דו שיח בין מורה לתלמיד וקידום ההבנה המתמטית

תכנית "ארכימדס" - החישוב בשירות החשיבה

לוי רחמני

הקדמה

מאמר זה מהווה המשך למאמר "ניתוח סיפורי חשבון, ככלי לפיתוח החשיבה המתמטית", אשר פורסם גיליון מספר 13, מספר חזק 2000. הדגש במאמר הנוכחי הוא על משמעותו של דו-שיח המתנהל בין מורה ותלמיד במהלך פתרון בעיות מילוליות במתמטיקה, וההשלכות לפיתוח וקידום ההבנה המתמטית הנובעות מדו-שיח זה. בסיס הגישה של, תכנית "ארכימדס", הוא הרעיון כי תפקיד החישוב לשרת את תהליכי החשיבה. המוטיבציה לפיתוח התכנית, מקורה בדאגה עמוקה להבנה המתמטית הבאה לידי ביטוי בפתרון בעיות. קושי בהבנה מתמטית בפתרון בעיות, הנו מצב המהווה אבן נגף בלמידה ובהוראה. הגדרת ההבנה המתמטית מורכבת, ולדעתי, הטיפול בה אינו מוצע במפורש בתכניות הלימודים ובספרי הלימוד. ייתכן ותוצאות מבחני המיצ"ב, משקפות את המגבלה הזו.

תפקיד השיח המתמטי המתנהל בעקבות כל בעיה, לתרום לפיתוח ההבנה המתמטית ויכולת ההבחנה בדומה ובשונה בכל קבוצת בעיות. כל קבוצת בעיות עוסקת בנושא המקשר ביניהן. הנושאים מגוונים ויכולים לעסוק במערך יחסים בין כמויות מוחשיות מעולם התלמידים, כמו, רכישת ספרים, או בקשרים מופשטים יותר, כמו, בעיות מרחק וזמן. בכל קבוצת בעיות, רמת המורכבות עולה מבעיה לבעיה, בעוד רמת החישוב (בעיקר פעולות בשברים), נשארת אחידה.

אופי הצגת הבעיות על-פי גישת "ארכימדס", שונה מאופי הצגת הבעיות המקובלת. בבעיות בגישת ארכימדס, בניגוד לבעיות שבספרי הלימוד, חסרים מדי פעם פרטים רלוונטיים, הנדרשים לצורך פתרונן, ולעתים הן מוצגות כסיטואציות חשבוניות ללא שאלה. דו-שיח בין מורה לתלמיד / תלמידים, מיועד להוביל את הכיתה לגילוי הפרטים החסרים בבעיה, ולהעלאת השאלה המתאימה לסיטואציה המתוארת. ספרי הלימוד, מציגים לתלמידים על-פי-רוב, סיטואציות חשבוניות עם שאלה ובכך, על-פי תפישתי, מגבילים את מעורבות התלמיד. תפקידו של התלמיד על-פי-רוב, מתמצה בהצגת תרגיל המתאים לשאלה. על-פי גישת "ארכימדס",

במהלך השיח המתמטי, מדריך המורה את התלמידים "לקחת סיכון" ולהעלות שאלות על נתון חסר, עובדה שעשויה להגביר את מעורבותם בעת פתרון הבעיה, ולתרום לדיון על נתונים חסרים אלה. רמת ההבנה של התלמידים מתפתחת במהלך השיח הפעיל, וגם אם תהליך זה "גוזל" זמן ממושך יותר מהרגיל, הרי שהן המורה והן התלמידים יוצאים נשכרים.

