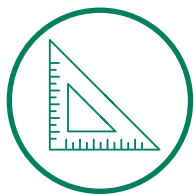


פינה דידקטית

## הנגשת בעיית חקר בעזרת גאוגברה

ד"ר ענת קלמר-שורץ  
מרצה לחינוך מתמטי  
באקדמית גליל מערבי ובמכללת אורנים

עידן טל  
מורה למתמטיקה  
ומומחה לשילוב גאוגברה  
בהוראת מתמטיקה



## הנגשת בעיית חקר בעזרת גאוגברה

ענת קלמר-שורץ ועידן טל

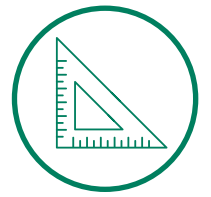
לעשות כללה תהליך של מספר פעילויות: בהתחלה התלמידים התבקשו לצייר חלקי בניינים באמצעות גאוגברה. לאחר מכן הם התבקשו לצייר שיקופים של חלקי הבניינים שציירו. משימה זו ניתנה לתלמידים לביצוע מבלי שעברו הכשרה מוקדמת בהפעלת כלי השיקוף בגאוגברה. בסיום המשימה ביצעו התלמידים מבדק ראשוני. בהמשך, הם קיבלו הדרכה בהפעלת כלי השיקוף בגאוגברה. לאחר מספר ימים התבקשו לחזור על משימת השיקוף, אך הפעם באמצעות הפעלת כלי השיקוף בגאוגברה. בסיום, התלמידים חזרו על המבדק. ממצאי המחקר מצביעים על כך, שהשימוש בגאוגברה קידם באופן משמעותי את הבנת נושא הטרנספורמציות הגאומטריות בקרב התלמידים ובמיוחד קידם את הבנת מושג השיקוף. המלצת החוקרים למורים היא: שיש ערך לשילוב גאוגברה בהוראה ובלמידה של טרנספורמציות גאומטריות. לאור תיאורים אלה, עולות השאלות הבאות: באיזה פורמט מתאים להציג לתלמידים בבית ספר יסודי את כלי הגאוגברה לצורך התמודדות עם בעיות חקר במתמטיקה? עד כמה צריך להבנות את פתרון הבעיה בכלי לפני הגשתה לתלמידים? באיזו מידה להכין עבורם את הכלי הממוחשב? ועד כמה ניתן לאפשר לתלמידים בעצמם להוסיף כלים בתוכנה, בהתאם לצורך שעולה אצלם? לדוגמה נציג בעיה מתפתחת, שבמקור הוצגה ללא מחשב ובאמצעותה נראה את האפשרויות להתמודדות עם הבעיה בשילוב גאוגברה.

### הבעיה

לפניכם שני קווים, שביניהם עובר קו שבור המכיל נקודת שבירה אחת ויוצר גבול בין חצרות של שתי משפחות. המטרה היא: ליצור קו ישר במקום הקו השבור באופן שבו יישמרו שטחי החצרות של שתי המשפחות. נשאלת השאלה: היכן יש לשרטט את הקו הישר המסמן את הגבול? (תמונה 1).

תוכנות גאומטריה דינאמית (Dynamic - DGS) הן תוכנות המאפשרות יצירה וחקר של בניות גאומטריות. בתוכנות אלה, התוצר הוויזואלי אינו ציור בודד של צורה גאומטרית, אלא תוצר שיכול לעבור טרנספורמציות תוך שמירה על התכונות שהוגדרו במהלך הבנייה. דוגמה אחת לתוכנה כזו היא גאוגברה. בשנים האחרונות פורסמו מחקרים לבחינת ההשפעה של שילוב תוכנת גאוגברה בתהליכי הוראה ולמידה בבתי ספר. חלק גדול מהמחקרים בדק תלמידים בבתי ספר על-יסודיים, אבל היו גם כאלה שבדקו את ההבנה של תלמידי בית הספר היסודי לאור למידה בשילוב גאוגברה. במחקר שפרסמו בו ולאנג (2016) נבחנה מידת ההשפעה של השימוש בגאוגברה על הבנת מושג הזווית בבתי ספר יסודיים במלזיה. במהלך תקופת המחקר, התבקשו המורים להשתמש בשישה יישומי גאוגברה שהוכנו עבורם מראש והותאמו לתכנית הלימודים. היישומים האלה כללו יצירת זוויות ומדידת זוויות במשולשים ובמצולעים משוכללים. הממצאים הראו, שהוראה בעזרת יישומים אלה בגאוגברה, היתה יעילה וסייעה להבנת מושג הזווית. החוקרים הסיקו שהתצוגה הגרפית המתאפשרת באמצעות הכלי הדינאמי, עולה לאין ערוך על השימוש הסטנדרטי בנייר ועיפרון. התלמידים ביקשו להמשיך ללמוד גאומטריה בדרך דינאמית זו גם בתום המחקר.

