איליה סיניצקי
ונצה
מובשוביץ-הדר

האם אפשר בלי שברים פשוטים? – לא, אבל ... חלק ב: הצעה להקדמת ההוראה של המספר העשרוני לפני השבר הפשוט

העיקרון היסודי שעליו בנוי המבנה העשורי כולו הוא הרעיון של הקבצת עשרה עצמים זהים לעצם אחד חדש, וגם להיפך – פריטה של עצם אחד לעשרה עצמים זהים. את הרעיון הזה התלמידים מכירים כבר בכיתות א-ב, כאשר מקבצים עשר אחדות לעשרת, או עשר עשרות למאה, וגם כאשר פורטים מאה לעשר עשרות ועשרת לעשר אחדות. בכיתות ג-ד התלמידים נחשפים, בדרך כלל, לשבר הפשוט ולמבנה העשורי במספרים טבעיים גדולים. בהמשך, בכיתות ה-ו הניסיון הבסיסי הזה מהווה תשתית להתקדמות לקראת העשיריות כעשרה עצמים המתקבלים מחלוקת היחידה לעשרה חלקים שווים. במאמר קודם (מובשוביץ-הדר וסיניצקי, 2013) הצגנו את הרציונל להצעה ללמד את המספר העשרוני כבר החל מכיתה ג, עוד לפני הוראת השבר הפשוט. הרציונל נועד לבסס את הטענה ששינוי כזה עשוי לתרום לשיפור ההבנה של המספר הרציונלי. במאמר זה נפרט את ההצעה עצמה.

כיתות א-ב

בכיתה א, לאחר היכרות עם העשרת הראשונה, המעבר אל העשרת השנייה מלווה בהקבצה של עשר אחדות לעשרת אחת. מעבר זה מפתח את היכולת לראות את העשרת בהיבט דואלי - כעצם יחיד, מחד, וכאוסף של עשר אחדות, מאידך. באופן יותר פורמלי, אפשר לומר שמקנים לתלמידים את ההבחנה בין עשר פעמים אחת לבין פעם אחת עשר, ואת השוויון ביניהם: $10\times1=1\times10$.

בנוסף לכך לפי תכנית הלימודים של כיתה א (משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006) בעקבות תהליך החלוקה של שלם לשני חלקים שווים, מכירים התלמידים את 'חצי' (המוכר להם, מן הסתם, כחלק מהשפה הטבעית). ההיכרות הזאת כוללת בין היתר גם את ההכרה שהשלם יכול להיות קבוצה של עצמים, שחלוקתו לשני חצאים משמעותה חלוקה לשני חלקים שווים ושסכום שני החצאים הוא השלם. באופן דומה תתבצע בעתיד לפי הצעתנו (ר' להלן בכיתה ב) ההיכרות עם 'עשירית', בעקבות תהליך החלוקה

של השלם לעשרה חלקים שווים.

כיתה ב

בכיתה ב מתבצעת לפי תכנית הלימודים (שם) היכרות עם 'רבע' בעקבות תהליך החלוקה של שלם לארבעה חלקים שווים. מעתה התלמיד מכיר את היחידה הן כשני חצאים, והן כארבעה רבעים.

בנוסף לכך, מצפים מהתלמידים לגלות חופש בביצוע פעולות חיבור וחיסור בתחום ה- 100, המבוססות על המרות מסוג הקבצה לעשרות ופריטת עשרת (שם). בהמשך, ההיכרות עם המספרים מתקדמת לתחום ה- 1000, וכללי ההקבצה של עשרות למאות והפריטה של מאה לעשרות מקבילים לכללי ההקבצה של אחדות לעשרות ופריטת העשרת לאחדות. מעתה עשרות אפשר לא רק לפרק לאחדות, אלא גם לְאַחֵד למאות. ומאה אפשר לחלק לעשרה חלקים שווים שכל אחד מהם הוא 10.

עם רכישת ההבנות האלו, התלמיד מוכן להיכרות עם 'עשירית' בעקבות חלוקה של היחידה לעשרה חלקים שווים, ואנו מציעים לא לדחות זאת.

לגבי פעולות החיבור והחיסור, על-פי התכנית הקיימת התלמיד פועל עם החצאים ועם הרבעים כאילו הם חפצים, ועוסק בחיבור ובחיסור של חצאים ושל רבעים בהקבלה מלאה לפעולות במספרים הטבעיים בעלי כינויים זהים. למשל, בהקבלה ל- 'שני תפוחים ועוד תפוח הם שלושה תפוחים', מקבלים ש- 'רבע ועוד שני רבעים הם שלושה רבעים'. באופן דומה, אנו מציעים להביא כבר כאן את ההקבלה של: 'שלוש בננות ועוד שתי בננות הן חמש בננות' ל- 'שלוש עשיריות ועוד שתי עשיריות הן חמש עשיריות'. כמו כן, בהקבלה לשבע סוכריות פחות שלוש סוכריות שהן ארבע סוכריות, שבע עשיריות פחות שלוש עשיריות הן ארבע עשיריות.

גם אודות תהליך הפריטה נתקדם לגבי העשיריות באופן מקביל לטיפול בפריטת השלם לחצאים ולרבעים. כשמפחיתים רבע אחד משלם שהוא ארבעה רבעים, נשארים שלושה רבעים. באופן דומה, כשמפחיתים עשירית אחת משלם, שהוא עשר עשיריות, נשארות תשע עשיריות. כדי להקנות הבנה משמעותית של השלם כמורכב מעשר עשיריות, אפשר להציע גם שאלות כגון: כמה עשיריות חסרות להשלמת שש עשיריות לשלם? גם כאן ההיכרות היא ברמה של שימוש בשפה של חיי יום-יום וללא סימול כלשהו של עשירית.

חשוב לציין כי התכנית מתירה במפורש שהכול יתבצע במילים וללא שימוש בסמלים: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ (ספרי הלימוד לא מקפידים על כך, וחבל). אנו מצדדים בכך שבשלב זה לא יוכנס הסמל $\frac{1}{10}$ לשימוש.