מבט על הסיטואציות כפי שהן מוצגות בתכנית "ארכימדס"

הסיטואציות בכל נושא, מוצגות כפי שנאמר לעיל, ברמת ההבנה הנדרשת, כשהיא עולה באופן הדרגתי מסיפור לסיפור, תוך שמירה על רמת חישוב אחידה. הדגש מושם על דו-שיח המתנהל בעקבות כל בעיה. בכל סיפור (סיטואציה חשבונית), מוצג מצב או מאורע, כשלעתים חסרים בו פרטים משמעותיים. על התלמידים לזהות מה הם הנתונים החסרים ולחשוב על דרך לחשיפתם. לעתים ניתן לחשוף אותם באמצעות העלאת שאלות ועריכת חישובים. השיח העולה בכל בעיה מכוון להבחנה בין נתונים עיקריים ונתונים משניים, בין נתונים אותם ניתן לחשוף מתוך הנתונים בסיפור, לבין כאלה שלא ניתן לחשוף אותם מתוך הנתונים.

רמת הבנה נוספת, באה לידי ביטוי בדרישה, המתייחסת לקשרים אנלוגיים בין השאלות המוצעות. בין שאלות בודדות לבין קבוצת שאלות ואף קבוצות של שאלות. על התלמידים להתייחס לדומה ולשונה בין השאלות. ההבנה של התלמידים משתקפת ביכולת לקבל החלטה מושכלת הכרוכה בהתייחסות לנתון זה או אחר, להעלות שאלות רלוונטיות להשלמת הנתון החסר, לבחור את התרגיל המתאים לפתרון, ולהיות מודע למשמעות התוצאה, למידת ההיגיון או לחוסר ההיגיון שבה. גישת "ארכימדס", מציגה מגוון בעיות ברמת מורכבות שונה, מבעיות פשוטות, שלצורך פתרונן יש לבצע פעולה חשבונית אחת, ועד לבעיות מורכבות שלצורך פתרונן יש לבצע מספר רב יותר של פעולות חשבוניות.

דוגמאות לסיטואציות חשבוניות ולשיח בעקבותיהן

כל הסיטואציות המתוארות הוצגו לתלמידים. להלן תיאור חלקים מהשיח שהתפתח. חשוב לציין, שהשיח המתואר אותנטי, ומוצגות בו אמירות של תלמידים.

קבוצה א - הכנסה חודשית

סיפור 1

לאהוד יש הכנסה חודשית של 8,000 ₪.

הוא מוציא בחודש 5,500 ₪.

איזו שאלה ניתן לשאול?

דוגמה לשאלה שתלמיד יכול לשאול: *כמה כסף נשאר לו בסוף החודש?*

בשאלה זו, מתואר המצב ההתחלתי (ההכנסה החודשית), מתואר השינוי (ההוצאה), והנתון החסר מתייחס למצב הסופי (הסכום שנותר).

סיפור 2

לגלעד יש הכנסה חודשית של 7,500 ₪. הוא חוסך בחודש 3,000 ₪.

איזו שאלה ניתן לשאול?

דוגמה לשאלה שתלמיד שאל: *כמה כסף הוא "בזבז"?*

בשאלה זו, מתואר המצב ההתחלתי (ההכנסה החודשית), מתואר המצב הסופי (החיסכון, הסכום שנותר), והנתון החסר מתייחס לשינוי (ההוצאות).

בעת השיח, המורה מכוון לבחינת הקשר בין שני הסיפורים.

דוגמה לקשרים אליהם מתייחסים התלמידים:

- הסיפור השני הוא כאילו הפוך מהראשון.

- מה שנאמר בסיפור הראשון לא נאמר בסיפור השני ולהפך.

- בסיפור הראשון מתארים הכנסה והוצאות ובסיפור השני מתארים הכנסה וחיסכון.

סיפור 3

לזיו יש הכנסה חודשית קבועה. הוא מוציא בחודש 3,000 ₪ וחוסך 2,000 ₪.

אילו שאלות ניתן לשאול?

