אפשר גם אחרת

מודל העוגה המלבנית, חילוק שברים

ד"ר מיכאל קורן, משרד החינוך

1. רקע

ראינו במאמר "מודל העוגה המלבנית לשברים פשוטים" (מספר חזק 2000, גליון 2) כיצד ניתן להרחיב את פעולת החיבור ממספרים טבעיים לשברים. ההרחבה נעשית על ידי בחירה של אחת ממשמעויות החיבור: כצירוף של כמויות או כהוספה של כמות לכמות, תוך שימוש במודל העוגה המלבנית.

במודל העוגה המלבנית מייצגים את השלם במלבן, **שמספר משבצותיו מאפשר להציג בקלות את השברים שבשאלה.** לדוגמה, אם מופיעים בשאלה שלישים, ייבחר מלבן שמספר המשבצות בו יתחלק ב- 3, אם מופיעות גם חמישיות, מספר המשבצות שנבחר יתחלק גם בחמש (ולכן ב 15).

הרחבת החיבור לשברים שומרת על משמעות החיבור. מאחר והן הצירוף והן ההוספה הן משמעויות מאוד אינטואיטיביות של החיבור, תלמידים מקבלים את הרחבת החיבור לשברים כמהלך טבעי. הרחבת החיסור מתבצעת באופן דומה, תוך שימוש במשמעות החיסור כהפחתה (סילוק) או כהשוואה בין גדלים, ולכן גם הרחבת החיסור לשברים מתקבלת כמהלך טבעי.

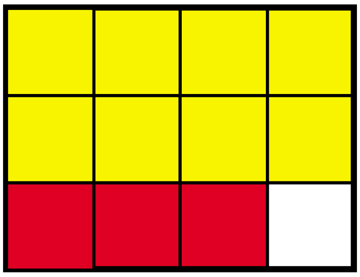
מודל העוגה המלבנית יודגם בשתי הבעיות הבאות:

1. דינה אכלה רבע של עוגה, דני אכל שני שליש של אותה עוגה, איזה חלק של העוגה אכלו שניהם יחד?
2. שטח של חלקה אחת שני שליש דונם. שטח של חלקה שנייה רבע דונם. בכמה גדולה החלקה הראשונה מהשנייה?

בעיה 1 עוסקת בחיבור כצירוף, בעיה 2 עוסקת בחיסור כהשוואה.
שתיהן תיפתרנה במודל העוגה המלבנית באותה דרך:
נייצג את היחידה במלבן שקל לחלקו ל 3 וקל ולחלקו ל 4 (דהיינו, למלבן שקל להציג בו שלישים וקל להציג בו רבעים). נבחר במלבן של 12 משבצות (ניתן לבחור בכל כפולה של 12). נסמן במלבן את שני השלישים ואת הרבע. במלבן שבחרנו שני שליש הם 8 משבצות ורבע הוא 3 משבצות, ולכן סכומם הוא 11 משבצות. כל משבצת היא שתים עשרית, ולכן התשובה לבעיה **1** היא $\frac{11}{12}$, כלומר דינה ודני אכלו ביחד $\frac{11}{12}$ של העוגה.

בבעיה **2** שטח החלקה הראשונה 8 משבצות, שטח השנייה 3 משבצות ולכן החלקה הראשונה גדולה מהשנייה ב 5 משבצות שהן $\frac{5}{12}$ דונם.

שני הפתרונות מודגמים בציור 1:



ציור 1

במאמר זה נראה כיצד להרחיב את פעולת החילוק מהמספרים הטבעיים לשברים בעזרת מודל העוגה המלבנית.

שתי משמעויות עיקריות של החילוק במספרים הטבעיים הן **חילוק לחלקים** ו**חילוק להכלה**. בסעיפים הבאים נעסוק בכל אחת ממשמעויות אלו, תחילה בטבעיים ואחר כך בשברים.

בכל מהלך בהרחבה של פעולת חשבון מהטבעים לשברים יש ארבעה שלבים:

- שלב א- בשלב זה פותרים בעיות מילוליות, ואחרי הפתרון רושמים את התרגיל המתאים עם התוצאה שהתקבלה מפתרון הבעיה.
- שלב ב- בשלב זה, כדי לפתור תרגיל בוחרים בעיה מתאימה, ופתרון הבעיה נותן את פתרון התרגיל.
- שלב ג- בשלב זה מפתחים כלל לחישוב הפעולה. (ניסוח הכלל יכול להיות פורמלי או בלשון המודל.)
- שלב ד- פותרים תרגילים כדי למצוא תשובות לבעיות מילוליות. (שלב זה אינו מתואר במאמר).

שלבים אלה אינם מיוחדים להוראת השברים. כבר בכיתה א לימוד החיבור מתחיל מפתרון בעיות בעזרת ידע אחר (ספירה או צירוף בדידים) ולאחר שהחיבור נלמד, משתמשים בחיבור לפתרון בעיות.

