צורה ומרחב

פיתוח תובנות של תפיסה מרחבית

למידה והוראה של גאומטריה דרך קיפולי נייר

ענת קלמר
מירי גולן
ג'וני אוברמן

מבוא

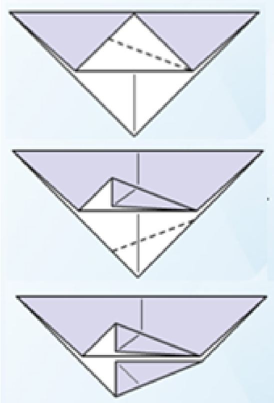
מחקרים רבים מצביעים על כשלים בדרכים להציג את הגאומטריה בפני הילדים, ועל תפיסות שגויות בהבנתם של הילדים את הצורות והמושגים הגאומטריים (Fox, 2000 ועוד). חלק מהבעיות נובע מלמידת גאומטריה דרך הגדרות סטאטיות. חלק אחר הנו פועל יוצא של הצגת המושג החדש מוקדם מדיי, לפני שהילד בנה לעצמו כלים להכיל את המושג בתוך הידע הקיים אצלו.

הבעיה של תפיסות שגויות בגאומטריה הנה הרבה יותר רחבה מהמדווח במחקרים על ידע הילדים, משום שמורים רבים מחזיקים בעצמם בתפיסות שגויות לגבי הגאומטריה ובעייתם גוררת בעיה בלמידה של הילדים.

(Lampert, 1988; Swafford, Jones & Thornton, 1997; Leikin, Berman & Zaslavsky, 2000; Keith, 2000).

.

מאמר זה בא להציע שני כיוונים לתמיכה בהוראה ולמידה של גאומטריה. מהצד האחד, חיזוק האינטואיציות של הילדים לגבי המושגים הגאומטריים, באמצעות קיפולי נייר, מהצד השני, תמיכה במורים דרך תכנית מתוקשבת, עם אנימציות המשחררות את המורים מהצורך להיות מומחים באוריגאמי, ומאפשרות להם לפתוח חלונות להבנת המושגים ובניית עוגנים בנקודות קושי (דוגמה באיור 1). התכנית המתוקשבת, אוריגאמטריה כוללת הנחיות לגבי כל שלב של הקיפול תוך הדגמה דינאמית באנימציה. לצד כל בנייה, מפורטות שאלות לדיון עם התלמידים. על מנת להשיב על השאלות התלמידים צריכים לבדוק את הקיפולים בעבודתם בהקשר למושגים הגאומטריים.



הוראת קיפול:
בכל משולש לבן יש לקפל את אחת הצלעות הקצרות של המשולש לצלע הארוכה ביותר, לפי הסימון.

שאלות לדיון:
לאיזה מצולע הפך הריבוע הלבן לאחר הקיפול?
האם תוכלו לזהות אלכסונים במצולע שהתקבל?
נמקו.

איור 1: הדגמה של קיפול ושאלות לדיון

השאלות עוסקות בזיהוי מצולעים ותכונותיהם. השאלה המתוארת כאן באה לאחר שהילדים זיהו את המצולע הלבן כריבוע.

פעילויות דינאמיות המשולבות בשפה מתאימה בזמן הנכון

עם השנים התרבו היישומונים הדינאמיים הממוחשבים, שבאמצעותם ניתן לעשות עבודות משמעותיות של בניית הבנה ופיתוח החשיבה הוויזואלית.

לצד היתרונות של שילוב המחשב בבנייה הגאומטרית, יש חשיבות רבה, במיוחד בקרב ילדים צעירים, לבנייה בידיים. כדי להרגיש את החומר ולטפל בו בבניית הצורות הגאומטריות.

בשנות בית הספר היסודי חשוב שלמידת המושגים הגאומטריים תיעשה בשילוב אמצעי המחשה, לפני הצגתם הפורמאלית. הדגמת המושגים דרך בנייה חופשית או בנייה על-פי אילוצים והזזת הצורות במרחב. (בהתאם לתכנית הלימודים, עמודים 8-9). הפעילויות דרך הילדים יבנו לעצמם את ההבנה הגאומטרית צריכות לכלול חקר תכונות של מצולעים וגופים, וזיהוי תכונות אינווריאנטיות, לאור פעולות שונות שיבוצעו על הצורות. חשיבות גדולה יש לרפלקציה שנעשית בכיתה לאור פעילויות אלה, ולהפנמת המושגים הגאומטריים. פעילויות מסוג זה הן בעלות פוטנציאל לחיזוק היכולת לדמיין את תוצאות הטרנספורמציות על הצורות.