בסיפור זה מתוארים השינוי (ההוצאה החודשית) והמצב הסופי (החיסכון), והנתון החסר מתייחס למצב ההתחלתי (ההכנסה). כפי שניתן ללמוד משאלות התלמידים, אין הם רואים את הקשר בין התבנית המתייחסת למצב התחלתי, לשינוי, ולמצב הסופי. בשאלה זו, המגמה לחשוף את ההכנסה של זיו. התלמידים עשויים להעלות שאלות נוספות ואף להשיב עליהן, עם זאת, המורה יכול במהלך השיח, לכוון לשאלה על המצב ההתחלתי.

דוגמאות לשאלות שהעלו התלמידים:

- *בכמה "בזבז" יותר?* (כוונת התלמיד, הקשר בין הסכום שהוציא זיו לבין הסכום אותו חסך).

בהמשך אותו שיח, מעודד המורה להתייחס לשאלה הקשורה לתבנית אליה התייחסו הסיטואציות הקודמות, והתלמיד מעלה את השאלה:

- *לא כתוב כמה זיו קיבל. מהי ההכנסה החודשית שלו?*

שאלות מגשרות

מורה - בהשוואה לשני הסיפורים הקודמים, מה אפשר לומר על הפעולה אותה ביצעתם?

תלמידה - *בשני הסיפורים הראשונים עשיתי חיסור ובשלישי עשיתי חיבור.*

מורה - איזה נתון היה חסר בסיפור השלישי?

תלמיד - *הפרט על ההכנסה היה חסר בסיפור. במקומו הייתה המילה "קבועה".*

מורה - כדי לחשב את ההכנסה, איזו פעולה ביצעתם?

קבוצה ב – מרחקים

סיפור 1

מונית נסעה בין שתי ערים. המרחק ביניהן הוא 350 ק"מ.

לאחר 150 ק"מ, הנהג עשה הפסקה.
מה לא ידוע? איזו שאלה ניתן לשאול?

דוגמה לשאלה של תלמידה - *איזה מרחק נסע אחרי ההפסקה? (200 ק"מ).*

בסיטואציה זו מתואר המרחק בין שתי הערים, מתואר חלק מהמרחק, אותו עברה המונית (עד ההפסקה) וחסר הנתון המתייחס לחלק מהמרחק שנותר עד היעד.

סיפור 2

גם מונית אחרת נסעה מעיר אחת לעיר אחרת.

המרחק ביניהן הוא 300 ק"מ. לאחר שהנהג עשה הפסקה בנהיגה, נותרו עוד 120 ק"מ עד היעד אליו היה על המונית להגיע. מה לא ידוע?

איזו שאלה ניתן לשאול?

דוגמה לשאלה של תלמיד - *איזה מרחק נסע לפני ההפסקה?*

בסיטואציה זו מתואר המרחק בין שתי הערים, מתואר חלק מהמרחק, שנותר עד היעד וחסר הנתון המתייחס לחלק מהמרחק שהמונית עברה עד ההפסקה.

סיפור 3

גם מונית שלישית נסעה מעיר אחת לעיר אחרת.
אחרי שעברה 280 ק"מ, נותרו לה עוד 120 ק"מ עד היעד אליו היה עליה להגיע.

בסיטואציה זו מתואר חלק מהמרחק, אותו עברה המונית (עד ההפסקה), וחלק המרחק שנותר למונית לעבור עד היעד המבוקש. חסר הנתון המתייחס למרחק בין שתי הערים.

דוגמה לשיח שיכול להתפתח בין מורה לתלמיד:

מורה - איזו שאלה מתבקשת בסיפור זה?

תלמידה - *מה המרחק בין שתי הערים?*

(400 ק"מ).

שאלות מגשרות

כעת, המורה מעודד את התלמידים להשוות בין שלוש הסיטואציות הנתונות בקבוצה ב.

דוגמה לשיח שיכול להתפתח בין המורה לתלמיד:

מורה - במה דומים שלושה הסיפורים שהוצגו?

תלמיד - *בכולם מסופר על מוניות ועל מרחקים.*

מורה - ובמה הם שונים?