2. חילוק לחלקים

בחילוק לחלקים נתונה כמות שיש לחלקה למספר ידוע של חלקים שווים. תוצאת הפעולה החשבונית של החילוק אומרת לנו, כמה יהיה בכל חלק. זו אולי המשמעות האינטואיטיבית יותר של חילוק.
דוגמאות:

2.1 אמא רוצה לחלק 6 חפיסות שוקולד שווה בשווה לשלושת ילדיה. כמה יקבל כל ילד?

2.2 מחלקים את הכיתה לחמש קבוצות שוות בשיעור התעמלות. כמה ילדים בכל קבוצה, אם בכיתה 30 תלמידים?

2.3 אורזים 264 תפוזים ב6 ארגזים. כמה תפוזים יהיו בכל ארגז?

2.4 מחלקים שדה של 10 דונם לחמש חלקות שוות. מה גודל כל חלקה?

ניתן להרחיב בטבעיות את המשמעות של חילוק לחלקים כאשר הכמות הנתונה והמנה יכולים להיות שברים.

דוגמאות:

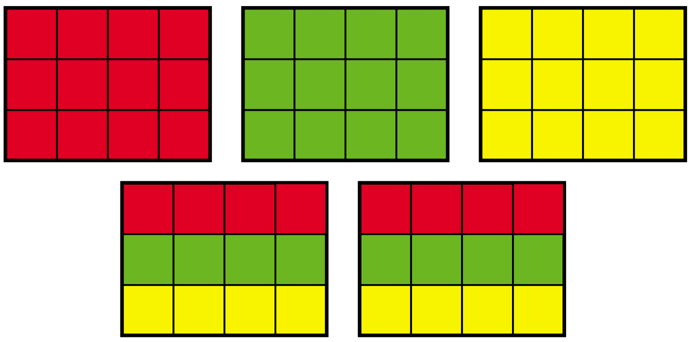
2.5 אמא רוצה לחלק 5 חפיסות שוקולד שווה בשווה לשלושת ילדיה. כמה יקבל כל ילד?

2.6 מחלקים סכום כסף לחמש מעטפות שווה בשווה. כמה שקלים יהיו בכל מעטפה, אם חולקו 17 ש"ח?

2.7 מחלקים חצי ק"ג אורז שווה בשווה ל 6 צלוחיות. כמה ק"ג אורז יהיה בכל צלוחית?

2.8 מחלקים שדה של חצי דונם לשש חלקות שוות. מה גודל כל חלקה?

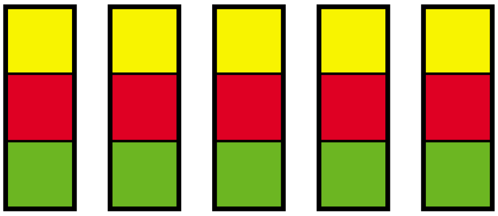
פתרון אפשרי לבעיה 2.5: מאחר ומדובר בחלוקה ל 3, לפי עקרון העוגה המלבנית, נבחר במלבנים שמספר המשבצות שלהם מתחלק ל 3. לצורך הדוגמה, בחרנו במלבנים של 12 משבצות. (כל מכפלה של 3 היתה מתאימה.) בציור 2 כל צבע מסמן מנה של ילד. כל ילד מקבל חפיסה שלמה, ואת שתי החפיסות הנותרות מחלקים כל אחת לשלושה חלקים שווים. כל ילד מקבל נוסף לחפיסה השלמה גם שתי שורות של ארבע קוביות. ילד אחד מקבל חפיסה צהובה ועוד שתי שורות צהובות, השני – חפיסה ירוקה ועוד שתי שורות ירוקות, והשלישי את היתרה. כל ילד מקבל לפי פתרון זה חפיסה שלמה ועוד שני שליש של חפיסה, או חמישה שלישים של חפיסה. (או חפיסה ושמונה שתים עשריות של חפיסה...).



ציור 2

הערה: כדאי לוודא שהתלמידים מבינים בשלב זה, מדוע אחד ושני שליש שווים לחמישה שלישים.

פתרון אחר לבעיה זו הוא לחלק את כל חמש החפיסות לשלישים, ולתת לכל ילד שורה מכל חפיסה, כמודגם בציור 3. הפעם בחרנו, לשם הגוון, במלבן של שלוש משבצות לייצג כל חפיסת שוקולד.



ציור 3

בשני המקרים נקבל כי אפשר להציג את המנה שמקבל כל ילד כ–

$$5:3=\frac{5}{3}$$

הערות:

א. הפתרון מבוסס על ההבנה, שהשאלה כמה שוקולד יקבל כל ילד היא בעצם כמה חפיסות שוקולד הוא יקבל, דהיינו שחפיסת שוקולד היא השלם (או בניסוח אחר, היחידה). ייתכן שהיה צורך להבהיר הבנה זו בכיתה.