הספרות המחקרית מדווחת על פעילויות עם פסיפסים, ופעילויות אחרות המשתמשות בקיפול נייר, גזירה, ציור, וצורות פלא הנדסיות, המעשירות את מאגר המבנים הוויזואליים של הילדים. דרך פעולות אלה מתפתח הידע של הילדים על צורות ותכונותיהן. (מאונטוויטן, 2004; אוברמן וכ"ץ, 2001; לב, 2005; Colgan & Sinclair, 2000 ועוד).

אין די בפעילויות עצמן, אלא הן צריכות להיות מלוות בשפה מתאימה. כאשר נותנים לתלמידים שפה מתמטית בתוך הקשרים בעלי משמעות, מסייעים להם להעביר את מחשבותיהם לאחרים בצורה בהירה. כאשר תלמידים משתמשים במונחים מתמטיים נכונים, המורה יכולה לשים לב למה שנאמר, וכתוצאה מכך, למה שהובן או נלמד. הדאגה העיקרית של המורים צריכה להיות איך ומתי להציג לתלמידים מילים חדשות. מורים אינם צריכים להכניס מילים חדשות באמצעות דרישה מהתלמידים לשנן הגדרות. התלמיד לומד את המשמעות של ביטויים טכניים באמצעות שינוי שלהם והשתנות על-ידם בתהליך של הפנמה.

לפי ויגוצקי, התלמידים יכולים להעלות את רמת ההישגים שלהם דרך אינטראקציה עם אחרים, היכולים לסייע להם לארגן את החשיבה ולעשות את המעבר מהמוכר לבלתי מוכר. באמצעות אינטראקציות כיתתיות התלמידים יכולים להבין את החשיבה שלהם, ליזום שינויים בידע ולבנות רמה גבוהה יותר של הבנה.

מחקרים אלה ואחרים הובילו אותנו לעבודה המוצגת כאן, היוצאת מתוך השלבים לקידום החשיבה הוויזואלית, כפי שמציג אותם ואן הילה (Van Hiele, 1999), ובניית אינטראקציה חברתית בתהליך קיפולי נייר, דרך תקשורת המחברת את השפה היומיומית של הילדים לשפה הפורמלית של המתמטיקה.

למידת גאומטריה בעזרת אוריגאמי

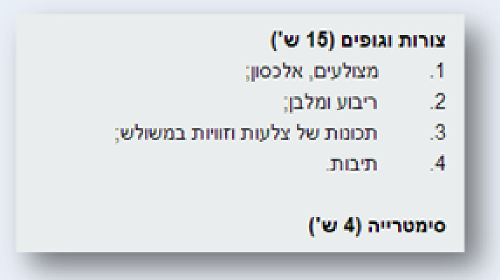
אומנות האוריגאמי אינה חדשה. שילוב הוראת הגאומטריה באמצעות אמנות האוריגאמי מתקיים ברחבי העולם ברמות שונות, מתכניות כמו טרום אוריגאמטריה בגיל הגן ועד להוראת הגאומטריה והמתמטיקה באוניברסיטה, למשל, על-ידי פרופסור תום הול. (ראו קישור לאתר).

בעבודה זו, הדגמים שנבחרו יצאו מתוך המושגים הגאומטריים אותם באנו ללמד. כל שלב של קיפול הוא חקר של הנושא הנבחר בגאומטריה, עד לתוצר הסופי (Golan & Jackson, 2007). יותר

מכך, בעבודה זו נוסף החוט המקשר בין יצירות האוריגאמי לבין מערכי שיעור, הבונים נדבך על נדבך את פיתוח החשיבה הוויזואלית של התלמידים, בהתאם לדרישות תכנית הלימודים בבית הספר היסודי.