תכנית הלימודים לכיתה ב (שם) כוללת גם כפל וחילוק בתחום ה- 100, כולל פרשנות של חצי ורבע כחלק של כמות (בשונה מחלק של השלם). למשל, בתשובה לשאלה: "אם מחלקים 20 ל- 4 חלקים שווים, כמה יש בכל חלק?" התלמידים אמורים להשיב: 5, ולנמק כך: "4 פעמים 5 הן 20, או 5+5+5+5=20". הם לומדים לרשום זאת כך: 20:4=5 ולהסיק מכאן כי 5 הוא רבע של 20. באופן דומה, הואיל ו- 4 פעמים 3 הן 12, הרי ש- 12:4=3. על כן 3 הוא רבע של 12.

במקביל לכך, יכולה להתלוות היכרות עם עשירית כחלק מכמות. במיוחד נעמיד שתי עובדות מוכרות באור חדש: 1 הוא עשירית של 10 ו- 10 הוא עשירית של 100. נוסף על כך נציג גם אפשרויות, כגון: 5 הוא עשירית של 50 (כי 50 הוא עשר פעמים 5 או 50:10=5). בין היתר, אנו מקנים כאן תשתית ראשונית לקראת לימוד של

צמצום של שברים פשוטים בעתיד (חמישה חלקי חמישים ועשירית הם אותו מספר).

לטוענים כי התוספות המוצעות ידרשו הקצאה נוספת של זמן הוראה, נציע להעביר לכיתות גבוהות יותר חלקים מהתכנית הקיימת, הנראים לנו אינטואיטיביים פחות, ולכן מתבקשים פחות ברצף הדידקטי, כגון: תכונות האפס בכפל וחילוק, שיקוף או הזזה, הרחבת תחום המספרים לשליליים (שם) ועוד.

כיתה ג

[בכיתה ג, תכנית הלימודים](#) מתמקדת בתחום המספרים השלמים, במבנה העשורי בתחום הרבבה ובפעולות החשבון בתחום זה, לרבות כפל וחילוק ב- 10, וסימני התחלקות הנשענים על המאפיינים המיוחדים של המבנה העשורי ([שם](#)). כל אלה מהווים תשתית מצוינת להכנסת המאיות והאלפיות, בהמשך להכנסת העשיריות בכיתה ב. כמו כן אמורה להתבצע בכיתה ג היכרות עם שברי היחידה:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},\frac{1}{9},\frac{1}{10},\frac{1}{12},\frac{1}{60},\frac{1}{100}$$

כולל כתיבתם בצורה זו, וגם עיסוק בשברים אלה כמבטאים חלק של כמות (שם). אנו מציעים להסתפק בעניין זה בשברים חצי, שליש, רבע וחמישית ולהימנע מכתיבתם כשבר פשוט. את הלימוד השיטתי של שברי היחידה האחרים (פרט לעשירית ולמאית, כפי שיוסבר להלן) ואת אופן הכתיבה האופייני לשבר פשוט נדחה לכיתה ה. לעומת זאת, בעקבות ההיכרות, שנעשתה בכיתה ב עם העשירית כחלק מהשלם, בכיתה ג יכירו התלמידים, את המאית ואת האלפית כחלקים של השלם.

נדון גם בהשוואה בין שברי היחידה הבסיסיים שהיכרנו כבר. חצי גדול משליש ושליש גדול מרבע, כי ככל שמחלקים את השלם ליותר חלקים, כל חלק יהיה קטן יותר. מאותה סיבה רבע גדול מחמישית, חמישית גדולה מעשירית וכמובן עשירית גדולה ממאית ומאית גדולה מאלפית.

באשר לכתיבה, התלמידים ילמדו לכתוב עשירית, מאית ואלפית לא כשבר פשוט, אלא כשבר עשרוני[1], כלומר, כך: 0.1, 0.01, 0.001. כתיבה זו באה בעקבות הסימול של 1 כיחידה וגם בהתאמה לערך הספרה 1 במספרים 10, 100, 1000 ולתפקידו של 0 כשומר מקום. 0.1 ל- נקרא: "עשירית" ולא "אפס-נקודה-אחת" בדיוק מאותה סיבה שאת המספר 10 איננו קוראים "אחת-אפס", אלא "עשר". באופן דומה 0.01 הוא מאית (לא אפס-נקודה-אפס-אחת) ו-0.001 הוא אלפית (לא אפס-נקודה-אפס-אפס-אחת). כעת נוכל לחזור להשוואה שנעשתה כבר באופן אינטואיטיבי ולרשום: 1>0.1>0.01>0.001. הקריאה, כאמור, היא: אלפית קטנה ממאית שקטנה מעשירית שקטנה מהיחידה או להיפך: היחידה גדולה מעשירית וכן הלאה.

התהליך המוצע מוביל להרחבת המבנה העשורי בהקבלה לקשר שהתלמידים מכירים בכיתה זו בין אחת לעשר, בין עשר למאה, בין מאה לאלף ובין אלף לעשרת אלפים. הקבלה זו מבטאת שימור היחס בין כמויות: 1 הוא עשירית של 10, 10 הוא עשירית של 100, 100 הוא עשירית של 1000 וכך הלאה. כך הולכת ונבנית האינטואיציה בנוגע ל"אבי העורקים" של המבנה העשורי של המספרים השלמים (הלא-שליליים). הרחבת המבנה העשורי לתחום שבין 0 ל-1, כפי שהצענו לעיל, נעשית בהקבלה מלאה לכך: מהעובדה שיש עשר עשיריות ביחידה, עשר מאיות

---

[1] במאמר זה נשתמש במונח *שבר פשוט* להצגה מסוג: $\frac{a}{b}$, כאשר המונה והמכנה הם מספרים שלמים חיוביים (טבעיים), ונשתמש במונח *שבר עשרוני* להצגה מסוג $0.a_1a_2a_3$ כאשר a_i $(i=1,2,3)$ מסמל את אחת מעשר הספרות, ומספר הספרות אחרי הנקודה יכול להיות סופי או אין-סופי.

בעשירית ועשר אלפיות במאית, יובן כי 0.1 היא עשירית של 1, 0.01 היא עשירית של 0.1, 0.001 היא עשירית של 0.01.

העיסוק הקיים בתכנית הלימודים במידות ובמדידות של אורך, משקל וכסף (שם) הוא הזדמנות טבעית מצוינת להמחשה של המושגים עשירית, מאית ואלפית.