ב. ייתכן שתלמידים שונים יבחרו מלבנים שונים, וטוב שכך. לכן אין להרתע מפתרונות שונים לבעיה אחת, שבכל אחד מהם נבחר שלם אחר.

כפתרון לבעיה 2.6 נקבל, כי בכל מעטפה יהיו 3 שקלים ועוד שתי חמישיות שקל או, $\frac{17}{5}$ ש"ח.

גם כאן, נוכל לרשום כי $17:5=3\frac{2}{5}$ או כי $17:5=\frac{17}{5}$.

הערה: מאחר ובשקלים יש שם למאית השקל, אגורות, נוכל לנסח את התשובה גם כ–3 שקלים ו–40 אגורות בכל מעטפה, שכן חמישית של 100 אגורות הם 20 אגורות. ולכן שתי חמישיות שקל הן 40 אגורות.

מסקנה חשובה מבעיות שבהן המחלק והמחולק הם מספרים טבעיים היא שלשבר יש משמעות נוספת, שאינה קשורה בשברי היחידה: אם עד כה $\frac{3}{5}$ התפרש כ–3 חמישיות או $3\cdot\frac{1}{5}$, הרי שבבעיות כמו אלו ראינו כי $\frac{3}{5}=3:5$, דהיינו אפשר לראות את השבר $\frac{3}{5}$ גם כחילוק של 3 ל–5. או, בניסוח כללי

השבר $\frac{a}{b}$ הוא גם המנה $a:b$

את המסקנה האחרונה נהוג לנסח גם כך: קו השבר הוא גם סימן חילוק.

כעת נעבור לשאלות **2.7 ו–2.8** בשאלות אלו המחולק הוא שבר, ולכן הפתרון מורכב יותר, ויש לציין במפורש את השלם.

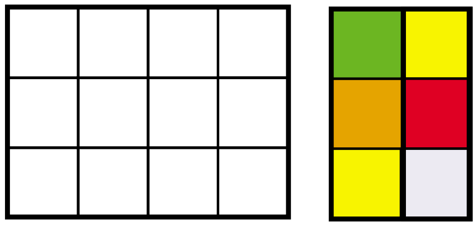
בשאלות אלו, כדי להציג את החצי (חצי ק"ג או חצי דונם) צריך לבחור קודם את השלם (הקילוגרם או הדונם). בבעיות הקודמות השלם היה ברור מתוך הבעיה עצמה ומציור הבעיה.

כאשר המחולק הוא שבר, חשוב להראות בציור את השלם, ולא רק את המחולק.

אנחנו מציעים לקבוע בכיתה הסכם לגבי סדר הצגת המרכיבים של הציור לפתרון בבעיות בחילוק עם מחולק שאינו טבעי. במאמר זה המלבן השמאלי ייצג תמיד את השלם. אפשר גם לרשום מתחת לכל מלבן את תפקידו (השלם, המחולק).

נחזור לפתרון שתי הבעיות **2.7 ו–2.8**: על פי מודל העוגה המלבנית נבחר כשלם במלבן שנוח לחלק חצי שלו ל 6. בחרנו מלבן של 12 משבצות. בציור 4 המלבן הלא צבוע הוא השלם (או מלבן היחידה שבחרנו.

המלבן הצבוע מייצג חצי. את חצי המלבן יש לחלק ל 6 (מספר הצלוחיות בשאלה **2.7** או מספר החלקות בשאלה **2.8**)



ציור 4

ולכן התשובה לשאלה 2.7 היא שתים עשרית ק"ג אורז בצלוחית והתשובה בשאלה 2.8 היא שתים עשרית דונם שטח כל חלקה.

התשובה היא לכן: $\frac{1}{2}:6=\frac{1}{12}$

הערות לבעיות 2.7 2.8:

- אפשר לפתור את שתי הבעיות גם במלבן של 6 משבצות. במקרה זה צריך לטפל בחצאי משבצות. לא נפרט פתרון זה. יש להדגיש כי מאחר והפותר בוחר בעצמו את המלבן, ייתכן גם שייבחר במלבן לא נוח לפתרון. במקרה כזה הפותר יכול להמשיך במלבן שבחר, או לוותר על המלבן ולבחור מלבן נוח יותר. ההסכם היחיד שעליו יש להקפיד הוא, **שבאותו פתרון לבעיה**, כל השברים הם חלקים של **אותו מלבן**.

- כדי להבליט שהערך של כל משבצת נקבע על ידי השלם, אפשר לסמן את החלק (החצי כאן) בתוך השלם. במקרה כזה מומלץ שהשלם יופיע הן בנפרד והן כשסימון החלק בתוכו.

נעבור לדוגמה נוספת:

2.9 יש לחלק שני שליש עוגה ל–5 ילדים. כמה יקבל כל אחד?