במחקר שפרסמו איסמעיל ורחמן (2017) נבחנה התפתחות החשיבה הגאומטרית של תלמידי כיתה ב', שלמדו על צורות דו-ממדיות ותלת-ממדיות באמצעות גאוגברה. המסקנות הצביעו על רמת חשיבה גאומטרית גבוהה של התלמידים וזאת על אף שהמבדקים עצמם נערכו באמצעות נייר ועיפרון ולא בדרך בה נלמד הנושא. סלורג'י ואו (2017) חקרו את השפעת הלמידה באמצעות גאוגברה על רמת ההבנה של מושג השיקוף (Geometrical Reflection). נבדקו 24 תלמידי כיתה א' מבית ספר בינלאומי שכלל תלמידים מארצות הברית, ניו זילנד, אנגליה, קוריאה והודו. המשימה שהם נדרשו



## תמונה 1:

הצגת הבעיה



## הצגת הבעיה בעזרת לוח וגיר

לפני כ- 20 שנים צולם שיעור ביפן בנושא שטח משולש. הכלים שעמדו לרשות התלמידים (כיתה ח) היו נייר, עפרון וסרגל. בשיעור ביפן, המורה הזכיר לתלמידים בעיה בה עסקו בשיעור קודם. הבעיה הקודמת הובילה את התלמידים למסקנה, ששטחים של משולשים שונים בעלי צלע משותפת וגובה באורך זהה לצלע זו, שווים ביניהם. לפתרון הבעיה החדשה, התלמידים קיבלו רמז לשלב את המסקנה אליה הגיעו בשיעור קודם. המורה הציג את הבעיה על הלוח (תמונה 2) ושאל היכן יש לשרטט את הקטע הישר המסמן את הגבול בין שתי החצרות. לאחר הבהרת הבעיה והקשבה למספר השערות שתלמידים העלו, המורה ביקש מהתלמידים לחשוב לבד על הבעיה. המורה צפה ועזר לתלמידים ברמזים שנתן לדרך הפתרון. לדוגמה, המורה שאל את אחד התלמידים: "האם ישנה שיטה המשתמשת בשטחים של משולשים?". בשלב מאוחר יותר, המורה הניח מספר כרטיסיות עם רמזים לשימוש התלמידים. התלמידים דנו בבעיה בינם לבין עצמם, או עם המורה והמורה הזמין חלק מהתלמידים לשרטט את פתרונותיהם על הלוח (סרט השיעור באתר המקושר).

## תמונה 2:

הצגת הבעיה על לוח (יפן)



## לאור הצגת הבעיה בעזרת לוח וגיר עולות השאלות

### הבאות:

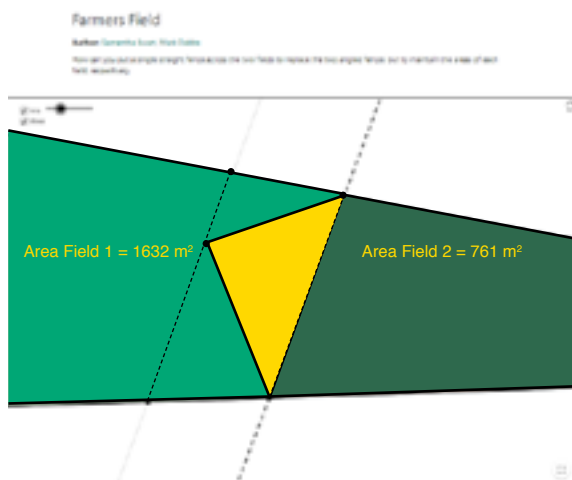
1. האם ההתמודדות עם פתרון הבעיה בסביבה דינאמית ממוחשבת שונה והינה בעלת פוטנציאל לפתח יותר תובנות, לעומת התהליך שעברו התלמידים בשיעור ביפן, בעזרת נייר ועפרון?
2. אילו כלים יש להעמיד בפני התלמידים בהתמודדותם עם הבעיה בסביבה המתוקשבת?
3. באיזו מידה להכין עבורם את הכלי הממוחשב?