כדי לפנות זמן להמשך העיסוק בשבר העשרוני, אנו מציעים גם כאן לשקול דחייה לכיתות יותר גבוהות של נושאים אחדים המופיעים בתכנית של כיתה ג (כגון: הכנסת המספרים השליליים, העיסוק בחילוק בתחום המאה עם שארית, טרנספורמציה של סיבוב). זאת בנוסף להגבלת ההיכרות עם שברי היחידה כנזכר לעיל.

המשך העיסוק בשבר העשרוני בכיתה ג יתמקד במעבר מעשירית אחת לעשיריות רבות, בכתיבתן, בקריאתן, בביצוע פעולות חיבור וחיסור ביניהן ובביצוע פעולת הכפל של עשיריות בשלם. כל אלה ייעשו בהקבלה לפעולות החשבון במספרים הטבעיים בין 1 ל- 10, כפי שנלמדו בכיתה א. נפרט: כבר בכיתה ב עסקנו, ללא כתיבה, בחיבור ובחיסור של עשיריות כעצמים. כעת נרשום: 0.1+0.1=0.2. ההמחשה היא בחלקי היחידה: נרשום 0.2 ונקרא שתי עשיריות (ולא אפס-נקודה-שתיים!). באופן דומה שתי עשיריות ועוד עשירית הן שלוש עשיריות, 0.1+0.2=0.3 וכן הלאה עד להיכרות מלאה עם תשע עשיריות, 0.9, לרבות חיבור וחיסור של עשיריות בתחום היחידה. הנושא הזה כולל את פירוק היחידה לסכומים של עשיריות, כגון: 0.3+0.7=1 וגם 1-0.3=0.7. נחזור ונדגיש שההתייחסות לעשירית, לשתי עשיריות..., לתשע עשיריות היא התייחסות כאל חלקי היחידה ותכלול המחשות כמקובל (אבל לא כמנת חילוק של שני מספרים שלמים חיוביים, כלומר, למשל, לא נציג את 0.3 כ- 3 לחלק ל- 10).

התייחסות נוספת לעשיריות תהיה ככפל של עשירית בשלם בהקבלה לכך שבכיתות א-ב טופל הכפל בשלם כריבוי של החיבור בשלמים (חיבור חוזר של מחוברים שווים). למשל, בהקבלה לשלוש פעמים חמש, או 5 כפול שלוש שלמדנו לרשום כך: 5×3 = 15 נרשום כעת: 0.1×3 = 0.3 ונאמר: שלוש פעמים עשירית או עשירית כפול שלוש[2]. כך נעשה עד 10 פעמים עשירית 0.1×10 = 1. (עדיין לא 12 פעמים עשירית או כל מספר אחר הגדול מ- 10. שלב זה נדחה לכיתה ד).

לבסוף נזהה את המספר חמש עשיריות, 0.5, עם חצי (כאמור, ללא כתיבה כך: $(\frac{1}{2}$ באופן הבא: נצא מהשאלה כמה זה חמש עשיריות ועוד חמש עשיריות, 0.5 + 0.5? תשובה: 10 עשיריות, כלומר 1. המסקנה? – 0.5 (חמש עשיריות) הוא אחד משני חלקים שווים של 1, לכן 0.5 הוא חצי (של 1). בכיתות שבהן הוצג ציר המספרים בכיתות א-ב אפשר בשלב זה להוסיף סימון של 0.5 על ציר המספרים באמצע בין 0 ל- 1.

כיתה ד

בכיתה ד השינוי שאנו מציעים משמעותי יותר. כל העיסוק בשבר הפשוט התופס חלק ניכר מהתכנית בכיתה ד **יידחה** לכיתות ה-ו. במקומו

[2] החלטנו לרשום באופן שיטתי $c:b=a$ <=> $a×b=c$ כך ש- b הוא הכופל (בכפל) והמחלק בחילוק. את החילוק קוראים: c לחלק ל-b שווה a ואת הכפל קוראים: a כפול b שווה c או b פעמים a הן c (דרך אגב, בהקבלה לאמירה בחילוק: "c לחלק ל-b", עדיף היה לומר על הכפל: "a לכפול ב-b" במקום האמירה המקובלת: "a כפול b", אבל זה לא מקובל כלל, ונשאיר זאת רק כראוי לציון.) ההבחנה בין כופל לנכפל חשובה רק בגלל הקשר לחילוק. בחילוק ההבחנה בין מחולק למחלק היא חיונית. בכפל, בגלל החילופיות שלו, אין חשיבות להבחנה זו. כל עוד עוסקים בכפל בשלם והכפל משמעותו ריבוי החיבור, יש בהבחנה הזאת תוספת להבנת הכפל. היות ועל הכפל חל חוק החילוף אפשר מהר מאוד לטפל בשני הגורמים כשווי מעמד ולדבר על מכפלה של שני גורמים. ראוי לשים לב שעם המעבר לאלגברה כותבים את ה"כופל" בצד שמאל למשל $2b$ פירושו פעמיים b.

נרחיב את ההיכרות שעשינו בכיתה ג עם העשיריות, להיכרות עם המאיות ועם האלפיות ולביצוע חלק ניכר מפעולות החשבון ביניהן, הכול בהקבלה המתבקשת ללימוד על המספרים השלמים מצד אחד, וללימוד על העשיריות מצד אחר. נפרט:

הנושא הראשון בכיתה ד יהיה **חיבור וחיסור של עשיריות** שסכומן עולה על 10 עשיריות, כגון: 5 עשיריות ועוד 6 עשיריות הן 11 עשיריות. זאת נעשה בהקבלה לחשבון של כיתה א על-פיו:

11 = 5+6. בהסתמך על הידיעה ש- 10 עשיריות הן 1, כלומר, על-ידי המרה של 10 עשיריות לשלם, נקרא לסכום אחת ועשירית (או: שלם ועשירית) ונרשום: 1.1 = 0.5+0.6. (נחזור ונדגיש שהסכום *לא* ייקרא "אחת-נקודה-אחת".) כמו כן נחזור על המושג עשירית על-ידי זיהוי של 10 כעשירית של 100, 100 כעשירית של 1,000 וכך הלאה.

