גוטפריד לייבניץ (GOTTFRIED LEIBNIZ) 1716-1646

מרגרט פרוים, מרכז מורים ארצי, אוניברסיטת חיפה

הנקודה, כל כך קטנה, אבל כל כך חשובה עד שלא נוכל לדמיין את עולמנו בלעדיה. רבות המשמעויות שיש לה בתחומים שונים ובכללם במתמטיקה. גוטפריד לייבניץ היה המתמטיקאי הראשון, שהשתמש בצורה סיסטמטית בנקודה כסימן הכפל וביסס את כניסתה לשפת המתמטיקה. בשנת 1698 כתב "הסימן X אינו מוצא חן בעיני כסימן הכפל, כי בקלות אפשר לבלבל בינו לבין האות X".

המתמטיקאי, הפילוסוף, המשפטן, חוקר מדעי הטבע, ההיסטוריון והדיפלומט גוטפריד לייבניץ נולד בעיר לייפציג שבגרמניה בשנת 1646. אביו, פרופסור לתורת המידות באוניברסיטה שבאותה עיר "מלומד בקי, לא מקורי במיוחד ומסור לעבודתו ולמשפחתו", נפטר כשגוטפריד היה בן שש, ואמו קטרינה גדלה אותו לבדה.

הילד המחונן, שהספרים היו כל עולמו, למד בכוחות עצמו לטינית ויוונית במטרה לקרוא את הספרים שבספרייה העשירה של המשפחה. אין תימה שלייבניץ הפך במרוצת הזמן לספרן בעל שם עולמי ולאחראי על אחת הספריות הגדולות בעולם באותם הזמנים.

בגיל 14 התחיל לייבניץ את לימודיו באוניברסיטת לייפציג, שם למד פילוסופיה, מתמטיקה, רטוריקה, תיאולוגיה, משפטים וגם... עברית. למרות המוניטין הגדולים שרכש לעצמו ועל אף שמילא את כל חובותיו הלימודיים, פנייתו לקבלת תואר דוקטור למשפטים לא נענתה – לא ברור אם בגלל גילו הצעיר או בגלל עוינותה של אשת הדיקן. לכן פנה לייבניץ לאוניברסיטת אלטדורף, ליד העיר נירנברג, שהעניקה לו את התואר דוקטור למשפטים בפברואר 1667. בעקבות מחקר מקורי שכתב בנושא חוק ומשפט קיבל הצעיר המלומד את הצעתו של האלקטור ממינץ לשמש לו יועץ, משפטן ודיפלומט.

בשנת 1672 הגיע לייבניץ לפריס, לחצרו של מלך צרפת, לואי ה–14, בשליחות דיפלומטית מטעם האלקטור. לייבניץ לא הצליח להתקבל על ידי המלך, אבל בבירה האינטלקטואלית של אירופה פגש אנשי מדע חשובים, ביניהם את הפיסיקאי והמתמטיקאי הנודע כריסטיאן הויגנס (1695–1629) שהכיר בכשרונו המבריק של הצעיר השקדן ויעץ לו להתחיל לקרוא את עבודותיהם המתמטיות של רנה דקרט (1650–1598) ובלז פסקל (1662–1623). לאחר מותו של האלקטור ממינץ בשנת 1676 חזר לייבניץ לגרמניה ושירת את משפחת הדוכסים מהנובר כספרן, כיועץ וכהיסטוריון עד ליום מותו בשנת 1716. במהלך שנות עבודתו כספרן תיכנן את הראורגניזציה והמודרניזציה של הספריות שניהל, ביניהן הספרייה המפורסמת של הנובר.

לייבניץ מתואר כאיש רחב כתפיים, אדם שנון ואלגנטי שאהב להתגנדר וחבש פיאה ענקית בצבע שחור.