## הצגת הבעיה בגאוגרמה

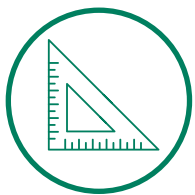
בפעילויות שיתופיות באתר גאוגרמה ישנן מספר גרסאות של בעיה זו (לדוגמה, קישור). הדרך בה מביאים את הכלי הדינאמי לתלמיד משותפת לכולן. בעצם הפתרון כבר נמצא בתוך היישומון ובכל הקלקה של הצעד הבא, ניתן להיווכח בפתרון המתהווה. לדוגמה, ראו תמונה 3.

## תמונה 3:

הבעיה ופתרונה בגאוגרמה



לרשות התלמיד מוצגות שתי תיבות בחירה בוליאניות  Ans (True/False) אשר מאפשרות להציג ולבטל  Move סימון ✓ בתוכן. סימון ✓ בתיבת הבחירה Move (הזזה), יגרום להצגת נקודה נוספת על המסך. הזזת נקודה זו מאפשרת לשנות את גודל שטחי השדות. סימון ✓ בתיבת הבחירה Ans (קיצור המילה "תשובה"), תוסיף תצוגת שני ישרים מקווקווים ומקבילים זה לזה וגם תוסיף



בתצוגה, בה ניתן לראות את שני הפתרונות לבעיה: פעם כשגוררים את נקודת השבר של הקו השבור כלפי מעלה ופעם כשגוררים אותו כלפי מטה.

### הצגת הבעיה לכיתות ה-1

תכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי מתייחסת לחישוב שטח משולש, כחלק ממטרות הוראת הגאומטריה בכיתה ה': "יודגש כי חישוב שטח ... של משולש יכול להיעשות לפי כל צלע והגובה המורד אליה. לכן, למשל, במשולש שונה צלעות יש שלוש אפשרויות שונות לחישוב השטח." בציוני הדרך של תכנית הלימודים מוצגת השאלה הבאה:

### תמונה 5:

ציוני דרך לתכנית הלימודים, כיתה ה', עמוד 40



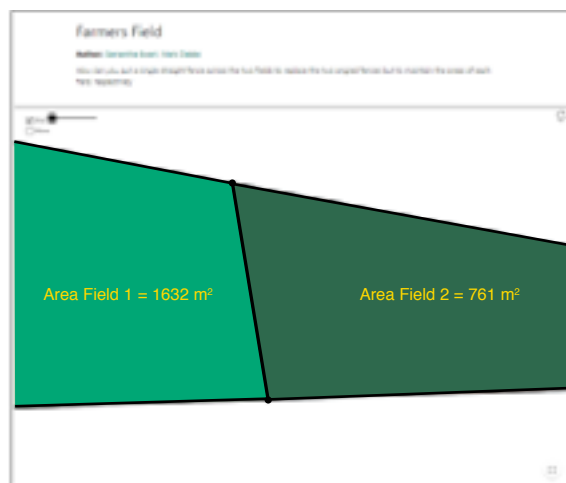
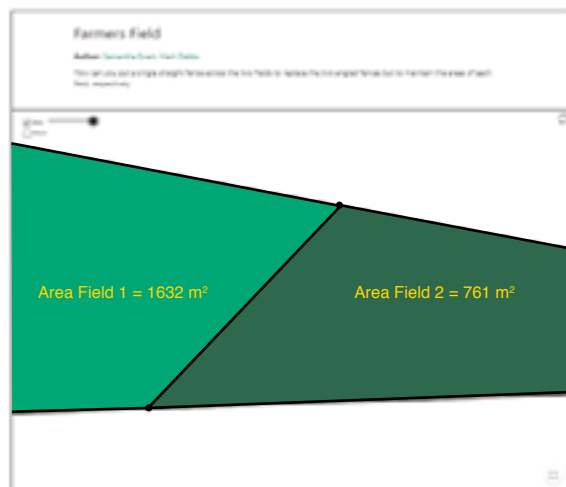
בהתאם לתכנית, נראה שניתן להתמודד עם בעיית החצרות הנ"ל כבר בכיתה ה' כשנותנים כלים מתאימים. גאוגברה, ככלי דינאמי ממוחשב עשויה להתאים. אך נשאלת השאלה: כיצד להנגיש לתלמידים את הגאוגברה לצורך התמודדות עם הבעיה, באופן שלא נוביל אותם לפתרון ומצד שני, לא נשאיר אותם בסביבה פתוחה מדי? כלומר, מהם הגבולות המתאימים להנגיש כלי דינאמי ממוחשב לתלמידים בבית ספר יסודי? לצורך הנגשת בעיה זו לתלמידי כיתה ה' באופן שתאפשר לתלמידים לגלות את מרחב הפתרון, אנו מציעים לבחון את הדרך הבאה:

הבעיה תוצג בגאוגברה, עם סרגל כלים פתוח בפני התלמיד. התלמיד יקבל שרטוט של מצב הבעיה עם אפשרות להזיז את קו החלוקה המקווקו ולשנות את הקו השבור המקורי (תמונה 6 מקושרת לקובץ גאוגברה דינאמי להתנסות).

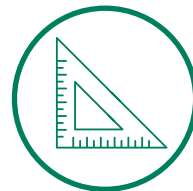
תצוגת סרגל גרירה אופקי אשר כיוונו ימינה ושמאלה, מאפשר לשנות את צורתו של הקו השבור המפריד בין השטחים, מבלי לשנות את גודלם. הקווים המקווקווים המקבילים, בנויים באופן כזה שאחד מהם מחבר שתי נקודות הנמצאות על הישרים הלא מקבילים אשר תוחמים את השדות, ואילו הישר המקווקו השני מקביל לישר המקווקו הראשון וגם עובר דרך נקודת השבר של הקו השבור המפריד בין השדות.

### תמונה 4:

קבלת הפתרונות

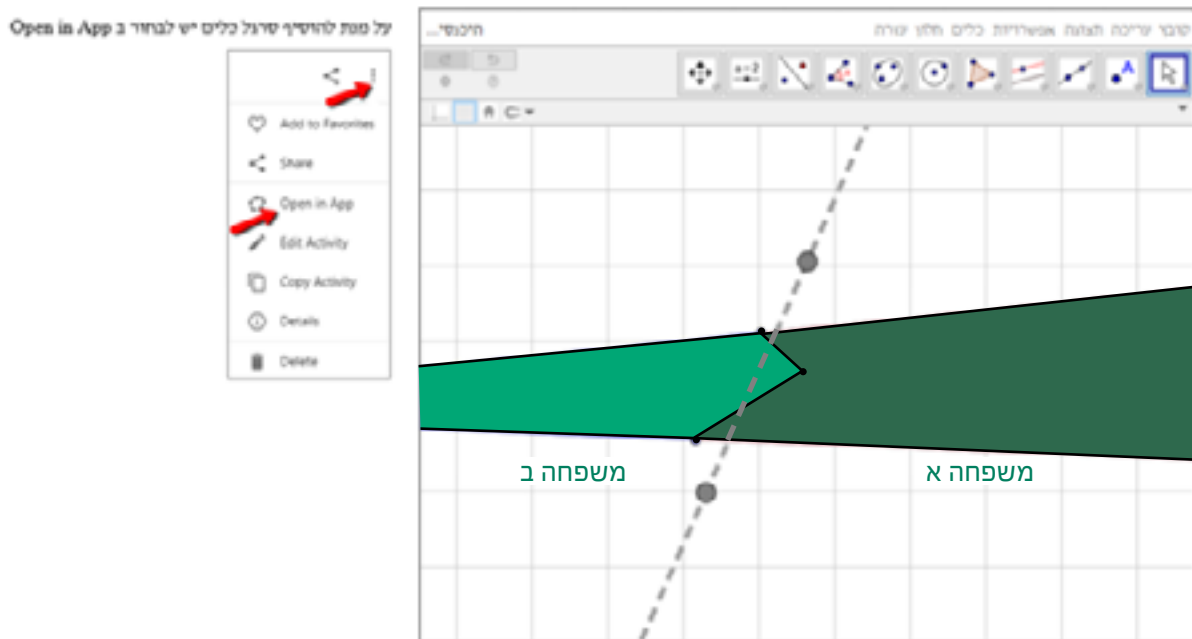


ביישומון זה התלמידים עוברים את שלבי הפתרון מבלי להתמודד עם הבעיה. תמונה 4 מציגה את השלב האחרון