מכאן הדרך פתוחה לקריאה ולכתיבה של מספרים לא-שלמים בין 1 ל- 10 ובהמשך גם עד 100, כגון: 4.3 ("ארבע ושלוש עשיריות" ולא "ארבע-נקודה-שלוש"), 12.2 ("שתים-עשרה ושתי עשיריות"), 45.9 ("ארבעים וחמש ותשע עשיריות" ולא "ארבעים וחמש נקודה תשע", אף לא "ארבע-חמש-נקודה-תשע" וכדומה). כמו כן מתבקש שימוש במספרים כאלה לציון הטמפרטורה של גוף האדם הבריא - 36.8 ולמצב הידוע בשם "חום גבוה".

להשלמת הנושא נטפל בחיבור ובחיסור של מספרים כאלה, במיוחד כאשר סכומם הוא מספר שלם, למשל: 41.7+0.3=42.0

54.2+3.8= 58.0

.26.4+5.6=32.0

בהזדמנות זאת נעשה את המעבר מזיהוי של 10 עשיריות כ- 1, לזיהוי של 20 עשיריות כ- 2 שלמים וכולי, לרבות 100 פעמים עשירית = 10, ונרשום:

0.1×10 = 1; 0.1×20 = 2; …; 0.1×100 = 10

כעת, לאור ההבנה ש- 2 הן 20 עשיריות, נזהה את הרישום 2.0 (2 ואפס עשיריות) עם המספר השלם 2, וכך בהכללה בנוגע לכל השלמים.

הנושא השני יהיה **היכרות עם המאיות** כחיבור חוזר של מאית, כתיבה וקריאה של מאיות בין מאית אחת (0.01) ל- 100 מאיות (1.00), לרבות מכפלה של מאית במספר שלם (בין 1 ל- 100), פעולות חיבור וחיסור בין מאיות והמרה של מאיות לעשיריות ולשלמים, והכול בהקבלה לטיפול בעשיריות הנזכר לעיל. במיוחד נציין שוב שני מעברים:

(א) את המעבר מזיהוי של 100 מאיות כ- 1, לזיהוי של 200 מאיות כ- 2 שלמים וכולי (לרבות 1,000 מאיות=10).

0.01×100=1; 0.01×200=2; …; 0.01×1000=10

תוך הכרה בכך שלמשל - 37.00 שווה ל- 37 וכדומה;

(ב) את המעבר מזיהוי של 10 מאיות כעשירית, לזיהוי של 20 מאיות כ- 2 עשיריות וכולי.

0.01×10=0.1; 0.01×20=0.2; …; 0.01×100=1

תוך הכרה בכך שלמשל - 37.10 שווה ל- 37.1 וכדומה.

ההרחבה כאן, בהשוואה להיכרות עם העשיריות, היא ליחסים שבין עשיריות למאיות ולא רק בין מאיות לשלם. נעמוד, למשל, על כך ש- 32 מאיות (שהן כמובן 30 מאיות ועוד 2 מאיות) הן בעצם 3 עשיריות ו- 2 מאיות:

0.32=0.30+0.02=0.3+0.02

חשוב מאוד לשלב בהדרגה בהוראה את ההיכרות עם מקומן של העשיריות והמאיות **על**

ציר המספרים. לשם כך אנו מציעים להשתמש כבר מראשית השנה בכיתה ד בשני מכשירי-עזר שיסייעו לבנות את המושגים המנטליים. מכשיר עזר אחד לשימוש כיתתי. זהו סרגל באורך של קצת יותר מ- 100 דצימטר (10 מטרים !) לתלייה מסביב לשלושה קירות בכיתה בגובה שהוא בהישג יד לתלמידים. על הסרגל יסומנו מראש המספרים השלמים מ- 0 בקצה השמאלי עד 100 בקצה הימני, במרווחים של דצימטר (במילים אחרות, היחידה בסרגל זה היא הדצימטר). במהלך הלמידה של הנושא הנזכר לעיל נתמקד בדצימטר השמאלי ביותר ונסמן עליו בהתאם להתקדמות בהוראה את המספרים עשירית ומאית: 0.1, 0.01. מכשיר זה איננו אלא מודל של ציר המספרים. מכשיר עזר שני, לשימוש אישי, יהיה סרגל מחומר עמיד שיבנה כל ילד לעצמו. סרגל זה ייצג את המספרים בין 0 ל- 10 באותו קנה מידה בדיוק שלפיו מסורטט הסרגל התלוי בכיתה (!), כלומר, אורכו של הסרגל האישי יהיה מטר אחד.

הנחת היסוד היא שהתלמידים כבר מכירים את ציר המספרים (מכיתות א-ג) ואת מיקומם של השלמים החיוביים עליו בקני-מידה שונים. הם מסוגלים, למשל, לסמן בקירוב את מקומו של המספר 12 על ציר מספרים שהשנתות עליו הן יחידות, וגם על ציר מספרים שהשנתות עליו הן רק עשרות שלמות (10, 20 וכולי) ואין עליו חלוקה על-ידי שנתות בין 10 ל- 20. כמו כן בכיתה ג כבר סימנו התלמידים עשיריות בין 0 ל- 1, 0.5 כחצי, 0.25 כרבע על ציר המספרים.

חשוב במיוחד לציין כי על המכשיר הכיתתי אפשר יהיה להצביע על מקומו של כל מספר בין 0 ל- 100 בדיוק של עד שתי ספרות אחרי הנקודה (למשל: 47.32) ולראות בעין את יחס הסדר ביניהם. שני מכשירי העזר ישמשו, בין היתר, גם להמחשה של חיבור וחיסור של עשיריות ומאיות והמרות ביניהן (למשל, להמחשה ש- 50 מאיות הן חצי, סימון של 50 מאיות 0.50 על ציר המספרים מתחת ל- 0.5, להדגשת השוויון ביניהן והשוויון לחצי). תוך כדי שימוש בשני כלי העזר יתברר, למשל, כי הנקודות על ציר המספרים המתאימות למספרים 0.10 ו- 0.1 מתלכדות, דבר שימחיש באופן חזותי את השוויון: 0.1=0.10, כלומר, 10 מאיות הן עשירית אחת[3]. כמו כן, בהקבלה להכרה שבמספר 37 יש 3 עשרות, יעמדו התלמידים על כך שבמספר 1.2 (אחת ושתי עשיריות) יש 12 עשיריות (10 עשיריות ועוד 2 עשיריות) וכדומה, לרבות יישומים למידות אורך שונות.

