



## הפיל ובעיית הממוצע

שלי רוטה – מכון וייצמן למדע, רחובות, מט"ח ת"א  
ד"ר אלכס פרידלנדר-מכון וייצמן למדע, רחובות

בעיות יכולתם לבצע חישובים מהירים, לסרטט גרפים, לסרטט ולשנות צורות הנדסיות מגדילה באופן ניכר את "כוחו המתמטי" של התלמיד. השימוש בכלים טכנולוגיים מפחית במידה ניכרת את המאמץ הדרוש לביצוע חישובים ומיומנויות טכניות אחרות. בכך הוא מאפשר לפותרים להתמקד במושגים המתמטיים הרלוואנטיים, בתהליכי החשיבה ובאסטרטגיות לפתרון הבעיה.

### פעילות הפילים

כהמחשה לנקודות שהוזכרו לעיל נביא פעילות מן הסוג הראשון – פעילות חקר, שמטרתה חשיפה ראשונית למושג הממוצע, הנלמד בדרך כלל בכיתה ה'. הפעילות פותחה במסגרת פרוייקט לפיתוח פעילויות חקר בשילוב מחשב במחלקה להוראת המדעים של מכון וייצמן למדע.

זוהי פעילות המיועדת להימשך כשני שיעורים, מתאימה כפתיחה ללימוד הנושא ומשלבת את הגיליון האלקטרוני (Excel) ככלי טכנולוגי. במסגרת הפעילות התלמידים מכירים את המאפיינים של שני סוגי פילים (אסיייתיים ואפריקניים) ודרך ההתארגנות שלהם בעדרים. במסגרת זו נתייחס לסוג אחד של פילים בלבד. הנתונים על גודלם של שישה עדרי פילים מוצגים בדיאגרמה המובאת בפני התלמידים בקובץ מוכן של Excel (איור 1א):

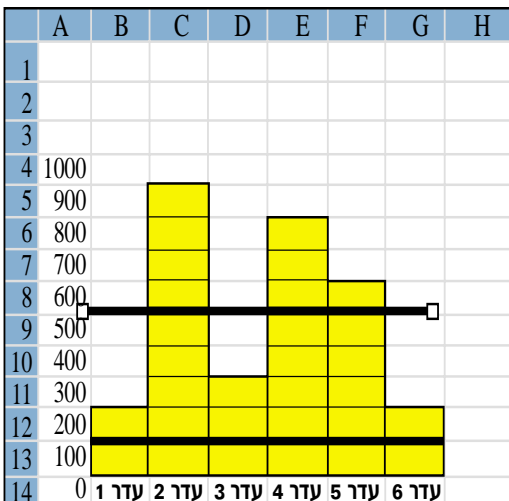
### חקר מתמטי

חקר בעיות ופתרוןן הם תהליכים הקשורים לשימוש באסטרטגיות ובמושגים מתמטיים שנלמדו בכיתה. משימות חקר טובות מעמיקות את הבנת המושגים המתמטיים הנלמדים ומגבירות את המוטיבציה ללימוד המקצוע. הן מעודדות רפלקציה ודיונים מתמטיים וכן מקשרות בין המקצוע לבין סביבתו הלימודית והיום יומית של הילד.

תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לבית הספר היסודי דורשת לשלב פעילויות חקר בהוראה של כל נושא. פעילויות אלה צריכות להוות בסיס להבנה וליכולת היישום של הנושאים המתמטיים הנלמדים באופן שוטף, ולא, כפי שמקובל היה לחשוב, תוספת הנספחת להוראת נושא, אם בכלל. מכיוון שחקר הוא מרכיב מרכזי בלמידת המתמטיקה, הוא חייב להיות נחלת כל אוכלוסיית התלמידים – על רמות היכולת המתמטית וההישגים המגוונים שלה.

- יש להבחין בפעילויות חקר מסוגים שונים:
- פעילויות שנועדו לחשיפה ראשונית למושג המתמטי.
- פעילויות שהן חלק מתהליך הלמידה של המושג.
- פעילויות לסיכום וליצירת קשרים בין מושגים. אלמנט נוסף, המומלץ על ידי תכנית הלימודים החדשה, הוא השימוש בכלים טכנולוגיים: כלים טכנולוגיים אלה חיוניים בתהליכי חקר ובפתרון

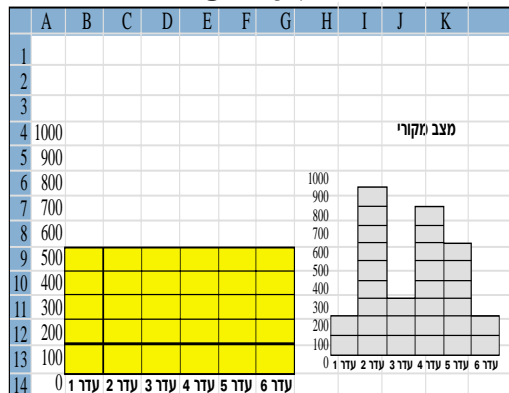
**מספר חברים בעדרים של פילים אפריקניים**  
דיאגרמה לשינוי



איור 1

הדיאגרמה לאחר שהתלמידים שיערו מהו הממוצע של ששת העדרים.