## תמונה 6:

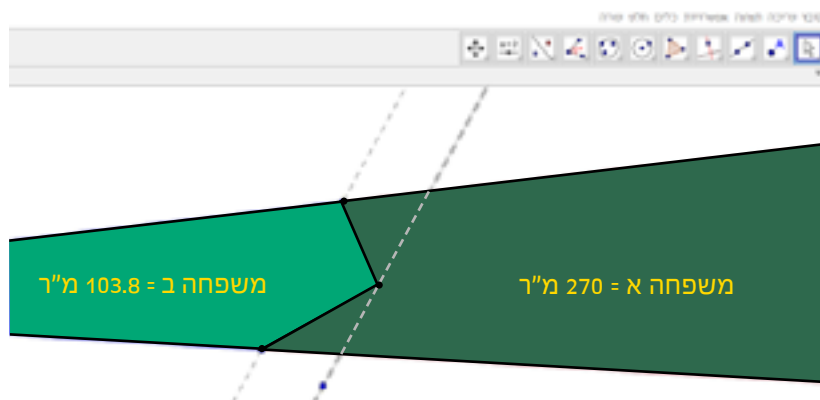
קישור לקובץ גאוגברה דינאמי המציג את הבעיה ומאפשר התנסות



ניתן להציג את הבעיה לאחר שיעורים שבהם התלמידים למדו על שימוש בסרגל הכלים, או שתוך כדי התנסות של התלמידים עם הבעיה, המורה יפתח חלונות הסבר לשילוב כלים רלוונטיים בגאוגברה לאור התפתחות החשיבה של התלמידים על פתרון הבעיה. כלומר, המורה יעבור בין התלמידים המתמודדים עם הבעיה בגאוגברה, יהיה קשוב לצרכים העולים בשיחות של התלמידים ולאור שיחות אלה יציע כלים רק כאשר הם רלוונטיים לתלמידים. לדוגמה, ניתן ללמד כעת את התלמידים לשרטט קווים מקבילים בגאוגברה, להוסיף את מידות השטח של כל חלק (תמונה 7) ועדיין יהיה בידם סרגל כלים להמשך בנייה וחקר.

## תמונה 7:

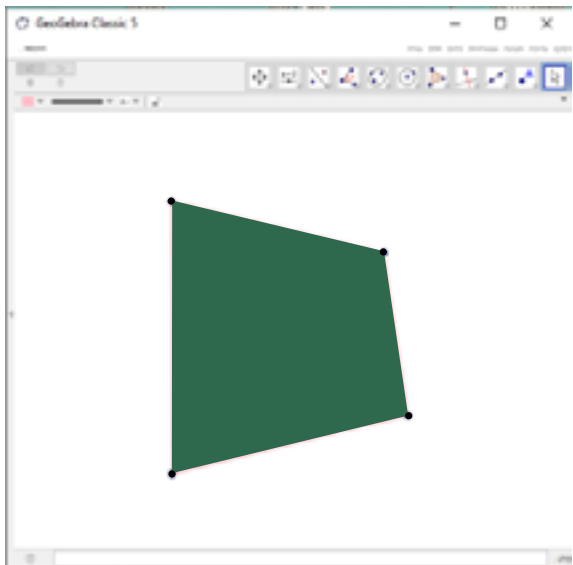
הוספת קווים מקבילים (קישור)





### תמונה 9א:

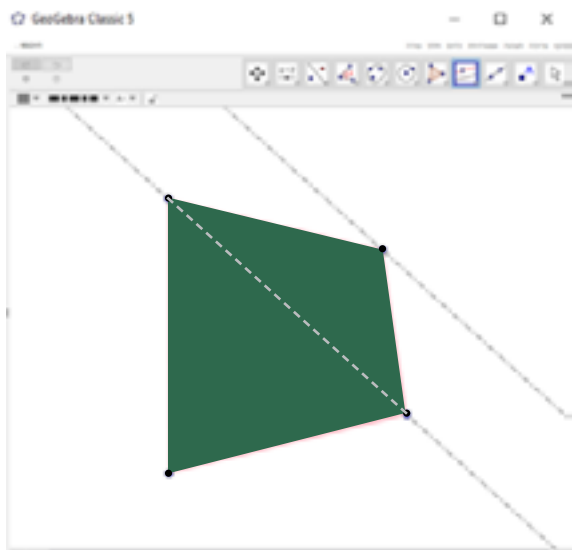
הפיכת המרובע הנתון למשולש בעל אותו שטח



התלמידים שלמדו בשלב קודם להוסיף קווים מקבילים בגאוגברה, יוכלו לבדוק את אותו רעיון בבעיית ההמשך (תמונות 9ב, 9ג).