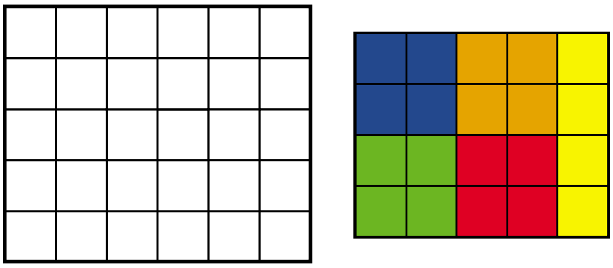
בציור 5 בחרנו כשלם במלבן של 30 משבצות, כדי שיהיה ניתן לייצג בקלות שלישים וחלוקה ל – 5.

(יכולנו לבחור מלבן של 15 משבצות, או כל כפולה אחרת של 15).

המלבן הצבוע הוא שני שלישים של השלם, כי יש בו 20 משבצות.

כל אחת מהמשבצות במלבן הצבוע היא $\frac{1}{30}$ מהעוגה והיא מייצגת פרוסה מהעוגה.

יש לחלק 20 פרוסות אלו ל – 5 ילדים, ולכן כל אחד יקבל 4 פרוסות (שימו לב שלא לכל המנות אותה צורה, אך כמובן שבכולן אותו מספר משבצות) 4 המשבצות הן $\frac{4}{30}$ של העוגה, נרשום $\frac{2}{3}:5=\frac{4}{30}$



ציור 5

טעות נפוצה היא קביעה כי כל ילד יקבל $\frac{4}{20}$ עוגה; היא נובעת מכך שמתייחסים למלבן הצבוע כאילו הוא היה השלם.

– אם נציג את הבעיה במלבן שבו 15 משבצות נקבל את התוצאה $\frac{2}{15}$, שהוא צמצום של השבר הראשון.

הערה: לאחר בחירת (המלבן) השלם, המחלק והמחולק הם כל אחד מספר טבעי של משבצות (פרוסות, בבעיה האחרונה), **והחילוק הוא כמו חילוק במספרים טבעיים**.

רק לאחר החילוק חוזרים לברר את הגודל שמייצגת כל פרוסה ומקבלים את התשובה המלאה. 4, המונה של התשובה בבעיה האחרונה, התקבל מחלוקת 20 פרוסות ל 5 ילדים. המכנה 30 התקבל מכך, שכל פרוסה הייתה $\frac{1}{30}$ של השלם.

3. חילוק להכלה

כדי לפתור גם בעיות שבהן המחלק הוא שבר, נעבור למשמעות החילוק כחילוק להכלה.

בחילוק להכלה נתונה כמות שיש לחלקה לחלקים שווים, וידוע מה צריך להיות **הגודל** של כל חלק. תוצאת הפעולה החשבונית של החילוק אומרת לנו, כמה חלקים מתקבלים.

דוגמאות:

3.1 אמא רוצה לחלק 6 טבלות שוקולד לילדים. היא נתנה 2 טבלות לכל ילד. לכמה ילדים חילקה את השוקולד?

3.2 בשיעור התעמלות מחלקים את הכיתה לקבוצות של 6 תלמידים. כמה קבוצות ייווצרו, אם בכיתה 30 תלמידים?

3.3 אורזים 264 תפוזים בארגזים, 44 תפוזים בארגז. כמה ארגזים יהיו?

3.4 מחלקים שדה של 10 דונם לחלקות של 5 דונם. כמה חלקות מתקבלות?

כדאי להשוות בכיתה את הבעיות 2.1 - 2.4 לבעיות 3.1–3.4 כדי להדגיש את השוני ביניהם. בבית הספר היסודי לא מומלץ להשתמש במונחים של חילוק לחלקים וחילוק להכלה, אך ההבחנה בין שני הסוגים, או לפחות מודעות לקיום שני סוגי בעיות, הנפתרות שתיהן על ידי חילוק, חשובה.

במשמעות של החילוק כחילוק להכלה, יש משמעות טבעית גם למחלק שהוא שבר.

דוגמאות:

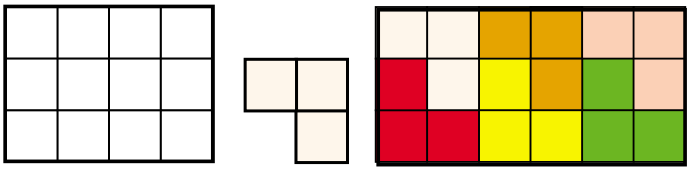
3.5 לסבא היו קילו וחצי סוכריות. הוא נתן לכל נכד רבע קילו סוכריות. כמה נכדים יש לסבא? אין שאלה 3.4 כי אין שאלה מקבילה ל 3.2 שבה מופיעים שברים, שכן אין משמעות ל"חצי ילד".