**מספר חברים בעדרים של פילים אפריקניים**  
דיאגרמה לשינוי

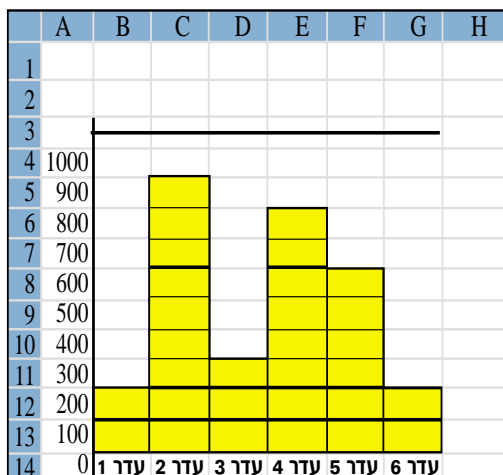


איור 1

הדיאגרמה של תלמידים שבדקו את השערתם (ממוצע של 500 פילים) על ידי העברת מלבנים מעמודה אחת לשנייה.

ד. שימוש בתפיסת הממוצע כגודל האחיד, המתקבל על ידי הבאה לכמויות שוות בכל קבוצות הנתונים. בשלב זה התלמידים מתבקשים להתמודד עם שינויים המוכנסים בסיטואציה המקורית. (ראה דף פעילות במסגרת)

**מספר חברים בעדרים של פילים אפריקניים**  
דיאגרמה לשינוי



איור 1

הדיאגרמה כפי שהיא מוצגת לתלמידים בתחילת הפעילות.

לאחר הכרות קצרה עם הנתונים המוצגים בדיאגרמה, על התלמידים לחקור את המצב שבו הפילים "מתפזרים" לעדרים בעלי גודל שווה.

תהליך זה מבוסס על כמה שלבים:

- העלאת השערות לגבי גודלם האחיד של העדרים השווים על-ידי הנחת קו בגובה המתאים לדעתם לגודל המשוער (איור 1ב).
- חלוקה בפועל של הפילים לעדרים שווים על ידי "גרירת" מלבנים של הדיאגרמה (כאשר כל מלבן מייצג 100 פילים) מעמודה אחת לשנייה. (איור 1ג).
- השוואה בין ההשערה לתוצאה שהתקבלה בפועל.



## תגובות מהכיתה

במהלך שנת הלימודים הפעלנו תכנית זו בכיתות ה', אשר נהגו לעסוק בחקר בשילוב מחשב אחת לשבוע. הפעילות היוותה את שיעור הפתיחה לנושא הממוצע בכיתה.

**בשלב ראשון** נתבקשו התלמידים לשער, מה יהיה הממוצע של העדרים (ראה איור ב1). ברוב המקרים היו השערות התלמידים לגבי הממוצע מדויקות או סבירות (בהפרשים של 100 – 200 פילים). במקרים שבהם היו הבדלים בין ההשערה לבין תוצאת הממוצע, נטו התלמידים לתקן את השערתם. וכאן העירה המורה, כי אין צורך לתקן השערות; השערות מעצם הגדרתן אינן אמורות להיות מדויקות. חשוב יותר לבדוק, הטעימה המורה, מהן הסיבות שהובילו את התלמיד להשערות אלה.

בדיון שנערך בסוף הפעילות אכן נשאלו התלמידים, מה העלו בהשערותיהם, וכיצד הגיעו לידי השערות אלה.

להלן כמה מתשובותיהם:

ת1: "באפריקאיים חשתי שפה שלוש מאות. נראה לי במבט ראשון הסיוני. נאם אמרה לי שפה לא הסיוני. נראה לי קצת מגי".

מ: "לפי מה?"

ת1: "הורדתי בראש ונשארו לי חלקים ריקים, אפ חוספתי עוז".

ת2: "ההשערה שלי היתה נכונה. עשיתי קצת כמו פאפ. העברתי בראש מלכניס".

ת3: "בפיליס האפריקאיים חשתי חמש מאות אחר כך שיחקתי עם פה ובאמת יצאו לי חמישה מלכניס בכל עדר וכך מלכני תופס חמש של מאה. ואפ ראיתי שצדקתי בהשערה".

## דף פעילות

1. ציירו דיאגרמה המציגה שישה עדרים אחרים של פילים אפריקניים "משלכם", כך שהממוצע של העדרים החדשים יהיה שווה לממוצע של העדרים המקוריים.

2. הוסיפו (אם הדבר אפשרי) בגיליון הפילים האפריקניים עדר אחד של פילים "משלכם". כעת יהיו לכם שבעה עדרים – ששת העדרים שבמצב המקורי והעדר "שלכם".

מה צריך להיות הגודל של העדר "שלכם", כדי שהממוצע החדש יהיה שווה לממוצע מקורי?