על לייבניץ כמדען אוניברסלי

לייבניץ היה סקרן ושאף להצטיין בכל תחומי הפעילות האינטלקטואלית. הוא היה בעל חוש טכני וכוח המצאה פורה ועסק בפרוייקטים הנדסיים, שאחד מהם היה מבוסס על הרעיון של שימוש בכוח הרוח והמים להגדלת התפוקה במכרות הכסף של הרי הרץ. אחרי ניסויים מוצלחים שעשה בייצור המשי, הוענק לו רשיון לייצרו, ובכך תרם רבות לחיזוק תעשייה זו בברלין. עם רעיונותיו המקוריים האחרים נמנים גם הנהגת מערכת בריאותית ציבורית, הקמת בנק ממלכתי

לזכותו נזקפים רבים מהעקרונות השוררים ביחסים הבין לאומיים עד היום, ובכלל זה הרעיון של "מאזן הכוחות".

לייבניץ יזם הקמת אקדמיות מדעיות בבירות השונות של אירופה לשם התכנסות אנשי מדע לשיתוף פעולה, מתוך שכנוע שתהילתה של הקהילה המדעית מבוססת על היותה פתוחה להחלפת דעות באופן חופשי. בתמיכתו של הדוכס פרדריך, שהפך לאחר מכן למלך פרוסיה, הצליח לייבניץ לייסד בשנת 1700 את האקדמיה של ברלין והיה לנשיאה הראשון.

לייבניץ הצליח לשכנע את פטר הגדול, הצאר של רוסיה, בערך הרב שיש לייסוד אקדמיה מדעית בסנט פטרסבורג. הצאר הבטיח את תמיכתו גם בביצוע מחקרים הקשורים לאיתורו של הצפון המגנטי ולגילויים גאוגרפיים אחרים.

מלבד ייסוד אקדמיות במטרה לקדם את המדע על ידי החלפת רעיונות מדעיים, לייבניץ פרסם כתבי עת וגם ניהל התכתבות מסועפת עם יותר מ-600 מדענים מכל העולם: 15,000 מכתבים נשמרו עד היום.

על לייבניץ כמתמטיקאי

עבור לייבניץ, איש אשכולות, היתה המתמטיקה המדע המושלם. גולת הכותרת של התגליות המתמטיות במאה ה-17 הייתה המצאת החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי- מקצוע שלו השלכות רבות על פתרון בעיות בפיזיקה. שני מתמטיקאים גדולים- אייזיק ניוטון (1642-1727) וגוטפריד לייבניץ, שעבדו בנפרד ובשיטות די שונות, נחשבים להוגי החשבון החדש. במספר חיבורים ומכתבים שרשם בשנים 1675-1676 חקר לייבניץ את הפעולות של חישוב דיפרנציאלים ואינטגרלים וסבר שיש בידו שיטה כללית למציאתם. החשבון הדיפרנציאלי נדרש למציאת המשיק לעקומה, והמתמטיקאי חשב שכדי למצוא את המשיק יש למצוא את היחס של הפרשים בין שיעורי ה-Y וההפרשים בין שיעורי ה- X של העקומה, המייצגת את הפונקציה, כאשר הפרשים אלה נעשים קטנים ללא גבול. החשבון האינטגרלי נדרש למציאת השטח מתחת לעקומה נתונה. לייבניץ התייחס לשטח זה כסכום שטחם של הרבה מלבנים דקים מאוד, המתקרב ביותר לשטח האמיתי. מסקנה חשובה אחרת של המתמטיקאי היתה, שכפי שבחשבון החיבור והחיסור הן פעולות הפוכות, כך גם פעולות החישוב הדיפרנציאלי והחישוב האינטגרלי הן פעולות הפוכות.

בשנים 1684 ו-1686 פרסם לייבניץ בכתב-העת אקטה ארודיטורום (ACTA ERUDITORUM) שתי עבודות, שבהן הונחו היסודות לחשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי.

התוכן המתמטי קשור מאוד לצורה שבה מתבטא הרעיון, ולכן סימון מוצלח תורם לבהירות החישובים והוא חיוני להתפתחות המתמטיקה. לייבניץ, שהיה "אלוף" הסימון (שני רק למתמטיקאי אוילר) תרם רבים מהסימנים המוצלחים ביותר במתמטיקה, המשמשים אותנו עד עצם היום הזה: הוא סימן ב-dy ו- dx את ההפרשים הקטנים ביותר של המשתנים, ובאות S מאורכת $\int$ את האינטגרל (מהמילה הלטינית SUMMA - סכום).