הנושא השלישי הוא **האלפיות**. הן קשות להמחשה, אבל יש להניח שבשלב זה, אחרי שהתלמידים כבר העמיקו לעסוק בעשיריות, במאיות ובהמרותיהן ההדדיות, הם מוכנים לעסוק באלפיות בהקבלה לכך.

בכל שלב, כאמור, נשלב קריאה וכתיבה של מספרים עשרוניים שיש להם חלק שלם, והתבוננות בהם לאור המבנה העשורי; למשל, 2.1 הוא שני שלמים ועשירית, או 21 עשיריות, או אפילו 210 מאיות, 2100 אלפיות. כמובן גם בכיוון ההפוך ננהג באופן דומה: 35 עשיריות הן 30 עשיריות ועוד 5 עשיריות, שהן 3 שלמים וחמש עשיריות, כלומר, 3.5.

תוך כדי העיסוק בשלושת הנושאים נשלים את ההיכרות עם השבר העשרוני בקריאת מספרים שהתלמידים נתקלים בהם מחוץ לבית הספר – מחירים בחנויות, כמות דלק על צג המשאבה ועוד, וכמובן ביישומים ליחידות אורך (1 ק"מ, 1 מטר, 1 דצימטר, 1 ס"מ, 1 מ"מ), משקל

[3] השוויון ביו עשירית ל- 10 מאיות הוא הקדמה לצמצום ולהרחבה של שברי-יחידה, שמכניהם הם חזקות של עשר בגורם הרחבה/צמצום שהוא 10 או 100 (זאת, כמובן, בלשון שאיננה לשון התלמידים בשלב זה).

(1 ק"ג, 1 גרם) וכסף (שקל, אגורה), שחלקם כבר מוכרים מכיתה ג. במסגרת זו נדגיש את היחסים ביניהם בלשון: עשירית של, מאית של, אלפית של ועוד. כך נגדיל את הגמישות בהמרות דו-כיווניות בין עשיריות למאיות ולאלפיות, ואת השליטה בפעולות החיבור והחיסור ביניהן, בהקבלה לחיבור ולחיסור במספרים השלמים.

הפיתוח כולו נעשה, כאמור, תוך הישענות על הידע שהתלמידים כבר רכשו במספרים השלמים, וכך מצד אחד אנו חושפים אותם לשברים, ומצד אחר אנו מבצעים באמצעותם חזרה על הפעולות בשלמים, חיזוקן וגם העמקה ברעיונות של המבנה העשורי.

כאן המקום לחזור ולהדגיש כי הלמידה בכיתה ד של המספרים העשרוניים קשורה קשר הדוק ללמידה של המספרים השלמים בפרט, ולמבנה העשורי בכלל. במיוחד לאור הכנסת הנקודה העשרונית לשימוש וההיכרות עם העשיריות, המאיות והאלפיות, הנקודה העשרונית הופכת לחלק מכתיבת מספרים לפי המבנה העשורי.

היישומים הנזכרים לעיל מקרבים את העשיריות, את המאיות ואת האלפיות אל התלמידים, בהיותם מוחשיים ומוכרים לפחות במידת מה.

המשך כיתה ד וכיתה ה

בהמשך כיתה ד ובכיתה ה, לפני העיסוק בשבר הפשוט, שיידחה כאמור לכיתות ה-ו, ואחרי שנבנה כראוי הידע על העשיריות, המאיות והאלפיות והיחסים ההדדיים ביניהן, יתבצע הטיפול בנושאים הבאים:

- *השוואה בין שני שברים עשרוניים*

  תחילה השוואה ברמה האלמנטרית ביותר של עשיריות עם עשיריות, למשל: 0.2<0.3; מאיות עם מאיות למשל:

  0.05<0.09<0.13<0.50<0.75,

  ואלפיות עם אלפיות למשל:

  0.004<0.040<0.400<0.728.

חשוב לשים לב שההשוואה כאן (ותמיד!) היא בין גדלים מאותו סוג, למשל, 50 מאיות עם 13 מאיות, או 400 אלפיות עם 728 אלפיות. אפשר (ואף רצוי) ,כמובן, לשאול בהמשך גם שאלות מסוג: מה גדול יותר - שלוש עשיריות (0.3) או עשרים ושלוש מאיות (0.23)? נוביל להכרה של עיקרון ההשוואה הקובע כי אין להשוות בין מין לשאינו מינו (תפוחים ופילים), ועל כן הכרחי להציג את 3 העשיריות כ- 30 מאיות על מנת להשוותן עם 23 מאיות.

- *כפל של שבר עשרוני בין 0 ל- 1 (עד אלפיות במספר שלם כחיבור חוזר, ובמקרה הצורך גם המרות.*

זוהי השלמה של הנושא שתחילתו הייתה עוד בכיתה ג, על-פי הצעתנו. הדבר ייעשה תוך הישענות על חוק הקיבוץ במספרים השלמים. חוק זה מוכר לילדים מכיתות קודמות על-פי תכנית הלימודים לכיתה ב (שם, פרק ב, סעיף 5, עמוד 43). לדוגמה, נרשום:

$$0.5\times7=(0.1\times5)\times7=0.1\times(5\times7)=$$
$$=0.1\times35=3.5$$

ונאמר: המכפלה של 7 ב- 5 עשיריות שווה למכפלה של 7 במכפלת 5 בעשירית, היא שווה למכפלה של מכפלת 7 ב- 5 בעשירית, היא שווה למכפלה של 35 בעשירית, והיא שווה ל- 35 עשיריות שהן 3 ו- 5 עשיריות (בהקשר לאופן הקריאה והרישום ראו שוב הערת שוליים 2).

- *כפל בעשירית, "עשירית של..."*

ככלל, יש לפחות שתי התייחסויות לכפל בבית הספר היסודי: כפל במספר טבעי גדול מ- 1, שהוא חיבור חוזר ("פעמים") וכפל במספר לא שלם, במיוחד במספר חיובי קטן מ- 1. על כפל במספר חיובי קטן מ- 1 נוהגים לומר "...של", כמו למשל: "חצי של", "רבע של...".