### תמונה 9ב:

הפיכת מרובע למשולש בעל אותו שטח

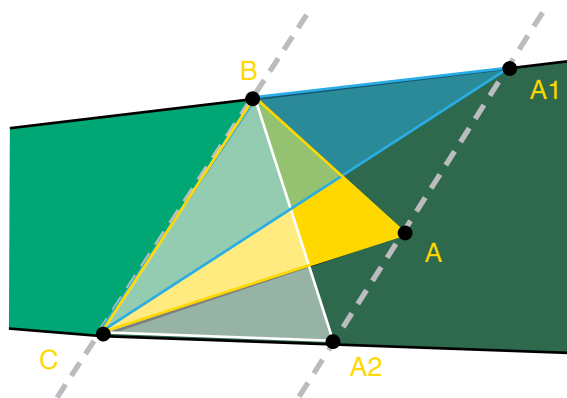
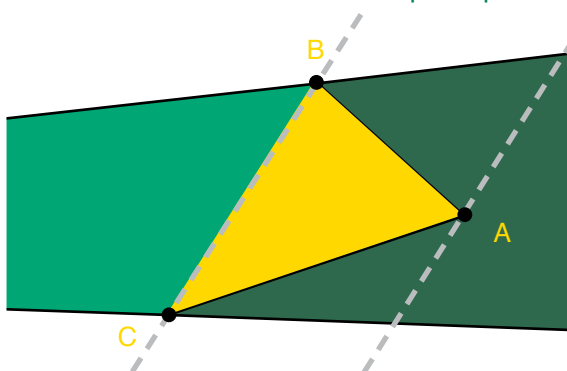


כהכנה לשיעור, חשוב שהמורה ילמד בעצמו את השימוש בסרגל הכלים ויתנסה בפתרון בעיות בסביבת גאוגברה. עבורו קיים מדריך לתוכנת גאוגברה, המכיל הסבר מפורט על הכלים כולל דוגמאות וצילומי מסך, כך שכל מורה ילמד בהתאם לצורך שלו. (טל, המדריך העברי לגאוגברה).

בניה כמו זו, מאפשרת להיווכח כי הזזת קודקוד A (תמונה 8) לאורך הקטע המקביל לצלע BC שומרת על שטח משולש ABC ולכן לא משנה את שטחי הצורות המשפחות כפי שיווכח התלמיד.

### תמונה 8:

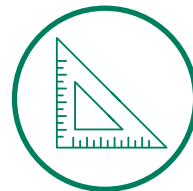
הוספת קווים מקבילים



### בעיית המשך

לאחר פתרון הבעיה ודיון בה, ניתן להמשיך לבעיה המתבססת על פתרון הבעיה הקודמת: כעת המטרה, להפוך מרובע למשולש, תוך שמירה על שטח המרובע המקורי (תמונה 9א).





## תוכנות לסיכום

באיזה פורמט מתאים להציג לתלמידים בבית ספר יסודי את כלי הגאוגברה לצורך התמודדות עם בעיות חקר במתמטיקה? עד כמה צריך להבנות פתרון בעיה בכלי לפני הגשתה לכיתה ומאיזה שלב לאפשר לתלמידים בעצמם להוסיף כלים בתוכנה בהתאם לצורך שעולה אצלם?