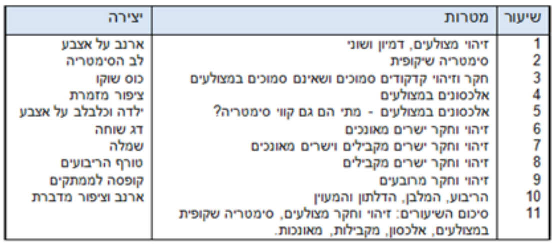
במטרה להרחיב את התפיסה הוויזואלית של הילדים בעזרת קיפולי נייר, בנינו מערך של 11 שיעורים בנושאים מתוך תכנית הלימודים לכיתה ד (ראו איור 2), דרך הפקת תוצרים שהם יצירות אוריגאמי, כך שבכל שיעור המטרה שכל ילד יצא עם תובנות גאומטריות החדשות לו, ועם יצירה אותה יבנה בעצמו במהלך השיעור. כל שיעור מסתיים בהפתעה לגבי התוצר, תוך למידה חדשה וחזרה ספיראלית על פיסות ידע שנבנו בשיעורים קודמים. כך, במארג של מעין פסיפס, "תפרנו" שיעורי יצירה באוריגאמי, כאשר לכל אורך הלמידה בדקנו דרך שיח ורפלקציה באיזו מידה כל ילד הרחיב לעצמו את החשיבה הוויזואלית.

תכנית הלימודים בגאומטריה, כיתה ד:


צורות וגופים (15 ש')
1. מצולעים, אלכסון;
2. ריבוע ומלבן;
3. תכונות של צלעות וזוויות במשולש;
4. תיבות.

סימטרייה (4 ש')

רצף השיעורים



שיעור	מטרות	יצירה
1	זיהוי מצולעים, דמיון ושוני	ארנב על אצבע
2	סימטריה שיקופית	לב הסימטריה
3	חקר וזיהוי קדקודים סמוכים ושאינם סמוכים במצולעים	כוס שוקו
4	אלכסונים במצולעים	ציפור מזמרת
5	אלכסונים במצולעים - מתי הם גם קווי סימטריה?	ילדה וכלבלב על אצבע
6	זיהוי וחקר ישרים מאונכים	דג שוחה
7	זיהוי וחקר ישרים מקבילים וישרים מאונכים	שמלה
8	זיהוי וחקר ישרים מקבילים	טורף הריבועים
9	זיהוי וחקר מרובעים	קופסה לממתקים
10	הריבוע, המלבן, הדלתון והמעוין	ארנב וציפור מדברת
11	סיכום השיעורים: זיהוי וחקר מצולעים, סימטריה שקופית במצולעים, אלכסון, מקבילות, מאונכות.	

איור 2: תכנית הלימודים ורצף השיעורים

תהליך ההוראה

40 תלמידים בשתי כיתות ד למדו במשך 11 שבועות גאומטריה באמצעות קיפולי נייר. אחת לשבוע התקיים שיעור בן 90 דקות, שהועבר על-ידי מומחית לאוריגאמי בכיתה אחת, ועל-ידי מורה למתמטיקה בכיתה שנייה. בשתי הכיתות למדו אותה תכנית בעזרת הסביבה המקוונת. התלמידים השתתפו בדיונים כיתתיים, והציגו את הבנתם לאור שאלות שעלו בכיתה על-ידי המורה או על-ידי תלמידים עמיתים.

בתהליך ההוראה, בתום כל שיעור נערך דיון בין מובילי התכנית, המורים המנחים, והצופים בשיעורים (רכזת המתמטיקה בבית הספר, וכותבי המאמר), והוסקו מסקנות לגבי הדגשים שיש לעשות בבניות האוריגאמי, בעקבות התפתחות ההבנה של התלמידים בשיעור.

דוגמאות לבניית מושגים בשיעורים

נמחיש דרך דוגמאות בניית מושגים ותהליכים: של מקבילות, זוויות, אלכסונים וקווי סימטריה, פירוק והרכבה של צורות.

דוגמה 1: מקבילות

ההגדרה המתמטית של מקבילות מתוך מילון המונחים הגאומטריים לבית הספר היסודי, אומרת: "שני ישרים במישור שאין להם אף נקודה משותפת". זו הגדרה שאינה אינטואיטיבית.

