רגע חושבים

אחד, שניים - נים

קורל פרסי
בוגרת אקדמית גורדון,
רכזת מתמטיקה בבית הספר פיכמן בחיפה

פרופ' איליה סיניצקי
ראש החוג לתואר שני בהוראת מתמטיקה
האקדמית גורדון - המכללה האקדמית לחינוך

אחד, שניים - נים

קורל פרסי ואיליה סיניצקי

הקדמה

מערכת החינוך רואה את פיתוח החשיבה של הלומד כאחת מהמטרות המרכזיות בתהליך הלמידה. תוכנית הלימודים במתמטיקה מעודדת שימוש בפעילויות חקר ככלי ומסגרת להבניית ידע משמעותי תוך עידוד סקרנותו של התלמיד (משרד החינוך, 2006). מחקרים מראים כי משחקי חשיבה לסוגיהם וחידות היגיון תורמים לפיתוח יכולות קוגניטיביות אצל תלמידים (Randel, Morris, Wetzel & Whitehill, 1992; Costa-Gomes, Crawford & Broseta, 2001)

במשחקים רבים הניצחון תלוי בשילוב הפעלת אסטרטגיה (דרך התנהגות מסוימת) ומזל כמו לדוגמה במשחקי הטלת קוביות וכדומה. בניגוד לכך, משחקי אסטרטגיה מוגדרים כמשחקים שעל מנת לנצח בהם יש צורך בקביעת תוכנית פעולה או אלגוריתם. במשחקי אסטרטגיה, לכל שחקן יש תמונה מלאה על מצב המשחק; משתתפי המשחק מבצעים בזה אחר זה את צעדיהם ובחירת הצעד הבא נגזרת ממצב המשחק הנוכחי, ולכן תוצאת המשחק תלויה אך ורק בהחלטות השחקנים (Conway, 2001).

מבוא

במאמר זה נעסוק במשחק אשר נכלל במשפחת משחקי האסטרטגיה "נים". קיימת סברה כי מקור המשחק בסין שכן הוא מזכיר מאד את המשחק הסיני *jiǎn-shízi* - "קטיפת אבנים". האזכורים הקדומים ביותר למשחק זה באירופה מיוחסים לתחילת המאה ה-16. משחקי "נים" קיימים במגוון גרסאות שונות אשר נדונו במקורות רבים (ר' למשל, Bogomolny, 2016; Freiberger, 2014). בין גרסאותיו השונות של משחק זה, ניתן למצוא גם גרסאות של משחקי מחשב לרבות אפשרות משחק נגד המחשב (למשל, כאן וכאן).

חוקי המשחק בגרסתו הקלאסית (למשל, כאן) מוגדרים באופן הבא:

- במשחק משתתפים שני שחקנים.
- קיימות מספר ערמות כך שבכל עֲרֵמָה יש מספר סופי כלשהו של פריטים.
- בכל תור יכול כל שחקן לקחת כל מספר פריטים לפי רצונו אבל רק מערמה אחת.
- ניתן לוותר על התור הראשון ולתת למתמודד השני להתחיל.
- המנצח הינו השחקן שהוציא את הפריט האחרון מהערמה האחרונה שלא הייתה ריקה, כלומר השחקן אשר לא משאיר חפצים כלל לשחקן האחר.

ניתן לראות בקלות כי במשחק "נים" קלאסי עם ערמה אחת בלבד, הדרך לניצחון הינה טריוויאלית: השחקן הראשון לוקח את כל הפריטים בערמה וכך מנצח. לעומת זאת, כאשר במשחק ישנן שתי ערמות המצב מורכב יותר: אם השחקן הראשון יפעל כמו במקרה הקודם וירוקן את הערמה הראשונה, אז השחקן השני ינצח על-ידי הוצאת כל הפריטים מהערמה השנייה. הבנת המשחק כבר בגרסה זו מאפשרת לגלות עקרונות החשובים לפיתוח אסטרטגיה לניצחון, ואנחנו ממליצים לחקור אותו עם התלמידים.