3.6 יש לחלק ארבעה וחצי קילו בוטנים לאריזות של רבע קילו. כמה אריזות נמלא?

3.7 מחלקים שדה של שני שליש דונם לחלקות של שישית דונם. כמה חלקות מקבלים?

גם בשאלות חילוק להכלה בשברים צריך לשים לב ליחידה. במקרים רבים היחידה תהיה יחידת מידה מקובלת (קילו או דונם).

פתרון אפשרי ל 3.5:
בציור 6 , המלבן הגדול שאינו צבוע מייצג את השלם (הקילו, במקרה זה). בחרנו לחלק ל 12 משבצות כדי שיהיה נוח להציג חצי שלו ורבע שלו. (כל כפולה של ארבע תתאים גם היא)

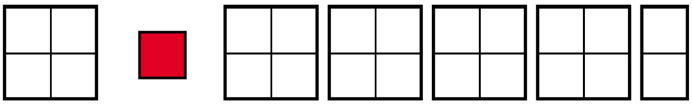

ציור 6

במלבן הצבוע יש 18 משבצות, ולכן הוא מייצג $1\frac{1}{2}$ ק"ג . בצורה הקטנה שלוש משבצות, והיא מתארת לכן רבע (ק"ג), גודל המנה שקיבל כל נכד. במלבן הצבוע רואים שיש 6 מנות, ולכן לסבא 6 נכדים. תרגיל חילוק מתאים הוא $1\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=6$, או $\frac{3}{2}:\frac{1}{4}=6$.

הערות:

1. כאשר מופיע בבעיה מספר גדול מ 1, בניסוח הבעיה טבעי להשתמש במספר מעורב. תרגיל החילוק שבו אנחנו מעוניינים, הוא חילוק שברים, ולא חילוק מספר מעורב בשבר. חשוב לוודא שהתלמידים מבינים מדוע, למשל, אחד וחצי שווה לשלושה חצאים. אין פירוש הדבר, שיש ללמד אלגוריתם למעבר ממספר מעורב לשבר.
2. בניגוד לציור הפתרון לבעיות חילוק לחלקים, כאן הוספנו לציור גם את המחלק (גודל המנה).

פתרון אפשרי לשאלה 3.6:
ניתן לפתור שאלה זו בדיוק כמו את שאלה 3.5. נראה כאן אפשרות קצת אחרת. בציור 7 נבחר את היחידה כמלבן בן 4 משבצות (המלבן השמאלי) להצגת ארבעה וחצי ק"ג נשתמש בארבע וחצי יחידות. בכל יחידה ארבעה רבעים, בחצי היחידה שני רבעים, ולכן מספר הרבעים בציור הוא 18. נחוצות, לכן, 18 אריזות של רבע קילו.

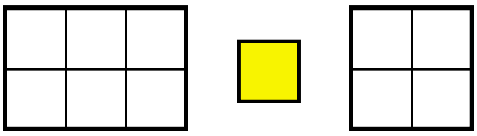

ציור 7

– גם כאן הוספנו לציור את גודל החלק, וזהו הריבוע האדום.
תרגיל חילוק מתאים הוא $4\frac{1}{2}:\frac{1}{4}=18$ כמו גם $\frac{9}{2}:\frac{1}{4}=18$ או $\frac{18}{4}:\frac{1}{4}=18$.

ההבדל בין הפתרון לשאלה 3.5 לבין הפתרון לשאלה 3.6 הוא גודל שכאן הרכבנו את המחולק ממלבנים המייצגים את היחידה, ולא כמלבן גדול אחד.

הערה: בבעיות של חילוק להכלה, נציג את היחידה, כמו בחילוק לחלקים, כמלבן השמאלי ביותר. נוסיף, מיד מימין לו את גודל החלק, ומימין לגודל החלק יופיע המחולק (הכמות שיש לחלק).

פתרון אפשרי לשאלה 3.7:
בציור 8 המלבן השמאלי הוא היחידה (דונם, במקרה זה). בחרנו כמובן מלבן שקל להראות בו שלישים ושישיות. המלבן האמצעי הוא גודל המחלק (גודל כל חלקה) והמלבן הימני הוא גודל השדה. במלבן הימני ניתן להכניס 4 מלבנים צהובים, ולכן מספר החלקות המבוקשות הוא 4.

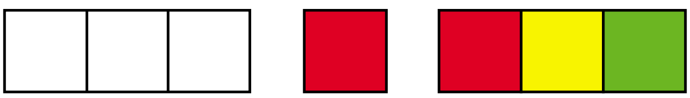

ציור 8

תרגיל חילוק מתאים הוא $\frac{2}{3}:\frac{1}{6}=4$.
הדיון הבא חשוב כדי להבהיר קושי, הכרוך בהדגמה גרפית לחילוק להכלה לאחר הדגמות גרפיות לחילוק לחלקים.