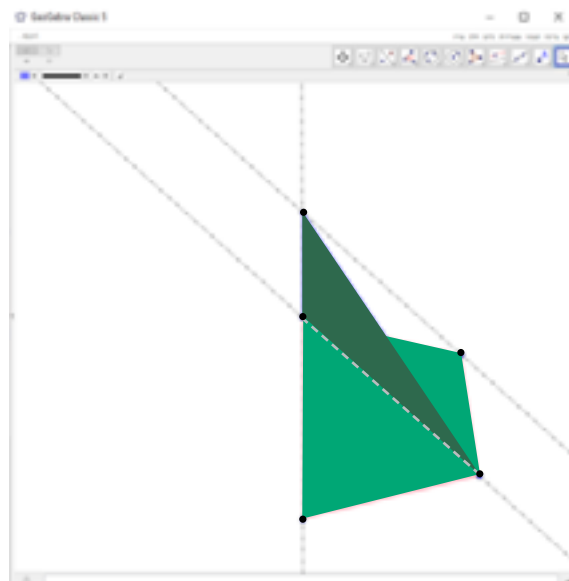
התחלנו משיעור ביפן עם נייר, עפרון וסרגל, בו המורה נתן לתלמידים להתמודד עם בעיה שהוצגה על הלוח והוסיף רמזים המתייחסים לשוויון שטחי משולשים בעלי צלע שווה וגובה שווה לאותה צלע. כלומר, הסתמכות על ידע קודם שנבנה.

הראינו דוגמה של פעילות שיתופית מאתר גאוגברה, לסביבת פתרון של אותה בעיה בתצוגה דינאמית. הרמזים שנתן המורה בשיעור ביפן הפכו לשרטוטי עזר דינאמיים שקיבלו התלמידים בגאוגברה. דוגמה זו בגאוגברה דומה לתהליכי החקר בשיעור ביפן. סרגל הכלים של גאוגברה לא היה פתוח בפני התלמידים והם לא יכלו ליזום הוספת קווי עזר, אלא יכלו להשתמש בכלים שהמורה התיר עבורם. בדומה לרמזים שנתן המורה ביפן.

בהצעה הנוכחית, ביקשנו לאפשר לתלמידים לקבוע את הדרך שלהם לפתרון, לתת להם אפשרות להוסיף בניות עזר לפי שיקולים שהם מפעילים מבלי שהמורה יוביל לדרך הפתרון. בתהליך זה המורה מלמד את התלמידים לשלב כלים רלוונטיים בגאוגברה בהתאם להתפתחות הפתרון שלהם ולפי הצורך הנשמע בשיח התלמידים בכיתה. אנחנו מציעים שלא להכין לתלמידים את הסביבה מראש, באופן שזו כבר לא תהיה התמודדות עם פתרון בעיה אלא הליכה לאור סימני דרך שהוכנו עבורם. ההצעה היא ללמד בהדרגה כלים רלוונטיים בגאוגברה, ברגע שאלה עולים כצורך של התלמידים לפתרון. המטרה היא לאפשר לתלמידים בהדרגה לשלב כלים אלה באופן עצמאי בבעיות ההמשך. במיוחד הדבר חשוב כהכנה לגאומטריה הנלמדת בחטיבת הביניים ובתיכון.

## תמונה 9:

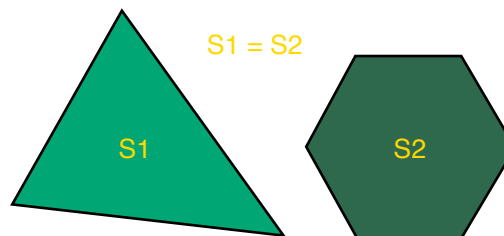
הפיכת מרובע למשולש בעל אותו שטח



ניתן להיכנס לשרטון המציג באמצעות אנימציה פתרון לבעיה דומה, בה המטרה לשנות משושה למחומש ואחר כך למרובע ולמשולש תוך שמירה על השטח המקורי (תמונה 10).

## תמונה 10:

קישור לשרטון הממחיש מעבר בין מצולעים תוך שמירה על השטח





## מקורות

- Boo, J.Y., & Leong, K. E. (2016). Teaching and learning geometry in primary school using Geogebra. In W. S. Yang, D. B. Meade, & K. Khairree (Eds.), Teaching and Learning Mathematics, Sciences and Engineering through Technology: Proceedings of the Twenty First Asian Technology Conference in Mathematics (pp. 289-300).
- Ismail, Z., & Rahman, S. N. A. (2017). Learning 2-dimensional and 3-dimensional geometry with Geogebra: Which would students do better? International Journal on Emerging Mathematics Education, 1(2), 121-134.
- Seloraji, P., & Eu, L. K. (2017). Students' performance in geometrical reflection using GeoGebra. Malaysian Online Journal of Educational Technology, 5(1), 65-77.