כאן ובהמשך המאמר נתאר מצב נתון של משחק עם כמה ערמות לפי מספר הפריטים בכל ערמה. כך, משמעות הסימון 1-3 כי ישנן שתי ערמות, אחת עם פריט אחד ואחרת עם שלושה פריטים. בנתונים אלה, אפשר בנקל לבדוק את כל האפשרויות. במקרה זה, לא כדאי לשחקן הראשון לרוקן אף ערמה, שכן אם יעשה זאת, השחקן השני ירוקן את הערמה הנותרת וינצח. לכן, השחקן הראשון יכול להשאיר אחד משני המצבים: 1-1 או 1-2. נשים לב כי ממצב 1-1 אין לשחקן השני ברירה אלא לרוקן את אחת הערמות ובכך לגרום לניצחונו של השחקן הראשון שבתורו ירוקן את הערמה האחרת. במידה והשחקן השני יקבל את מצב 1-2,

הוא בעצמו יחזיר לשחקן הראשון את המשחק במצב ערמות 1-1, ובכך מבטיח את נצחונו. כבר בהתנסויות אלו, התלמידים אמורים לגלות "משחקי תפקידים": "מה שעדיף לי לעשות במצב מסוים, גם לשחקן אחר כדאי לעשות בשלב זה (ואי-אפשר לסמוך על כך שישחק לא חכם)".

הרעיון משמעותי עוד יותר שכן השחקן שרוצה לנצח משאיר לשחקן האחר מצב 1-1 בו יתקיים שוויון בין שתי הערמות. התנסויות נוספות במשחקים עם שתי ערמות מביאות למסקנה כללית הרבה יותר: השחקן אשר ישמור על שוויון (סימטריה) בין הערמות אחרי צעדו ינצח, והשחקן אשר יפר את השוויון בין הערמות יפסיד במשחק. ולמה? כי בסופו של דבר, השחקן אשר "שובר שוויון" יאלץ לרוקן את אחת הערמות ומיד השחקן האחר יוציא את כל הפריטים מהערמה השנייה וינצח. מכאן נובע כי על השחקן הראשון להוציא פריטים מ"הערמה הגדולה" ולהביא לשוויון בין מספר הפריטים בשתי הערמות. במידה ובמצב ההתחלתי הערמות היו שוות בגודלן, השחקן הראשון יוותר על תורו כדי שהשחקן השני יפר את השוויון.

כאשר מספר הערמות גדול יותר משתיים, הפתרון מורכב הרבה יותר. בשנת 1901, צ'ארלס בוטון (Charles Bouton), פרופסור באוניברסיטת הרווארד, פרסם הוכחה לאסטרטגיית ניצחון במשחק "נים" הקלאסי. ההוכחה מבוססת על הצגת המספרים בכתיב בינארי ("Nim", ויקיפדיה, 2020) - נושא מרתק, אך נמצא מחוץ למסגרת המאמר הנוכחי. השראה נוספת לגרסה של המשחק "נים" המוצגת כאן היא "משחק 21" (סטופל והר-שפר, 2007). במשחק זה קיימת ערמה אחת עם 21 פריטים וניתן להוציא ממנה בכל מהלך בין פריט אחד לשלושה פריטים.

במאמר זה אנו נתמקד במשחק שהוא "שילוב הגרסאות": בדומה למשחק הקלאסי, נתונות מספר ערמות, אך קיימת הגבלה למספר הפריטים שמותר להוציא מערמה כלשהי בצעד נתון. עד לשלב ההכללה, נגביל כך שבכל צעד לוקחים פריט אחד או שניים בלבד. מכאן נגזר שם המשחק "אחד, שניים - נים", המוגדר על ידי הכללים הבאים:

- במשחק משתתפים שני שחקנים.
- קיימות מספר כלשהו של ערמות כך שבכל ערמה יש מספר סופי כלשהו של פריטים.
- בכל תור יכול שחקן לקחת פריט אחד או שניים בלבד וזאת רק מערמה אחת.
- למתמודד הראשון ניתנת האפשרות לוותר על התור ולתת למתמודד השני להתחיל.
- המנצח הינו השחקן שהוציא את הפריט האחרון מהערמה האחרונה שלא הייתה ריקה.