מה צריך להיות הגודל של העדר "שלכם", כדי שהממוצע החדש יגדל ב-100 לעומת הממוצע המקורי?

מה צריך להיות הגודל של העדר "שלכם", כדי שהממוצע החדש יהיה גדול מן הממוצע המקורי?

מה צריך להיות הגודל של העדר "שלכם", כדי שהממוצע החדש יקטן ב-100 לעומת הממוצע המקורי?

### עזרה טכנית לצביעת תאים

השחירו את התאים שברצונכם לצבוע על ידי גרירת העכבר.

צבעו את האזור המושחר על ידי לחיצה על



המשולש שליד דלי הצבע שעל סרגל הכלים. ובחרו בצבע שברצונכם לצבוע.

### עזרה טכנית לניקוי תאים

השחירו את התאים שברצונכם לנקות על ידי גרירת העכבר.

נקו את האיזור המושחר על ידי לחיצה על המשולש



שליד דלי הצבע שעל סרגל הכלים. בחרו באפשרות "ללא מילוי".

אינטואיטיבית של תובנה, ולא ברמה פרוצדורלית – חישובית.

מקובל לחשוב על הצגה גרפית – חזותית כשלב ראשון בהבנתו של המושג ברמה כמותית – מספרית או מופשטת. במקרה שהצגנו ובמקרים רבים אחרים, הגישה החזותית משמשת גם כשלב מכין לקראת הבנה מעמיקה יותר של המושג וגם מאפשרת לתלמידים להתמודד עם שאלות מורכבות, המתייחסות אל השפעת שינוי בנתונים של הממוצע.

פתרון שאלות אלה בדרך כמותית – חישובית אינו נוח וכמעט שאינו אפשרי בגיל זה.

עם זאת ניתן היה להיווכח, כי התלמידים לא הגיעו כ"לוח חלק" לקראת לימוד מושג הממוצע. להלן מספר תשובות של תלמידים לשאלת המורה "מה אומר לנו הממוצע?" בדיון שנערך לסיכום הפעילויות:

ת1: "איפשהו מספר שאם בעדר אחד חמישה פילים, בשני – פיל, בשלישי – שני פילים. מה שיתן לי שהכול יהיה שווה."

ת2: "אם נעביר ממקום למקום הקבוצות יהיו שוות."

ת3: "אם נחבר את כל הפילים ונחלק לשישה עדרים נקבל את הממוצע." (במקרה כזה לא ניתן לדעת, אם התלמידי? ה'א' לתשובה מתוך הפעילות עצמה או על סמך ידע קודם.)

לסיכום, התרשמותנו היתה, כי הפעילות הציגה בפני התלמידים את מושג הממוצע בדרך מוחשית וגם קירבה אותם לתפיסה הכמותית של מושג זה.



**בשלב שני** התלמידים נתבקשו לאמת את ההשערות ששיערו בעזרת המחשב, על-ידי שינוי בפועל של הדיאגרמה (ראה איור ג1). למתבונן מבחוץ ברור היה שהתלמידים נהנים מעצם הפעילות של העברת המלבנים. ככל שהעבירו יותר מלבנים, כן ניכרה בהם יותר השתוקקות סקרנית לקראת התוצאה שתתקבל.

**בשלב האחרון** התלמידים נתבקשו לבצע שינויים בנתונים כדי ליצור עדרים בעלי גודל ממוצע אחר (דף הפעילות מופיעה בעמוד 26). התלמידים נעזרו במחשב, שסיפק להם המחשה חזותית לשינויים הכמותיים שנתבקשו לבצע. כשתלמיד נתבקש להוסיף עדר שביעי לששת העדרים הקיימים, כך שהממוצע יגדל ב- 100, הוא תיאר את דרך עבודתו כך:

"שתיים עשרה משבצות. יוציא ארבע מאתיים פילים. לכל עדר מאה ולאור השביעי יש מאות. יש מאות וזו יש מאות."

בדיון המסכם, התעורר ויכוח סביב האפשרות להוסיף עדר שביעי. הוויכוח התמקד בשאלה, אם הממוצע יכול להיות מספר לא שלם.

המורה הדגישה בפני התלמידים, כי הממוצע יכול להיות מספר שאינו שלם, גם אם מדובר בדבר שאינו ניתן לחלוקה כמו פילים.

בשאלה על הוספת עדר, כך שהממוצע יקטן ב- 100 (פעולה שהיא בלתי אפשרית), היו תלמידים שהציעו "לסלק" 200 פילים. תשובה כזאת מצביעה על התחלת התפיסה הכמותית של מושג הממוצע.

## לסיכום

הפעילות שתיארנו מקשרת בין המושג המתמטי של הממוצע לבין נושא מתוך עולם הטבע. המושג מועבר דרך ייצוג שהוא בעיקרו גרפי – חזותי (דיאגרמת עמודות), ולא כמותי – חישובי (הממוצע כנוסחה). הפעילות שומרת על העיקרון שהתפיסה הראשונית של מושג חייבת להיות ברמה