נתונות שתי בעיות:

א. חילקו מגרש של דונם אחד לשלושה יורשים שווה בשווה, כמה קיבל כל אחד?

ב. חילקו מגרש של דונם אחד לחלקות של שליש דונם, כמה חלקות התקבלו?


ציור 9

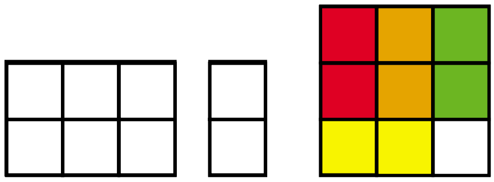
האם ציור 9 הוא ציור של בעיה א', או ציור של בעיה ב'?

התרגיל הפותר את בעיה 1 הוא $1 : 3 = \frac{1}{3}$. התרגיל הפותר את בעיה 2 הוא $1 : \frac{1}{3} = 3$. הציור יכול לתאר פתרון לכל אחת מהבעיות.

במאמר זה יצרנו הבחנה בין שני המקרים, בכך שבציור של חילוק להכלה הוספנו את גודל החלק.

עד כה, בכל הדוגמאות של חילוק להכלה בשברים, המנה היתה שלמה. בדוגמה הבאה גם המנה היא שבר:

3.8 חילקו שדה של דונם וחצי לחלקות של שליש דונם. כמה חלקות נוצרו?



ציור 10

פתרון אפשרי: המלבן השמאלי בציור 10 הוא הדונם. בחרנו מלבן שנוח להראות בו חצי ושליש. שטח השדה הוא המלבן הצבוע. המלבן האמצעי הוא גודל כל חלקה. מהצביעה רואים, שהשדה מתחלק ל 4 חלקות (ירוקה, כחולה, אדומה וצהובה). המשבצת שלא נצבעה היא מחצית החלקה (משבצת אחת מתוך שתי משבצות שהן גודל חלקה) ולכן נאמר כי נוצרו $4\frac{1}{2}$ חלקות וכי $1\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 4\frac{1}{2}$ או $\frac{3}{2} : \frac{1}{3} = 4\frac{1}{2}$ חשוב להדגיש שמחפשים את מספר החלקות, ולכן המשבצת האחת היא חצי (חלקה) ולא רבע (דונם).

נוסח אחר של שאלה **3.8** מראה סיבוך מסוים בפירוש הפתרון:

הבעיה: בכד יש ליטר וחצי חלב. יש למזוג את החלב לבקבוקים של שליש ליטר. כמה בקבוקים יתמלאו?

פתרון: הציור של הבעיה בניסוחה הראשון, וכן הפתרון, כמובן זהים. ממלאים 4 בקבוקים, ונשארת כמות שיכולה למלא חצי של בקבוק. נאמר כי יתמלאו $4\frac{1}{2}$ בקבוקים. במקרה זה מובן שמספר הבקבוקים להם **נזדקק** הוא 5 בקבוקים.

אפשר להימנע מדוגמה כזו, אם לדעת המורה אינה מתאימה לרמת הכיתה.

לפני שנמשיך בבעיות נוספות, נתרגל גם את "הכיוון ההפוך", הכוונה היא לפתרון תרגיל נתון על ידי בחירת בעיה מתאימה. לדוגמה:

בעיה **3.9**: פתרו את התרגיל $\frac{3}{2} : \frac{1}{3}$ על ידי בעיה מתאימה.

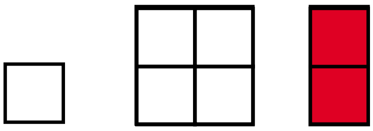
פתרון: נוכל לחזור למשל לבעיה 3.8 (בכיתה נחליף כמובן את התרגיל לתרגיל שלא הופיע בבעיה).

נמשיך כעת בפתרון שתי בעיות המייצגות שלב נוסף: מחלק גדול מהמחולק. על המורה לשקול האם להביא מקרים אלו בכיתה או לא.

בעיה **3.10** רוצים למלא בחלב בקבוקים, שקיבול כל אחד מהם הוא ארבעה ליטר. לרשותנו שני ליטר חלב. כמה בקבוקים נצליח למלא?

פתרון: מאחר ויש לנו פחות מהקיבול של בקבוק יחיד, לא נצליח למלא לגמרי אפילו בקבוק אחד.

בציור 11, כתמיד, היחידה היא המלבן השמאלי ביותר, והיא ליטר אחד. המלבן האמצעי הוא גודל המחלק והוא 4 ליטר(הבקבוק) והמלבן הימני הוא הכמות הנתונה 2 ליטר (המחולק). ב"שפת המודל" עלינו לסמן במחולק חלקים השווים למחלק. במקרה זה לא ניתן לסמן במחולק אפיל פעם אחת את המחלק ולכן התוצאה היא שבר קטן מאחד. המחולק כולו הוא רק חצי של המחלק. דרך שניה לחשוב על הפתרון היא לחשוב על המשמעות של החילוק להכלה במקרה של בקבוקים, כפי שהוא מתבצע במציאות – על ידי מזיגת חלב לבקבוקים. מפני שיש לנו רק שני ליטר חלב, אפילו בקבוק אחד לא יתמלא, אלא החלב ימלא חצי בקבוק.