הסימון האפקטיבי שלו גרם להבהרת תכונותיהן של פעולות החישוב הדיפרנציאלי והאינטגרלי ולגילוי תכונות חדשות; כתיבה ברורה של כללים ומשוואות הפכה את החשבון החדש למקצוע "מוכן לשימוש". המתמטיקאים האירופיים הבחינו ביתרונותיה של הגישה הזו ואימצו אותה במהירות, אך המתמטיקאים האנגליים הלכו בעקבות בן ארצם, אייזיק ניוטון, שלא ייחס ערך רב לסימון ברור של נוסחאות, ועקב כך התעכבה התפתחות המתמטיקה באנגליה במשך רוב המאה ה-18. כמו אחרים לפניהם (לדוגמה דקרט ופרמה) התפתח בין ניוטון ולייבניץ סיכסוך ארוך שנים - עוד הוכחה לכך שגם גאונים הם רק בני אדם - סכסוך אשר פרץ סביב השאלה, מי מהם הוא הממציא של החשבון החדש. המחקרים האחרונים קובעים, שלמרות שניוטון גילה את החשבון החדש ראשון, לייבניץ המציא אותו באופן עצמאי ואף פרסם אותו לפניו.

עוד סימנים שלייבניץ המציא:	
סימון עבור דימיון	~
סימון עבור יחס	a:b
סימון עבור פרופורציות	a:b=c:d

בהיותו גם פילוסוף וגם מתמטיקאי התעלם לייבניץ מהגבולות בין הדיסציפלינות ותרם תפיסות מהותיות ומקוריות; בעבודה "על האומנות הקומבינאטורית" הוא הציג לראשונה את התאוריה שלו בנושא האלגברה של הלוגיקה. הוא הצליח לפתח שיטה כללית ומקיפה, שלפיה ניתן להשתמש בסמלים אוניברסליים עבור המונחים היסודיים של החשיבה ועל ידי כך לבנות בעזרת חוקים מתמטיים רעיונות יותר מורכבים. שימוש נכון בפעולות לוגיות המתגלמות בסמלים מוביל, בצורה כמעט אוטומטית, גם לתגליות חדשות. בעיה אחרת שהעסיקה מתמטיקאים רבים באותה תקופה, ביניהם גם לייבניץ, היתה הבעיה הבאה:

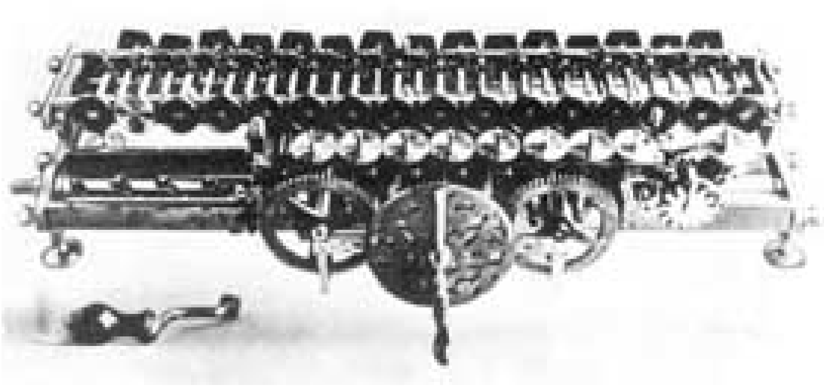
מהו השורש הריבועי של 1-? מהו $\sqrt{-1}$?

כמובן שהתשובה אינה יכולה להיות 1+ או 1- , כיוון שהריבוע של המספרים האלו הוא 1+, ולכן הפתרון היה להמציא מספר חדש, המכונה 'מספר מדומה'. טבעו המוזר של המספר המדומה תואר על ידי לייבניץ שהיה גם תיאולוג בעל שם:

"המספר המדומה הוא מפלט נפלא של הרוח האלוהית, כמעט יצור ביניים בין היש והאלא-יש."

