדה זו נכונה גם לגבי תלמידים שידעו לפתור תרגילי כפל בראש, כלומר עובדות הכפל היו ידועות להם. הטבלה הבאה מראה את האסטרטגיות השונות למציאת הכמות הכוללת של העצמים בכל אחד משלושת המצבים בקרב 32 הילדים שידעו לפתור בראש את תרגיל הכפל 4X5. מילדים אלה היינו מצפים שישתמשו בידע זה במצבים השונים. מטבלה מס׳ 4 אפשר לראות, שבין הילדים שידעו לפתור בראש 4X5, פחות מרבע השתמשו בידע זה למציאת הכמות הכוללת (בכל אחד מהמצבים השונים). במקום זה, הם השתמשו באסטרטגיות אחרות, כגון חיבור או מנייה, כדי למצוא את הכמות הכוללת שהוצגה לפניהם. כדאי לציין שהאסטרטגיה שבה ילד השתמש לא תמיד הייתה עקבית. מקצת מהילדים השתמשו בחיבור או אפילו במנייה עבור כמויות קטנות (למשל, במצבים הקשורים ל–2X4) ובכמויות גדולות הם השתמשו בכפל. התשובות וההסברים של הילדים תורמים מידע מעניין על הדרך שבה הם תופסים את המצבים הנתונים. להלן דוגמה:

רון (בכיתה ג׳) קיבל מערך מלבני של 4X5 איקסים, וצייר אותו נכון מתוך הזיכרון. לאחר המטלה התקיים הדיאלוג הבא:

מראיין: כמה שורות יש?
רון: 4
מראיין: כמה איקסים יש בכל שורה?
רון: 5
מראיין: כמה איקסים יש ביחד?
רון: (חושב לפמן מה) 20
מראיין: איך ידעת?
רון: עשיתי 4X5
מראיין: עשית את זה בראש?
רון: לא. ספרתי את האיקסים.
מראיין: אז למה אמרת 4X5?
רון: כי זה 20
מראיין: אבל 2X10 זה גם 20
רון: (מהסס לרגע). אה! אבל כאן (במערך) יש לנו 4 וגם 5
מראיין: אז למה קודם ספרת במקום לעשות 4X5?
רון: כי מיהרתי!...

מדיאלוג זה ניתן להתרשם בתחילה כאילו זיהה רון את המבנה הכפלי, או לפחות את מבנה החיבור החוזר של המערך. ואולם הזמן שלקח לו למצוא את הכמות הכוללת, העדות שלו עצמו לגבי המנייה שלו, והתגלית המפתיעה שלו בדבר הקשר ל–4 ו–5, מובילים לפרשנות שונה: רון הציע את הביטוי 4X5 **לאחר שמנה** 20 איקסים במערך שהוצג לו. ייתכן שבחר 4X5 משום שזהו ביטוי המביא ל–20. כנראה שרק במהלך הדיון, במחשבה אחורנית, הוא פתאום ראה כיצד ממדי המערך קשורים לביטוי. במילים אחרות, הוא זיהה את המבנה הכפלי בדיעבד.

אחוז (ומספר) התלמידים שבחרו בכל אסטרטגיה למציאת הכמות הכוללת במצבים שונים אצל ילדים שיכלו לפתור בראש 4x5

אסטרטגיה / מצב	כפל	חיבור	מנייה	אחר	סה"כ
קבוצות שוות	19% (6)	56% (18)	19% (6)	6% (2)	100% (32)
שורת בדידים	13% (4)	59% (19)	–	28% (9)	100% (32)
מערך מלבני	25% (8)	28% (9)	28% (9)	19% (6)	100% (32)

טבלה מס׳ 4

סיכום ודיון

ילדים מכיתות ג׳ ו–ד׳ שהשתתפו במחקר זה מראים שימוש מועט ביותר באסטרטגיות כפל במצבים שבהם כפל היה האסטרטגיה היעילה יותר. לא ניתן להסביר ממצאים אלה בכך שחלק גדול מהילדים לא ידעו את עובדות הכפל הרלוונטיות: אפילו בין אלה שיכלו למצוא עובדת כפל בעל–פה, רק כשליש זיהו את המבנים הכפליים. בחירת האסטרטגיות למציאת הכמות הכוללת במצבים השונים, מראה אף היא שפחות מרבע מהילדים שיכלו לחשב עובדות בעל–פה השתמשו בכפל, אחוז גדול מהם השתמשו בחיבור, והיו גם מי שפשוט מנו.

הילדים במחקר זה זוהו על ידי מוריהם כבעלי קשיים מסויימים. אם שליפת עובדות הכפל אינה המכשול העיקרי ביישום כפל, ייתכן שהקשיים קשורים לסוג המצבים המוצגים, או לטיב ההוראה.

הזיהוי של מבנה כפלי הוא מורכב למדי, כפי שמעיד ההסבר הבא, לגבי התרגיל 4X5:

בתהליך התפתחות מושג המספר, הקשר הראשוני של המספר הוא לכמות מתאימה. המספר 4, למשל, מונה ארבעה עצמים. לעומת זאת, כשאנו מקשרים תרגיל כפל (למשל, 4X5) למצב כפלי של כמויות (למשל, מצב של 4 קבוצות שבכל אחת 5 עצמים), **אף אחד** מן הגורמים בתרגיל הכפל אינו מונה עצמים ״פשוטים״: גורם אחד מבטא גודל שחוזר על עצמו (**5 עצמים בכל קבוצה**), וגורם שני מונה קבוצות (**4 קבוצות**). הדבר אמור גם לגבי ייצוג המספרים בבדידים: הקשר הראשוני של מספר הוא לבדיד מסוים, ואילו בתרגיל כפל מספר אחד מייצג את הבדיד שחוזר על עצמו, והמספר האחר מייצג את מספר הבדידים. מורכבות זו מקשה על הילדים לזהות מבנה כפלי וליישמו במצב נתון.

הראיונות שנערכו במחקר זה עם התלמידים מעידים על קשיים אלה. להלן דוגמאות מהראיונות במטלות נוספות, בהן התבקשו הילדים להשתמש בעצמים ולייצג ביטוי כמו 3X4. היו ביניהם שנטו לייצג את שני המספרים בייצוג הראשוני שבו המספר מיוצג באמצעות כמות של עצמים או באמצעות בדיד מתאים.

לדוגמה, אחד הילדים השתמש בבדידים ובנה רכבת המורכבת מבדיד אחד של 4 ומשלושה בדידים של 3, כדלקמן:

3	3	3	4

כשראה ש״משהו לא בסדר״, כי זה לא יוצא 12, כצפוי, הוא שינה את זה לבדיד אחד של 3, ושלושה בדידים של 4. הוא היה מתוסכל כשראה שזה עדיין לא יוצא 12.

ילד אחר ייצג את הביטוי 3X4 על–ידי בניית מערך המורכב מארבע שורות, עם שלושה בדידים של 3 בכל שורה:

3	3	3
3	3	3
3	3	3
3	3	3

במהלך הוראת הכפל בכיתה נלמדים הייצוגים של שני גורמי הכפל. אולם ההוראה צריכה לכלול גם מטלות שמזמנות את הצורך לנתח מצבים נתונים בעזרת המודלים המתמטיים הנלמדים.

ביבליוגרפיה

Kouba,V.L. (1989) Children's solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(2) 147-158

Mitchelmore, M.C., & Mulligan J. (1996). Children's developing multiplication and division stratgies. *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 407-414