בהקבלה לגבי כפל בעשירית נתרגל לומר "עשירית של...".

ראוי לשים לב לכך שכשמדובר בכפל במספר גדול מ- 1, גם אם הוא אינו שלם, למשל, על כפל ב- 3.5 לא אומרים "שלוש וחצי של...". (לפעמים אומרים "שלוש וחצי פעמים..." , אבל גם זה, כמובן, איננו שימוש סביר במילה "פעמים" השמורה לכפל במספר טבעי גדול מ- 1).

בנושא זה הצעתנו היא רב-שלבית: תחילה נטפל בעשירית של כפולות של 10, ואחר כך בעשירית של מספרים אחרים.

לעניין העשיריות של כפולות של 10, נזכיר כי התלמידים יודעים כבר ש- 10 פעמים 2 זה 20, ומכאן שחלוקה של 20 לעשרה חלקים שווים נותנת 2. לאור זה, כבר ראינו בכיתה ג ש- 2 הוא עשירית של 20. כעת נלמד לזהות זאת ככפל בעשירית, ובהתאם לרשום זאת כך:

$20\times0.1 = 2$.

התמונה כולה היא אפוא:

$20\times0.1 = 2 \Leftrightarrow 20:10 = 2 \Leftrightarrow 2\times10 = 20$

וכך לגבי דוגמאות נוספות רבות.

נציין כי גם כאן, כמו בנושא הקודם, הכופל 0.1 נרשם מימין לנכפל שהוא 20 (למרות שהכפל בסדר ההפוך נותן את אותה מכפלה, $0.1\times20 = 2$, כפי שראינו לעיל).

בהמשך ההוראה והלמידה, "עשירית של" או "החלוקה ל- 10 חלקים שווים" תבוא לידי ביטוי גם כקשר בין אלפים למאות, מאות לעשרות, עשרות לאחדות, אחדות לעשיריות, עשיריות למאיות ומאיות לאלפיות. הקשרים האלה ידועים עוד מכיתה ב, וכעת נרשום אותם כך:

$1000\times0.1=100;\ 100\times0.1=10;\ 10\times0.1=1$

נעסוק בשאלות, כגון:

- מהי עשירית של 500?

תשובה: 50, כי $50\times10=500$. הדגש הוא בשקילות בין 'חמש מאות זה עשר פעמים (של) חמישים $500 = 50\times10$' לבין 'חמישים הוא עשירית של חמש מאות: $500\times0.1 = 50$'.

- איזה חלק מהווה 4 מ- 40?

תשובה: עשירית, כי $4\times10 = 40$. (הערה: לא נשאל איזה חלק מהווה 4 מ- 36, שאלה זו תחכה לשלב מאוחר יותר.)

כעת נעבור לעשיריות של מספרים *שאינם* כפולות של 10. נתחיל מעשיריות של מספרים שלמים קטנים מ- 10, ואחרי כן נעבור לעשיריות של מספרים שלמים כלשהם.

אפשר להתחיל מהמחשה של הדברים באמצעות הקבלה לעשיריות של כפולות של 10 לצד שאלות מהמציאות, כגון:

- אנחנו יודעים מהי עשירית של 20. כעת ננסה להבין מהי עשירית של 3. ראינו את הקשר בין חילוק ל- 10 לבין עשיריות. בהקבלה לכך נחלק 3 ל- 10. למשל אם לוקחים 3 תפוחים ורוצים לחלק אותם בשווה בין 10 ילדים, כמה תפוחים יקבל כל ילד?

הערה: יש לשים לב לכך שבמציאות התפוחים אינם שווים ולכן ההמחשה היא מוגבלת, והתלמידים נדרשים למידה מסוימת של הפשטה בקבלת ההנחה שהתפוחים שווים.

דרך אחת למתן התשובה היא: לחלק כל תפוח לעשרה חלקים שווים ולתת לכל ילד עשירית של כל אחד משלושת התפוחים. בסך הכול, אם שלושת התפוחים שווים זה לזה (!), כל ילד יקבל 3 עשיריות של תפוח. לפיכך

שלוש עשיריות (0.3) הן עשירית של 3 ונרשום:

$3\times0.1 = 0.3$

זוהי עובדה חדשה, שונה מ- $0.3 = 3\times0.1$ המבטאת את הכפל כחיבור חוזר של עשיריות, עליו דיברנו לעיל. יחד עם זאת בשני המקרים התקבלה אותה תוצאה – שלוש עשיריות. דבר זה ממחיש את שימור החילופיות של הכפל שהיכרנו בתחום המספרים הטבעיים.

בשפה פורמלית יותר, תהליך הפתרון בדרך הנזכרת משתקף כך:

$3:10 = (1+1+1):10 =$

$= (1:10+1:10+1:10) = 0.1\times3 = 0.3$

מכאן (לפי הטרנזיטיביות של השוויון):

$3:10 = 0.3$

ולכן:

$3\times0.1 = 0.3$

בדרך אחרת, מחלקים כל אחד משלושת התפוחים (השווים זה לזה, לפי הנחתנו), לעשרה חלקים שווים, ומקבלים סלסלה ובה 30 עשיריות של תפוח אותן מחלקים בין 10 אנשים. (פעולה מוכרת מתחום המספרים הטבעיים!) וכל אחד מקבל 3 עשיריות תפוח. לפיכך שלוש עשיריות (0.3) הן עשירית של 3, ונרשום:

$3\times0.1 = 0.3$

בשפה פורמלית יותר, תהליך הפתרון בדרך הנזכרת משתקף כך:

$3:10=(1+1+1):10=$

$=(0.1\times10+0.1\times10+0.1\times10):10=$

$=(0.1\times30):10=0.1\times3=0.3$

מכאן (לפי הטרנזיטיביות של השוויון):

$3:10 = 0.3$

ולכן:

$3\times0.1 = 0.3$

המחשה נוספת, יותר כוללנית, תינתן באמצעות ציר המספרים. על ציר המספרים נחלק את הקטע בין 0 ל- 3 ל- 10 חלקים שווים על-ידי חלוקת הקטע לעשיריות. מקבלים 30 עשיריות, שאותן מחלקים לעשרה חלקים שווים על-ידי חילוק של 30 ל- 10, והתוצאה היא 3 עשיריות (בדומה לדרך הפתרון השנייה של בעיית התפוחים, אלא שכאן אנו פטורים מהדאגה לשוויון בין היחידות).