נוסף לפעילותו המדעית בתחומים שהוזכרו, הקדיש לייבניץ את מיטב מאמציו לבניית מכונת חישוב. בשנת 1673 הציג בפני "החברה המלכותית הבריטית" דגם של מכונת חישוב, וכתוצאה מכך התקבל פה אחד כחבר בה. הוא שיפר את הדגם במשך שנים רבות לאחר מכן.

מכונת החישוב שלו אשר הכפילה בעזרת חיבור חוזר וחילקה בעזרת חיסור חוזר היתה מיועדת לשחרר את האנשים מלבזבז **"שעות כמו עבדים בעמל החישובים"** לפי דברי לייבניץ.



תגלית מתמטית אחרת שלייבניץ היה אחד מממציאיה, היא המצאת שיטת הספירה הבינארית, שיטה שבה משתמשים רק בשתי ספרות: 0 ו–1.

לנו, בעידן המחשבים, נראה מוזר שהוגה רעיון השיטה הבינארית וממציא מכונת החישוב המשוכללת לא יכול היה לאחד את שניהם ולהעלות את הרעיון של המחשב המודרני. אולם מצב הטכנולוגיה באותם הזמנים לא אפשר את המצאתו של המחשב המודרני, המשתמש בשיטה הבינארית.

אחד ממחוללי החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי והאלגברה של הלוגיקה,
אחד מממציאי שיטת הדטרמיננטים להתרת מערכת משוואות,
שיטת הספירה הבינארית וסימון מתמטי שנשאר בשימוש עד היום,
תומך נלהב בשפה מדעית סימבולית,
בונה מכונת החישוב המשוכללת ביותר בתקופתו, יוזם הקמת אקדמיות מדעיות,
מקדם של פרוייקטים הנדסיים מקוריים, מנהל ספריות, פיזיקאי, חוקר מדעי הטבע, דיפלומט והיסטוריון – בקיצור **"לייבניץ מהווה לבדו אקדמיה שלמה"** כפי שאמר עליו פרדריך מלך פרוסיה.

גוטפריד לייבניץ היה יועצם של דוכסים ואלקטורים, אנשים מאד מכובדים, בעלי השפעה גדולה באירופה של אותם הזמנים. כבוד גדול אבל למי ?
את שמם של הדוכסים החשובים אנחנו לא זוכרים כעת אבל את שמו של לייבניץ...
אומרים שלזכר חכמים אין צורך להקים אנדרטאות!

בחלק הבא של המאמר נעסוק בנושאים הבאים: סדרה שאותה חקר לייבניץ, משולש הנושא את שמו, וסוג מסוים של מספרים הקשורים למשולש: המספרים המשולשים.
אתם מוזמנים לחשוב כיצד לשבץ רעיונות אלו בשיעוריכם.

על הסדרה

כפי שנאמר, לייבניץ נפגש בפריס עם המתמטיקאי הויגנס. באחד המפגשים הראשונים שלהם הויגנס, שרצה לבדוק את לייבניץ, הציב לו אתגר: לנסות למצוא את סכום הסדרה האינסופית הבאה:

$$S=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\dots$$

לייבניץ התבונן ב:

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\dots$$

הוא שם לב שניתן לרשום כך:

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\dots$$

הרעיון של לייבניץ היה לכתוב כל איבר כך:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

ובאופן כללי:

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

ואז:

$$\frac{1}{2}S=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\dots$$

למעשה $\frac{1}{2}S = 2$ ואז $S = 2$

הערה: ניתן להציג בפני התלמידים את שאלת החקר הבאה: מצאו זוגות של מספרים, שמכפלתם שווה להפרש.

משולש לייבניץ

מתוך אנלוגיה למשולש פסקל, לייבניץ הרכיב משולש משלו. שורות המשולש מהוות סדרות אינסופיות, שאותן חקר המתמטיקאי. אם נתבונן במשולש, נראה שהשורה השנייה שלו היא הסדרה שנידונה בסעיף הקודם, מוכפלת ב – 1/2.

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	....
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	....	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}$	....		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}$	....			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}$	....				
$\frac{1}{6}$	....					

המשולש מורכב משברי יחידה (המונה של השבר הוא אחד). בשורה הראשונה של המשולש ניתן להבחין במספרים ההופכים למספרים השלמים. כדי לקבל כל מספר אחר של המשולש, החל מהשורה השנייה, צריך לחסר מהמספר שמעליו את המספר שלימין המספר שמעליו.