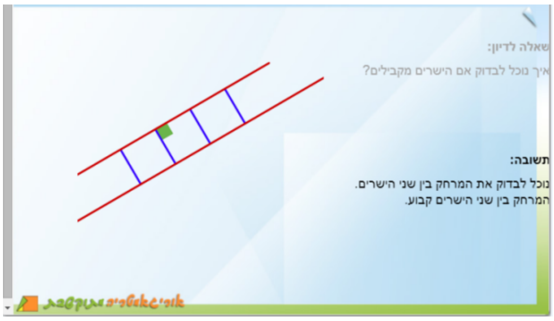
איור 3: "מודד"

במהלך השיעורים, ניסינו להגיע עם התלמידים להבנה של קווים מקבילים דרך בדיקת המרחק הקצר ביותר בין שני קטעים מקבילים, מרחק

שיישאר קבוע בכל נקודה ונקודה שנבחר לאורך אחד הקטעים. מצאנו שהמרחק בין שני הקטעים הוא הקצר ביותר, כאשר הזוויות הנוצרות בין הקו החותך לכל אחד מהקטעים המקבילים הן ישרות. בדקנו את הזווית הנוצרת באמצעות "מודד" (ראו איור 3) שהיה בידי כל תלמיד.

שילבנו את מושג המקבילות בשלב של קיפולי הנייר, כאשר היינו זקוקים להבנת המושג להמשך היצירה, זה השלב שפתחנו חלון למידה על מקבילות (ראו איורים 4 ו- 5).

איור 4: תלמידה בודקת מקבילות של קטעים



שאלה לדיון:

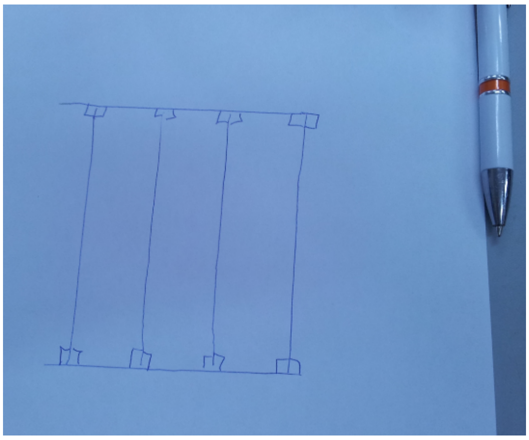
איך נוכל לבדוק אם הישרים מקבילים?

תשובה:

נוכל לבדוק את המרחק בין שני הישרים.

המרחק בין שני הישרים קבוע.

איור 5: האם הקטעים מקבילים?

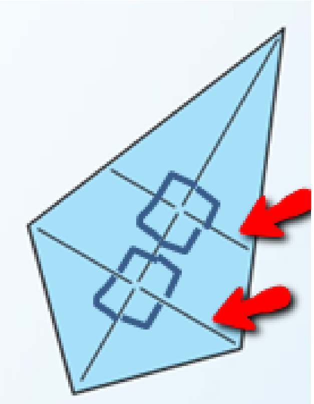


איור 6: בדיקת המרחק בין הקווים המקבילים

דוגמאות מהכיתה:

מורה: איך נדע שהקווים מקבילים? (הכוונה לאלכסון המשני של הדלתון המסומן בתמונה בחץ ולקו הקיפול המסומן גם הוא בחץ.)

התלמיד בדק ומצא שהזוויות ישרות והציג זאת בתמונה כמענה לשאלה.



איור 7: איך נדע שהקווים מקבילים?

חשוב להדגיש: גם בסיום השיעור לא סגרנו את נושא המקבילות. כלומר, אין נקודה שיש בה הבנה מלאה של מושג, אלא עלייה בשלב בהבנתו.

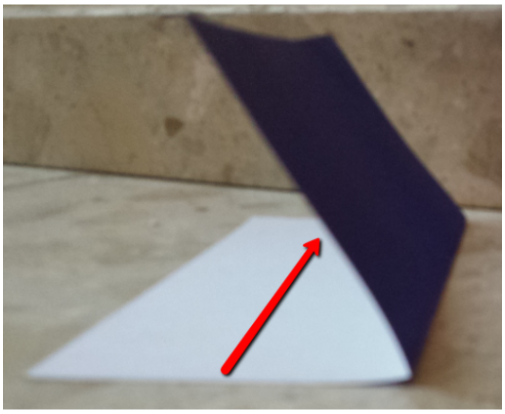
לכל אורך הדרך ניסינו לראות את נקודת המבט של התלמיד ולבנות אתו את המושג בכלים שיש לו. ברגע שביקשנו מהתלמידים לבדוק אם המרחקים בין שני קטעים שווים, הם יכלו להבין את התכונה של קווים מקבילים, היו להם המושגים שבעזרתם הם הכילו את המושג החדש.