ציור 11

התשובה היא אם כך חצי, והתרגיל הוא $2 : 4 = \frac{1}{2}$ (או, על פי הציור, גם $2 : 4 = \frac{2}{4}$).

מובן שלו היינו מתבקשים לפתור את התרגיל 2:4 בעזרת בעיה, היינו יכולים לבחור בבעיה של חילוק לחלקים, ואולם אילו הקיבול של בקבוק היה למשל, חצי ליטר, היינו חייבים להתמודד עם חילוק להכלה, כמו בבעיה הבאה:

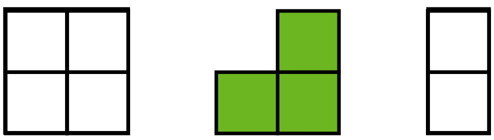
3.11 רוצים לחלק שדה לחלקות של שלושה רבעים דונם. גודל השדה חצי דונם. כמה חלקות יתקבלו?

פתרון: בציור 12 המלבן השמאלי הוא הדונם, הימני הוא גודל השדה (המחולק) והצורה האמצעית היא גודל חלקה (המחולק). שוב רואים שהשדה אינו גדול מספיק אפילו עבור חלקה אחת, וגודלו הוא שני שליש של חלקה.

הפתרון לכן הוא $\frac{1}{2} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$. כלומר, נקבל שני שליש של חלקה.

הבעיה האחרונה ממחישה שני קשיים בשימוש בשברים:

1. ה"חצי" בשאלה הוא חצי דונם. "שני שליש" תשובה הם שני שליש של חלקה. שניהם מתייחסים לאותו גודל (המלבן הימני בציור, המתאר את הנתון).
2. קשה לתלמידים להתרגל לאפשרות שגודל המחלק (החלקה של שלושה רבעים דונם בשאלה זו) גדול מהמחולק (חצי הדונם בשאלה זו).



ציור 12

הערות למהלך ההוראה עד לשלב זה:

1. המונחים "חילוק לחלקים" ו"חילוק להכלה" אינם מוצלחים, שכן בשני המקרים נוצרים חלקים מהכמות הנתונה. לזכירת המשמעות של חילוק להכלה כדאי להדגיש את הקשר למכלים בעלי קיבול קבוע.

2. ספק אם המונחים "חילוק לחלקים" ו"חילוק להכלה" מתאימים לבית הספר היסודי. במכללה השימוש המפורש במושגים אלו יכול לתרום לתהליך ההרחבה של החילוק לתחום השברים. עם זאת חשוב ביותר להקדיש די זמן להכרת שני סוגי החילוק ולפיתוח יכולתם של הלומדים במכללה להבחין ביניהם.
3. מבחינת הרחבת החילוק לשברים, יש לחילוק להכלה יתרון על החילוק לחלקים בשל האפשרות להציג מצבים שבהם גם המחלק הוא שבר. בחרנו בכל זאת להתחיל בחילוק לחלקים בגלל הקלות הרבה שבה תלמידים פותרים שאלות של חילוק לחלקים בשברים. החילוק לחלקים גם עוזר להרחיב את משמעות השבר מאוסף שברי יחידה לתוצאה של חילוק.

4. אלגוריתם לחילוק

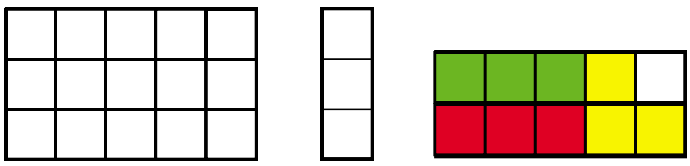
נחזור עכשיו ל"כיוון ההפוך" ונראה כיצד ניתן להגיע מבחירת בעיה לא רק לפתרון תרגיל מסוים, אלא להכללה המביאה לאלגוריתם לחילוק שברים.

בעיה **4.1**: פתרו את התרגיל $\frac{2}{3}:\frac{1}{5}$

פתרון אפשרי: נשאל את עצמנו כמה מנות של חמישית עוגה אפשר לקבל משני שליש עוגה.

נבחר לייצג את העוגה על ידי מלבן של 15 משבצות (בגלל השליש והחמישית). שני שליש יהיו מלבן של עשר משבצות. חמישית הוא צורה של שלוש משבצות. צורה של שלוש משבצות נכנסת בצורה של עשר משבצות שלוש פעמים, ונשארת עוד משבצת אחת, שהיא שליש של מנה.