תלמיד - *בסיפור הראשון ידענו מה המרחק, ידענו כמה ק"מ עברה המונית עד ההפסקה, והשאלה הייתה על המרחק שנותר.*

תלמידה - *בסיפור השני ידענו מה המרחק, ידענו כמה ק"מ נותרו, והשאלה הייתה על המרחק שהמונית עברה עד ההפסקה.*

תלמידה - *בסיפור השלישי, ידענו מה המרחק שהמונית עברה עד ההפסקה, ידענו מה המרחק שעברה המונית מההפסקה עד העיר אליה הייתה צריכה להגיע. השאלה הייתה על המרחק בין שתי הערים.*

בהמשך השיח, המורה עודד את התלמידים להתבונן בשתי קבוצות הסיפורים ולחפש את הדומה ביניהן.

מורה - האם ניתן למצוא דמיון בין שלושת הסיפורים האלה ושלושת הסיפורים הקודמים?

תלמיד - *בשתי הקבוצות, כדי לענות על שתיים מהשאלות, היה עליי לבצע פעולת חיסור, וכדי לענות על השאלה השלישית בכל קבוצה, ביצעתי פעולת חיבור.*

מורה - שאלת אתגר! מה המשותף בין שאלות החיסור על "כסף", לבין שאלות על "מרחק"?

השאלה הזו והשאלות שתוארו לעיל, מטרתן פיתוח כושר מטה-קוגניטיבי, באמצעות הבחנה בין מבני השאלות, הנוגעים לנתונים בכל סיפור, למידע החסר בכל אחד מהן, ולמבט המתייחס לדומה במבנה שתי הקבוצות. זאת למרות שקבוצה אחת עוסקת בחישובי הכנסות והוצאות והשנייה בחישובי מרחקים.

סיכום

במאמר זה, הודגמו באמצעות שתי קבוצות של בעיות (מתוך מאגר עשיר של בעיות), מאפייני הבעיות על-פי גישת "ארכימדס". הבעיות מוצגות כסיטואציות חשבוניות ועל התלמיד לקרוא את הבעיה, להבינה, ולהיות מעורב ברמת העלאת השאלות, שכן השאלה אינה מצוינת באופן מפורש. הבעיות עוסקות בפעילויות חישוביות פשוטות (חיסור וחיבור) ובמספרים "נוחים", ופתרונן נעשה באמצעות פעולה אחת (בעיות פשוטות). המטרה העיקרית בשאלות מסוג זה היא לכוון את האנרגיה לפיתוח החשיבה של התלמידים. תפקיד המורה על-פי גישה זו: לעודד את התלמידים באמצעות השיח המתמטי להתבונן בבעיות, להשוות בין הבעיות בכל קבוצה, תוך שהוא מדגיש את ההתבוננות בנתונים ובמידע החסר, והקשר לפעולה החשבונית הנדרשת. במבט רחב יותר. בדרך זו המורה מעודד את ההבחנה בדמיון מבני בין שתי קבוצות של בעיות, על אף היותן עוסקות בנושאים שונים.

מקורות

רחמני, ל' (2007). ניתוח סיפורי חשבון, ככלי לפיתוח החשיבה המתמטית. *מספר חזק 2000*, גיליון מס' 13. 24-27.

קישור שבו אפשר לראות את תכנית ארכימדס מופעלת בכיתות:
http://www.youtube.com/user/LeviRahmani/videos

פרופ' לוי רחמני
פרופ' חבר קליני באוניברסיטת תל-אביב. בעבר לימד קורסים שונים בבית ספר להפרעות בתקשורת ובמכללת סמינר הקיבוצים.
עבד כפסיכולוג בכיר בבית חולים "בילינסון" וכפסיכולוג ראשי ב"לוינשטיין".
פרסם 4 ספרים, ומתכנן תוכנות מחשב.