כאמור, תוך כדי כך, קישרנו גם בין שני הנושאים האחרונים וקיבלנו שקילות בין (למשל) "עשירית של- 20" לבין "20 פעמים עשירית" מבחינת התוצאה המתקבלת, שהיא בשני המקרים 2. אותה שקילות תופסת, גם כאשר התוצאה איננה מספר שלם, כמו למשל "עשירית של "3 שקול ל"שלוש פעמים עשירית". בשני המקרים התוצאה היא שלוש עשיריות.

כך נמסד את החילופיות של הכפל, למשל,

$7\times0.1 = 0.7 = 0.1\times7$

(עשירית של שבע שווה לשבע פעמים עשירית, שניהם 0.7, במילים אחרות המכפלות 'עשירית כפול 7' ו-'7 כפול עשירית' שווות זו לזו).

- *כפל במאית ובאלפית, "מאית של..." ו"אלפית של..."*

כעת נרחיב את הנושא הקודם, למשל כך:

מה קורה כאשר מחלקים עשירית לעשרה חלקים שווים? – מקבלים מאית (אפשר להשתמש בקוביית האלף להמחשה).

נרשום: $0.1:10 = 0.01$

ולכן: $10\times0.01 = 0.1$

נשים לב שמאית היא גם עשירית של עשירית, כי עשר פעמים מאית = עשירית. כלומר,

מאית של עשר, ועשר פעמים מאית, הן שתי דרכים שונות לומר עשירית:

$$10\times0.01 = 0.01\times10$$

באופן דומה – אלפית היא עשירית של מאית ונרשום:

$$0.01:10 = 0.001$$

ולכן:

$$10\times0.001 = 0.01$$

נשים לב שאלפית היא גם עשירית של מאית, כי עשר פעמים אלפית = מאית. אלפית של עשר, ועשר פעמים אלפית, הן שתי דרכים שונות לומר מאית:

$$10\times0.001 = 0.001\times10$$

בהמשך נעסוק בשאלות הנוגעות ל"מאיות של" ו'אלפיות של", כגון:

- מהי מאית של 500? תשובה: 5 כי.

  $$500 = 5\times100$$

  הדגש הוא בשקילות בין: חמש-מאות זה מאה פעמים (של) חמש

  $$500 = 5\times100$$

  לבין: חמש הוא מאית של חמש-מאות

  $$5 = 500\times0.01$$

- איזה חלק מהווה 4 מ- 400? תשובה: מאית, כי $4\times100 = 400$ (לא נשאל איזה חלק מהווה 4 מ- 240. שאלה זו תחכה לכיתה ה.)
- מהי מאית של 3? במילים אחרות, כמה זה 3 לחלק ל- 100? וגם - מהי מאית של 30? במילים אחרות, כמה זה 30 לחלק ל- 100?
- שאלות דומות הנוגעות ל"אלפית של...".

• השוואה בין מספרים עשרוניים (עד 3 מקומות אחרי הנקודה), והשלמת הידע של פעולות חיבור, חיסור וכפל במספרים עשרוניים.

ייעשה שימוש בכתיבה העשרונית לביצוע הפעולות כהרחבה של החיבור והחיסור בגבול ה-1,000 שנלמד בכיתה ג. יש להקפיד על מינוח כנזכר לעיל; למשל, 47 מאיות ועוד 3 עשיריות הן 77 מאיות. בכלל זה גם חיבור של מספרים עשרוניים שבהם החלק השלם שונה מאפס, כגון: 25.49 + 3.72.

• עיגול מאיות לעשיריות ולשלמים, עיגול עשיריות לשלמים. אומדן של תוצאת החיבור של שני מספרים עשרוניים, תוצאת החיסור, תוצאת הכפל של עשרוני בשלם, והכפל של שלם בעשרוני.

• כפל וחילוק של מספר עשרוני ב- 10 וב- 100 כבר עסקנו לעיל בחילוק ב- 10 של שברי היחידה הבסיסיים: עשירית ומאית.

כמו כן נעסוק בחילוק של מספר עשרוני כלשהו (דוגמאות פשוטות בלבד) ב- 10 וב- 100, כגון: 3 עשיריות לחלק ב- 10 הן שלוש מאיות $0.3:10 = 0.03$, במקביל לכפל ולחילוק ב- 10 וב- 100 של מספרים שלמים גדולים השייכים לתכנית הלימודים הקיימת של כיתה ג (שם) וכיתה ד (שם).

המשך כיתה ה וכיתה ו

עם מימוש ההצעה המפורטת עד כאן, תיווצר תשתית למעבר מההצגה העשרונית של המספר הרציונלי להצגתו כשבר פשוט. המעבר יתבצע תוך כדי הוראת הנושאים השונים בכיתות ה-ו. הנושאים הבאים יהוו את חוליית הקשר:

• זיהוי של 0.1 עם השבר הפשוט $\frac{1}{10}$ והסבר של אופן הכתיבה האלטרנטיבי החדש תוך התייחסות לכינוי של המכנה. באופן דומה זיהוי של 0.01 עם $\frac{1}{100}$ ושל 0.001 עם $\frac{1}{1000}$.

• ביצוע וכתיבה באמצעות שברים פשוטים של כפל בשלם של שברי היחידה בעלי מכנה

שהוא חזקה של 10: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$.
לאחר מכן, חיבור וחיסור של שברי יחידה שמכניהם חזקות של 10 על-ידי הבאה למכנה משותף. (על-פי הצעתנו, התשתית לכך בכתיבה העשרונית הונחה החל מכיתה ב !)