בציור 13 רואים משמאל את העוגה השלמה, מימין את חלק העוגה שממנו יוצרים מנות (שני שליש של העוגה) ובמרכז את גודל המנה. מהצביעה רואים את התשובה, שלוש מנות ושליש המנה.



ציור 13

התשובה לתרגיל לכן היא כי $\frac{2}{3}:\frac{1}{5}=3\frac{1}{3}$, או $\frac{2}{3}:\frac{1}{5}=\frac{10}{3}$

לאחר שהתלמידים מתנסים בפתרון תרגילים על ידי מעבר לבעיה מתאימה, סיכום חשבוני של דרך הפתרון של בעיות כמו בעיה **4.1** יוביל לאלגוריתם (שונה מהמקובל) לחילוק שברים:

כדי לפתור את התרגיל $\frac{2}{3}:\frac{1}{5}$ בחרנו על פי המודל של העוגה המלבנית במלבן של 15 משבצות, זאת כדי שנוכל להציג גם את השלישים וגם את החמישית במספר שלם של משבצות. במלבן זה $\frac{2}{3}$ הם 10 משבצות ו$\frac{1}{5}$ היא 3 משבצות, ולכן המנה שיש לחשב שווה למנה בבעיה שבה המחלק והמחולק הם מספרים טבעיים: יש 10 פרוסות עוגה, ובכל מנה של עוגה יש שלוש פרוסות, כמה מנות עוגה יש?

התשובה היא לכן 10:3 . $\frac{10}{3}$ או $3\frac{1}{3}$ שימו לב לכך שבחילוק שברים בעלי אותו מכנה, המנה אינה תלויה כלל במכנה. מ– 10 פרוסות נוצרות $3\frac{1}{3}$ מנות של שלוש פרוסות, ללא כל קשר לגודל של הפרוסות. צריך רק לדעת שהן שוות זו לזו.

חילוק שברים בעלי אותו מכנה המנה אינה תלויה במכנה

מבחינה חשבונית, בחירת המלבן וייצוג השברים בעזרתו שקולה להעברת השברים לשברים בעלי אותו מכנה. המנה המבוקשת היא אז מנת המונים. האלגוריתם הוא אפוא:

למציאת המנה של שני שברים הצג את השברים כשברים בעלי אותו מכנה, וחלק את המונים זה בזה.

בניסוח אלגברי נקבל:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}:\frac{bc}{bd}=(ad):(bc)=\frac{ad}{bc}$$

הערות:

- כשהתלמידים יידעו לכפול שברים, יהיה המעבר מהכלל האחרון לכלל המקובל של כפל בהפכי צעד קל וטבעי, שכן השבר האחרון הוא בדיוק מכפלת $\frac{a}{b}$ ב $\frac{c}{d}$ או מכפלת המחולק בהפכי של המחלק.
- לתלמידים שמכירים כבר כפל שברים אפשר לפרש את חילוק המונים לאחר שהמכנים שווים במשמעות שלישית של החילוק, והיא, החילוק כעונה על השאלה "כמה פעמים" נכנס המחלק במחולק או פי כמה "גדול" המחולק מהמחלק. המרכאות בביטוי "כמה פעמים" באו להזכיר שהתשובה אינה תמיד מספר שלם של פעמים. המרכאות בביטוי "גדול" באו להזכיר שהמחולק יכול להיות קטן מהמחלק.

5. ומה הלאה?

ראינו כיצד ניתן ללמד חילוק שברים תוך שימוש במשמעויות שיש לחילוק בתחום המספרים הטבעיים, והרחבתן לחילוק שברים. לפני הוראת הכפל, ניתן להגיע לאלגוריתם לא שגרתי לחילוק (על ידי מעבר למכנה זהה) ולאחר הוראת הכפל ניתן להשלים את הוראת החילוק על ידי הוספת האלגוריתם המקובל של כפל בהפכי. לימוד החילוק קשה מלימוד החיבור מפני שבחיבור שתי המשמעויות החשובות נשמרות בהרחבת החיבור מהטבעיים לשברים, ואילו בחילוק, החילוק לחלקים אינטואיטיבי יותר מהחילוק להכלה, ואולם כאשר המחלק אינו שלם, הרחבת החילוק לחילוק בשברים טבעית יותר כשבוחרים בחילוק להכלה.

במאמר זה הרחבת החילוק לחילוק שברים התחילה בחילוק לחלקים, ועברה לחילוק להכלה רק כשהמחלק היה שבר. אפשר ללמד את הרחבת החילוק לשברים גם על סמך החילוק להכלה בלבד. אולם אז לא מנצלים את הקלות שבה תלמידים פותרים בעיות של חילוק לחלקים, כל עוד המחלק טבעי. מצד שני יש גם יתרון לשימוש במודל יחיד, ואין די התנסות להמלצה חד משמעית.
על הוראת הכפל ועל הסיבה לדחיית הוראתו כמעט לסוף פרק השברים, במאמר הבא.