במאמר זה, נדון בהדרגה בסיטואציות שונות שעולות תוך כדי המשחק וכך נציג דרכים בהן יכולים התלמידים לגלות את האסטרטגיה לניצחון במשחק. נתחיל ממקרה של משחק עם ערמה אחת, נעבור למקרה עם שתי ערמות, ולאחר הבנת העקרונות המנחים נתקדם למשחק עם שלוש ערמות ולבסוף למקרה הכללי של מספר ערמות כלשהו. הניתוח מוצג בשפה של פריטים בערמות, ולצורך המחשה, אפשר לשחק עם תלמידים במשחק באמצעות גפרורים, עטים, גזרי נייר ועזרים נוספים.

פעילות 1

"אחד, שניים - נים" בערמה אחת

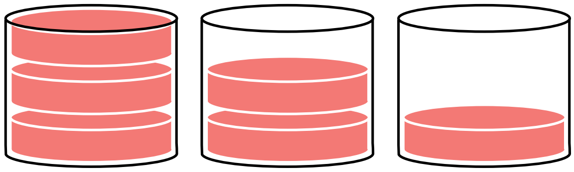
תחילה נעסוק בגרסה הפשוטה ביותר של המשחק אשר כוללת ערמה אחת בלבד ובה ישנם מספר מסוים של פריטים. נזכיר כי על-פי חוקי המשחק, ניתן להוציא בכל תור פריט אחד או שניים בלבד, והמנצח הינו זה אשר מוציא את הפריט האחרון אשר נותר בערמה.

מומלץ לתת לזוגות התלמידים לשחק במשחק זה עם מספר חפצים לא גדול (כעשרה - שניים עשר) וחשוב שיתעדו את מהלכיהם. באופן טבעי, השחקנים יתחילו מניסויים באופן כמעט אקראי, ויניחו כי "גורל המשחק" נקבע רק לקראת סופו. אך גם ראייה זו מאפשרת להגיע למסקנה חשובה (ר' איור 1):

- אם בערמה יש **פריט אחד** (מצב 1) או **שניים בלבד** (מצב 2), אז על השחקן שתורו הגיע, להוציא את הפריט הבודד או את שני הפריטים ובכך לנצח.

איור 1

משחק בערמה אחת. במצב 1 ובמצב 2 השחקן בתורו יכול לנצח. אם במצב 3 מוציאים פריט אחד או שניים, עוברים למצב 2 או למצב 1, וכך מפסידים.



ומה מסקנה זו אומרת לשחקן האחר? כמובן, שלא כדאי להשאיר אחרי צעדו פריט אחד או שניים. אך מה קורה כאשר נותרו שלושה פריטים בערמה? השחקן שתורו לפעול לא יוכל לנצח, שכן כל לקיחה תשאיר או פריט אחד (מצב 1) או שני פריטים (מצב 2), כלומר שני מצבים שהם "מצבי הניצחון" של השחקן האחר. אם במצב ההתחלתי של המשחק ישנם 3 פריטים, יש לוותר על התור הראשון, אך המסקנה למהלך המשחק היא ברורה:

- כאשר נשארים **שלושה פריטים** בערמה (מצב 3), השחקן שהגיע תורו, יאלץ להוציא פריט אחד או שניים ולהפסיד מכיוון שיותיר אחריו ערמה עם פריט אחד או שניים (שני מצבים המאפשרים ניצחון מיידי). בכך, מצב 3 הוא המצב שכדאי להשאיר לשחקן היריב, מי שיימצא בו, ימסור "מצב ניצחון" לשחקן אחר (ר' איור 1).