דוגמה 2: זוויות

ההגדרה המתמטית של זווית מתוך מילון המונחים הגאומטריים לבית הספר היסודי אומרת: "זווית - נוצרת משתי קרניים היוצאות מנקודה משותפת."

מה ילדים מבינים על זווית כאשר מציגים להם את המושג כשתי קרניים היוצאות מנקודה אחת? גם כאן, כמו במקבילות, ההגדרה אינה אינטואיטיבית. במהלך השיעורים, ניסינו להגיע עם התלמידים להבנה שכאשר מקפלים את הנייר אנחנו יוצרים זווית בין שני חלקי הדף המקופל. זווית כסיבוב. הדף מייצג את הזווית על-ידי סיבוב, הגדרה דינאמית.

אם נדבר עם הילד על מפתח הזווית לא בטוח שיהיו לו הכלים להכיל את המונח, אבל כאשר מבצעים את הקיפול בנייר, והילדים יוצרים את המפתח, הם מסוגלים להכיל את המושג ולחבר אותו למושגים שקיימים אצלם.



איור 8: זווית

באחד משלבי הקיפול, בדרך ליצירת האוריגאמי, נזקקנו ליצירת זווית. ההסבר של המושג בא תוך כדי היצירה דרך קיפולי נייר.

דוגמה 3: אלכסונים וקווי סימטריה

אחד השימושים של מושג האלכסון הוא בדיקת סימטריה של מצולעים. אם נסרטט אלכסון במצולע, ונגזור את הצורות שיתקבלו משני צדיו יהיו מקרים בהם נוכל לדבר על סימטריה, ומקרים בהם לא נוכל לדבר על סימטריה. הקיפול מאפשר לנו להכיר את האלכסון, הילד יוצר ורואה את האלכסון. זהו מושג שמתפתח והשימוש שלו יגיע אחר כך במושג החפיפה. במהלך השיעורים, הילדים בדקו תוך כדי קיפולי נייר, מתי אלכסון ייתן להם שתי צורות חופפות ומתי לא. חקרנו זאת תוך כדי בנייה באוריגמי.

מאחר ובבית הספר היסודי הדגש הוא על תכונות של מרובעים, פיתוח מושגים של סימטריה וחפיפה בעזרת האלכסון הוא משמעותי.

דוגמה 4: פירוק והרכבה של צורות

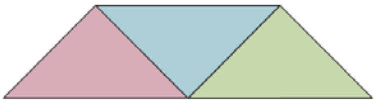
בעזרת קיפולי נייר יצרנו מצולעים שונים. בעזרת המצולעים שקיפלנו בנינו מצולעים חדשים. עצם הבנייה של מצולעים חדשים מחזקת את הבנת התכונות של כל מצולע שהשתמשנו בו בהרכבה. דרך תשובות התלמידים לשאלות ששאלנו, יכולנו להיווכח בהשפעה של פעילויות אלו על התפתחות החשיבה וההסקה הגאומטרית.

דוגמאות מהכיתה:

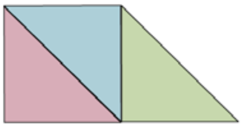
המורה שאלה: אילו מצולעים יתקבלו אם נחבר 3 משולשים יחד?

(כל משולש נוצר מקיפול אחד של דף אוריגאמי ריבועי.)

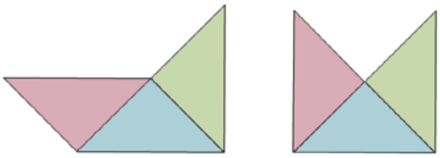
אחת התלמידות ניגשה ללוח וציירה את הצורות שהיא קיבלה, שהם טרפז שווה-שוקיים, טרפז ישר-זווית, ושני מחומשים שונים.