דוגמה:

א. איך נקבל את המספרים מהשורה השנייה?

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}$$

....

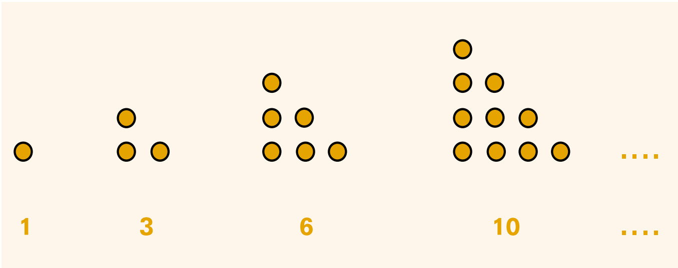
ב. איך נקבל את המספרים מהשורה השלישית?

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30}$$
$$\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{60}$$

....

מספרים משולשים

האיברים של הסדרה שלייבניץ מצא את סכומם הם המספרים ההפכיים של המספרים המשולשים, מספרים שנחקרו על ידי התלמידים של פיתגורס עוד במאה השישית לפני הספירה. התיאור הגרפי של המספרים האלו הוא:



ניתן לראות שכל מספר משולש הוא סכום חלקי של המספרים השלמים:

3=1+2

6=1+2+3

10=1+2+3+4

15=1+2+3+4+5

....

כדי למצוא מספר הנמצא במקום ה-n בסדרה צריך לחשב את הסכום n+...+1+2+3

לדוגמה, כדי למצוא את המספר הנמצא במקום החמישי צריך לחשב את הסכום 1+2+3+4+5

דרך אחת לחישוב סכום זה היא הדרך הבאה:

1+2+3+4+5

5+4+3+2+1

6+6+6+6+6=5 X 6

התקבל הסכום הדרוש מוכפל ב-2 ולכן התשובה היא:

$$1+2+3+4+5=\frac{5\cdot 6}{2}$$

ובאופן כללי :

$$1+2+3+4+5+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

על תכונות המספרים המשולשים ניתן להרחיב את הדיבור. כאן נציג רק בעיה אחת, שמצאה חן בעיני התלמידים.

בעיית הכיתה החדשה

ביום הראשון ללימודים נכנסה לכיתה מורה חדשה. היא ביקשה מהתלמידים לעזור לה לזכור את שמותיהם. התלמיד הראשון התבקש לומר את שמו, התלמיד השני חזר על השם של התלמיד הראשון והוסיף את שמו, התלמיד השלישי חזר על שמות שני התלמידים הקודמים והוסיף את שמו.

לדוגמה:

רן אמר: *רן*; דוד אמר: *רן, דוד*;

קרן אמרה: *רן, דוד, קרן*;

נטשה אמרה: *רן, דוד, קרן, נטשה*.

לאחר שכל התלמידים אמרו את שמם, המורה חזרה על שמות כל התלמידים והוסיפה את שמה. כמה שמות נאמרו, אם מספר התלמידים בכיתה הוא 39?

(תשובה: 820 שמות)

תודה לד"ר בנו ארבל

מאוניברסיטת ת"א, ומכללת בית-ברל על עזרתו והארותיו.

מקורות:

1. ש. אונגורו, מבוא לתולדות המתמטיקה, משרד הבטחון , 1989
2. E.J.Aiton, Leibniz: *A Biography*, Bristol 1984
3. M. Dascal , Leibniz: *Language , Ssigns and Thought* , Amsterdam 1987
4. *Dictionary of Scientific Biography* N.Y. 1970-1990
5. R.Calinger , *A Contextual History of Mathematics*, N.J. 1999
6. Carl B.Boyer, *A History of Mathematics*, J.Willey & Sons ,1944

אתר טיולים מומלץ, בהנובר!

מקום המגורים המפואר של לייבניץ בספריה

LEIBNIZ HAUS

נהרס בזמן מלחמת העולם השנייה ,אבל העתק המדויק שלו נחנך ב- 1983 וניתן לבקר בו.