נדגיש, כי לצורך מציאת אסטרטגיית ניצחון במקרה הכללי אנו מאמצים שיטה המנתחת את המשחק "מהסוף", כלומר, החל מהצעד האחרון במשחק (הצעד המנצח). לפיכך, נתבונן במשחק עם ארבעה או חמישה פריטים בערמה. בשלב זה, על התלמידים להבין כי מטרת השחקן היא להגיע למצב מוכר וליישם את המסקנה הקודמת.

במשחק עם ארבעה או חמישה פריטים על השחקן הראשון להותיר אחריו ערמה עם שלושה פריטים (מצב 3), ולפיכך, עליו להוציא פריט אחד במקרה של ארבעה פריטים, או שניים במקרה ויש בהתחלה חמישה פריטים בערמה. במידה ושחקן יותיר ארבעה פריטים, השחקן האחר בתורו יבצע מעבר למצב 3 ובכך יבטיח את נצחונו.

עד כה, "מצב ניצחון" הוגדר כמצב בו השחקן משאיר ערמה ריקה, "בערמה יש אפס פריטים". אחרי ניתוח זה, מגלים התלמידים כי גם הותרת שלושה פריטים בערמה, כלומר מצב 0-3, הוא "מצב ניצחון".

התפתחות הדיון תלויה בתגובות התלמידים וייתכן שכדאי לדון במשחק עם ששה פריטים בדומה לדיון במקרה של שלושה פריטים. מטרת הדיון היא ההבנה המכלילה לגבי "מצב ניצחון". בתום דיון זה, התלמידים יסיקו כי:

- שחקן יימצא ב-"מצב ניצחון" אם לאחר תורו מספר הפריטים בערמה הינו 3, 6, 9 וכדומה, כלומר כאשר מספר הפריטים שהותיר **מתחלק ב-3 ללא שארית**. (נציין, כי המצב בו לא נותרו פריטים בערמה, "ערמה עם אפס פריטים", מתאים לתיאור כי 0 הינו כפולה של 3).

ניסוח זה (או דומה), בשפה של כפולות של 3, מאפשר לנסח גם דרכי התנהגות של שחקן עבור מספר פריטים כלשהו בערמה בכל שלב:

- כאשר בערמה יש 1, 4, 7 פריטים או כל מספר אחר שחלוקתו ב-3 משאירה שארית 1, על השחקן להוציא פריט אחד בלבד במטרה להותיר אחריו ערמה בה מספר הפריטים שווה לכפולה של 3 (עם הורדה הדרגתית בכל שלב עד לקיחת הפריט האחרון, "השארת אפס פריטים" בסוף).
- באופן דומה, כאשר בערמה של 2, 5, 8 פריטים או כל מספר אחר שחלוקתו ב-3 משאירה שארית 2, על השחקן להוציא שני פריטים במטרה לנצח.

נזכיר, כי אם המשחק מתחיל עם ערמה של 3, 6, 9, וכו' פריטים, על השחקן הראשון לוותר על התור הראשון לטובת יריבו.

מכאן ניתן להסיק ולהבין שאין חשיבות לכמות הפריטים בערמה אלא רק לשארית החלוקה של מספר הפריטים בערמה במספר 3.

מכאן נובעת אסטרטגיית הניצחון:

1. אם מספר הפריטים בערמה מתחלק ב-3 ללא שארית, השחקן יוותר על התור הראשון.
2. במידה ומספר הפריטים בערמה מתחלק ב-3 עם שארית (שונה מ-0), השחקן יוציא מספר פריטים

השווה לשארית זו ובכך יותיר את הערמה עם שארית 0.

3. יש לחזור על הפעולה בסעיף 2 בכל תור עד הניצחון.