טרפז שווה-שוקיים

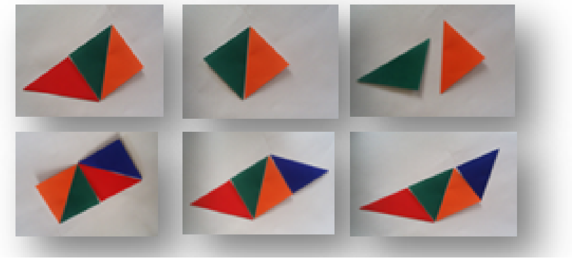


טרפז ישר-זווית



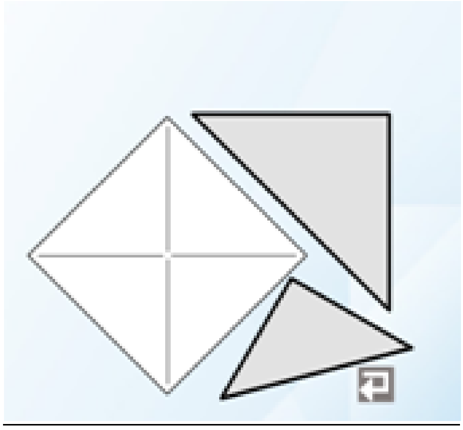
מחומשים

מה נקבל מחיבור 2, 3 או 4 משולשים?



איור 9: פירוק והרכבה של צורות

כמה משולשים ניתן לזהות בריבוע?

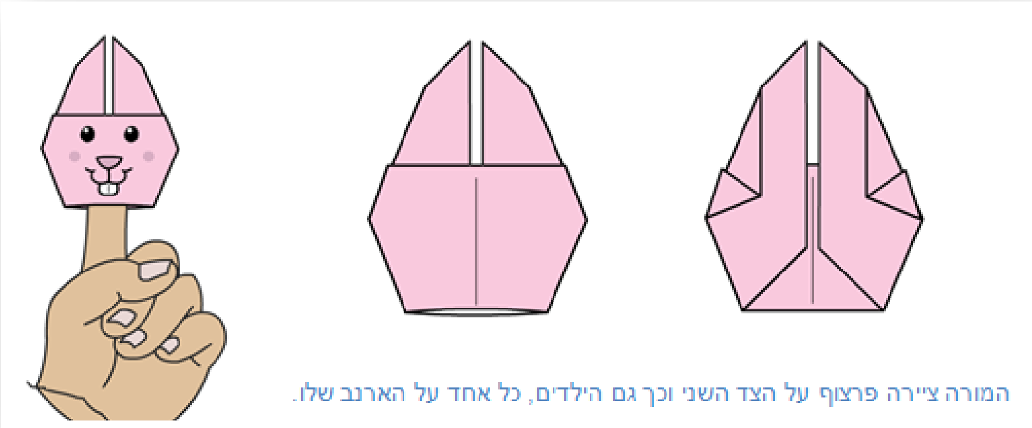


התלמידים מונים את המשולשים באמצעות משולש מקופל: "8 משולשים - 4 קטנים ו- 4 גדולים." (קישור לאנימציה)

סיכום ורפלקציה

עבודה זו באה במטרה לבדוק אפשרויות לטיפול חשיבה המאפשרת התייחסות גאומטרית למצבים חדשים שאינם מוכרים לילד. המטרה שהילד יוכל להשתמש בתובנות שהוא בנה בסביבה הדינאמית, כדי להתייחס למצבים חדשים בעייתיים, כפי שאנחנו מכירים מהספרות. התובנות הגאומטריות אינן נבנות באחת. מדובר בתהליך התפתחותי. בשיעורים, היה לנו חשוב לפתוח את המושגים ולא לסגור אותם. לכן פחות חשוב לנו להצביע על הבנה "סופית" של מושג.

הצגנו כאן הסתכלות על הגדרות מקובלות, מתוך ניסיון לצאת מנקודת המבט של הילד. הראינו זאת בשני אופנים: בדרכים שונות ליצירת הצורות הגאומטריות תוך היכרות עם תכונותיהן, וזיהוי אינווריאנטיות של צורות. ההמלצה שלנו כפי שמשתמעת ממאמר זה, היא להשתמש באוריגאמי בהוראה ולמידה של מושגים גאומטריים, לפני ההוראה והלמידה הפורמאלית.



המורה ציירה פרצוף על הצד השני וכך גם הילדים, כל אחד על הארנב שלו.

איור 10: דוגמה להנחיות לבנייה באוריגאמי

מקורות

אוברמן, ג', כ"ץ, ע' (2001). שימוש באוריגמי בהוראת הגאומטריה. *מספר חזק 2000* - גיליון 2. תשס"ב, ספטמבר.

האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים. מדינת ישראל, משרד החינוך, המזכירות הפדגוגית. תכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי. אוחזר בתאריך 15.7.14

האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים. מדינת ישראל, משרד החינוך, המזכירות הפדגוגית. מילון מונחים בגאומטריה. אוחזר בתאריך 15.7.14

לב-זמיר, ח' (2005). הוראת הסימטריה באמצעות מגזרות נייר. *מספר חזק 2000* - גיליון 10. תשס"ו, אוקטובר.

לייקין, ר', ירושלמי, מ' (2012). הוראת הגאומטריה, נייר עמדה. הוכן על-ידי אנשי חינוך מתמטי ומתמטיקאים באוניברסיטאות ומכללות לחינוך בישראל.

מאונטוויטן, מ' (2004). פירוק והרכבה של מצולעים. *מספר חזק 2000* - גיליון 8. תשס"ד, אוקטובר.

Colgan, L., & Sinclair, N. (2000). Mathematics, Paper Dolls and Transformational geometry. *Mathematics in school*, January 2000.

Fox, B. T. (2000). Implications of Research on Children's Understanding of Geometry. *Teaching Children Mathematics*, Vol. 6, No. 9, May 2000, 572-576.

Golan M. (2011). Origametria and the van Hiele Theory of Teaching Geometry. (pp 205-219). *Origami^5*. Edited by Patsy Wang Iverson, Robert J Lang & Mark Yim. CRC Press.

Golan, M., & Jackson P. (2007). “Origametria: a Program to Teach Geometry and to Develop Learning Skills using the Art of Origami” (pp 559-571). *Origami^4*. Edited by Robert J Lang & AK Peters.

Keith, J. (2000). Teacher knowledge and professional development in geometry. *Proceedings of the British society for research into learning mathematics*, *20* (3), 109-114.

Lampert, M. (1988). *Teachers’ Thinking about Students' Thinking about Geometry. The Effects of New Teaching Tools*. Technical Report 88-1, Washington, DC, Office of Educational Research and Improvement.

Leikin, R., Berman, A. & Zaslavsky. O. (2000). Learning through teaching: The case of symmetry. *Mathematics Education Research Journal, 12*(1), 18-36.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM, 2000.

Swafford, J. O., Jones, G. A. & Thornton, C. A. (1997). Increased knowledge in Geometry and instructional practice. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(4), 467-483.

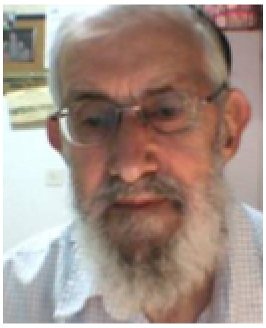
Van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play .*Teaching Children Mathematics. 5*(6), 310-316.

אתרים:

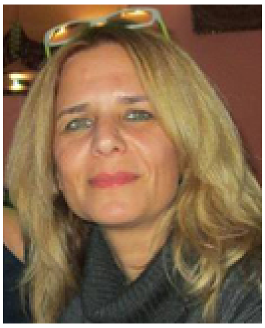
המרכז הישראלי לאוריגאמי

תום הול

International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education and Folding Convention.



ד"ר ג'וני אוברמן
מרצה להוראת המתמטיקה במכללות להכשרת מורים ובהשתלמויות מורים.
עוסק שנים רבות בפיתוח בתחום החינוך המתמטי.
יועץ מתמטי במסגרות מגוונות.
חבר בוועדות שונות בפיתוח תכניות לימודים ובפיתוח כלים להוראה, למידה והערכה.



ד"ר ענת קלמר
מרצה לחינוך מתמטי במכללת אורנים ובמכללה האקדמית גליל מערבי.
בדגש על הבנת תהליכי למידה של מתמטיקה בסביבות דינאמיות משולבות מחשב.

מירי גולן
מנהלת ומייסדת המרכז הישראלי לאוריגאמי.
יוצרת ומפתחת תכנית להוראת גאומטריה באמצעות אוריגאמי: טרום אוריגאמטריה.
לגני ילדים, אוריגאמטריה לבתי ספר, ואוריגאמטריה מתוקשבת למורים.
מנחה גננות ומורות למתמטיקה במרכזי פסג"ה.