- זיהוי שברי היחידה חצי וחמישית כעשיריות, רבע ואחת-חלקי-חמישים כמאיות, שמינית כאלפיות, וביצוע פעולות החשבון (כפל בשלם, חיבור וחיסור) בשברים הללו.
- שילוב כל שברי היחידה הנזכרים לעיל בשיח על הכפל בגבול ה- 1,000. למשל, 7 הוא שמינית של 56 כי שמונה פעמים 7 הן 56. 125 הוא שמינית של 1,000 כי
  $125\times8 = 1000$.
- הרחבה לשברי יחידה בנוסף על אלה שהתלמידים הכירו, על-פי גישתנו, כבר בכיתה ג (חצי, שליש, רבע וחמישית)[4]; שימוש בשברי יחידה כאלה לציון מצבים מוכרים לילדים מחיי היום-יום כגון: היום כשביעית של השבוע, השעה כחלק השנים-עשר של היום (או הלילה) והחלק ה- 24 של היממה, הדקה כחלק השישים של השעה והשנייה כחלק השישים של הדקה[5].
- סדר בין שברי היחידה:

$$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\frac{1}{6}>\frac{1}{7}>\frac{1}{8}>\frac{1}{9}>\frac{1}{10}>\frac{1}{12}>\frac{1}{24}>\frac{1}{60}>\frac{1}{100}>\frac{1}{1000}$$

שאלות, כגון: אילו שברי יחידה גדולים יותר משישית? מהו שבר היחידה הגדול ביותר? (יש לשים לב לכך שהשאלה על שבר יחידה הקטן ביותר עלולה להיות מכשילה בשלב זה, כי הילדים מכירים רק עד אלפית, ובדיון בשאלה צריך להגיע למסקנה שהוא לא הקטן ביותר, כאנלוגיה לכך ש- 1,000 איננו המספר הגדול ביותר בשלמים.)

- ביצוע פעולות החשבון במספרים הרציונליים בשתי הצגותיהם כמספרים עשרוניים וכשברים פשוטים.
- האחוזים כמאיות, חלק של השלם, לרבות חלק שגדול מ- 100%; בעיות חשבון באחוזים.

בהמשך כיתה ה ובכיתה ו תעמוד לרשות התלמידים תשתית מוצקה ללימוד **השבר הפשוט.** כל הנושאים הקשורים לשבר הפשוט המופיעים בתכנית הקיימת לכיתות אלה, וגם הנושאים שנדחו מהתכנית הקיימת של הכיתות הנמוכות יותר, ישולבו בהוראה בכיתות ה-ו לאחר יצירת התשתית של המספרים העשרוניים עד כיתה ד.

לסיכום

במאמר זה פירטנו את הצעתנו לשינוי בתכנית הלימודים של בית הספר היסודי, הרציונל של ההצעה מופיע במאמר קודם (מובשוביץ-הדר וסיניצקי, 2013). עיקרו של דבר הוא השימוש במבנה העשורי הנלמד בכיתות היסוד, לצורך התוודעות אל המספרים העשרוניים, ולצורך הרחבה והעמקה של העיסוק בהם עוד קודם להכנסת השבר הפשוט.

השבר הפשוט המהווה אבן נגף בלימוד המתמטיקה בכיתות היסוד, עשוי להיקלט ביתר קלות בכיתות העליונות של ביה"ס היסודי, לא רק הודות לעצם ההתפתחות הטבעית של היכולות המתמטיות עם הגיל, אלא גם ובעיקר הודות לתשתית של המבנה העשורי שנבנתה מראש.

השינוי המוצע הוא לגמרי לא פעוט. אדרבה, זוהי כמעט "מהפכה" ואי-אפשר להעלות על הדעת את

---

4 ראוי לשים לב לשימוש בזכר ובנקבה בשברים השונים. בעברית השברים חצי, שליש, רבע הם לשון זכר, ואילו חמישית, שישית עד עשירית הן לשון נקבה. לעומת זאת החלק החמישי של השלם או החלק השנים-עשר של השלם – כל אלה לשון זכר. אומרים שנים-עשר חלקי שתים-עשרה של היחידה.

5 יש לשים לב שהחודש איננו החלק השנים-עשר של השנה כי החודשים אינם שווים זה לזה.

הכנסתה לשימוש בפועל רק על בסיס של הרציונל (שם) ושל ההצעה המפורטת המופיעה לעיל , ויהיו משכנעים ככל שיהיו.

הכרחי לבצע ניסוי שיבדוק את הדברים הלכה למעשה. אלא שניסוי כזה, גם אם ייעשה במספר מוגבל של כיתות, מצריך הכנת חומרי הוראה ולמידה חדשים לכיתות ג-ו, ומחויבות של מורים לארבע שנות הוראה ניסויית לפחות, לשם ליווי תלמידי כיתה ג מתחילת הניסוי ועד סופו בכיתה ו.

הקהילייה המקצועית יחד עם מערכת החינוך צריכה לתת את הדעת הן להכשרת המורים לכך, הן למבחני המיצ"ב שתלמידי הניסוי לא יוכלו לגשת אליהם בנוסח האחיד, והן למתן מענה לשאלות לוגיסטיות.

כוונתנו בהצגת הדברים היא לעורר דיון מקצועי בקרב הקהילייה, שיוביל לבדיקה מעמיקה של פרטי הרעיון המוצע, ושל הדרכים והאמצעים שיביאו ליישומו.

מקורות

מובשוביץ-הדר, נ', סיניצקי, א', (2013). האם אפשר בלי שברים פשוטים? – לא, אבל ...חלק א: העשרוניים כנתיב להבנת השבר הפשוט *. מספר חזק 2000, גיליון 24*, 21-28.

משרד החינוך, התרבות והספורט. (2006). *תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים*. ירושלים: המזכירות הפדגוגית ,האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים.

פרופ' נצה מובשוביץ–הדר
עוסקת שנים רבות במחקר ופיתוח בתחום החינוך המתמטי, הקימה בטכניון את "קשר חם"– מרכז מו"פ לחינוך מתמטי ועומדת בראשו. בשנים האחרונות נותנת הרצאות במתמטיקה לציבור הרחב. הייתה היועצת המדעית לסדרה הדרמטית-מתמטית "חשבון פשוט" של הטלוויזיה הלימודית, כיהנה כראש המחלקה להוראת המדעים בטכניון וניהלה את המוזיאון הלאומי למדע בחיפה.

פרופ' איליה סיניצקי
מרצה למתמטיקה ולהוראת מתמטיקה במכללות להכשרת מורים ובהשתלמויות מורים.
מתמחה בחקר תהליכי חשיבה מתמטית ובפיתוח דרכי הוראת מתמטיקה לתלמידים ולפרחי הוראה.