נשים לב כי לפי האסטרטגיה הנ"ל, השחקן אשר מתחיל את המשחק הינו השחקן אשר ינצח[1].

נציין בסוף פעילות זו, כי קיימת אפשרות לשחק את המשחק גם כתנועות על המרצפות בחדר: המתמודדים עומדים פנים מול פנים במרחק מרצפות מסוים זה מזה. כל מתמודד בתורו יכול לבחור להתקדם צעד אחד או שניים בלבד לעבר המתמודד השני. המתמודד אשר אין לו אפשרות להתקדם, הפסיד.

פעילות 2

"אחד, שניים - נים" בשתי ערמות

כעת נעסוק במשחק שבו קיימות שתי ערמות של פריטים, כך שבכל ערמה ישנם מספר בלתי תלוי של פריטים. בדומה לפעילות 1, כל שחקן בתורו יכול לבחור להוציא פריט אחד או שניים בלבד אך רק מערמה אחת (לבחירתו). המטרה (בדומה למשחק עם ערמה אחת), היא להיות המתמודד אשר יוציא את הפריט האחרון מכלל הערמות, כלומר, לשחקן השני לא יישארו פריטים לקחת באף ערמה. נזכיר את הסימון המוסכם בפרק המבוא: 5-7 משמעותו כי באחת הערמות ישנם 5 פריטים ובאחרת 7 פריטים.

בפתיחת הדיון, נזכיר (ובמקרה הצורך, שוב נדגים) לתלמידים כי במשחק "נים" הקלאסי בשתי ערמות, האסטרטגיה לניצחון היא לדאוג לשוויון בין מספר הפריטים בשתי הערמות, כלומר, לשמור על סימטריה בין הערמות. השחקן השומר על הסימטריה יהיה זה שיוציא את הפריט האחרון. נשתמש בעיקרון זה ונתאים אותו למקרה הנוכחי.

1. אנחנו מציעים להתחיל את ההתנסויות **ממצב ערמות סימטרי**, כלומר, ממספר פריטים שווה בשתי הערמות. נציין כי במצב הפשוט ביותר 1-1, המשחק בכלל לא אסטרטגי כי מי שמוציא פריט מערמה משאיר לשחקן האחר להוציא פריט יחיד מהערמה השנייה ובכך לנצח. המקרה 2-2 (שני פריטים בכל ערמה) רק מעט מורכב יותר כי אם השחקן הראשון יוציא שני פריטים מאחת הערמות, השחקן השני יכול לקחת את שני הפריטים מהערמה שנותרה ובכך לנצח. אפשרות נוספת היא שהשחקן המתחיל ייקח פריט אחד מאחת הערמות ויותיר ערמות במצב 1-2. כעת השחקן האחר ישווה את הערמות למצב 1-1 וינצח כפי שכבר תיארנו. באופן כללי, ניתן לראות כי בכל מצב בו הערמות שוות מבחינת מספר הפריטים, אם שחקן יבחר להוציא פריט או שניים, השחקן האחר יאזן בכל תור את הערמות עד אשר יגיע למצב 1-1 או מצב 2-2 וינצח. זהו השימוש בסימטריה בין הערמות כאסטרטגיית ניצחון בדומה לאסטרטגיית הניצחון במשחק "נים" הקלאסי בשתי ערמות. אם במצב ההתחלתי ישנו שוויון, השחקן המתחיל יבחר לוותר על תורו. במצבי השוויון 1-1, 2-2, 3-3, ..., 10-10 וכדומה, אם זה לא המצב ההתחלתי, לאחד השחקנים לא נותרה ברירה אלא להפר את השוויון בין הערמות אז השחקן האחר, בתורו, יבחר לאזן את הערמות פעם אחרי פעם ויותיר ביניהן שוויון ובכך יסלול את דרכו לניצחון. נשים לב, כי השחקן השני משחזר את הצעדים של השחקן שמפר את הסימטריה ומבצע אותה פעולה בערמה האחרת.

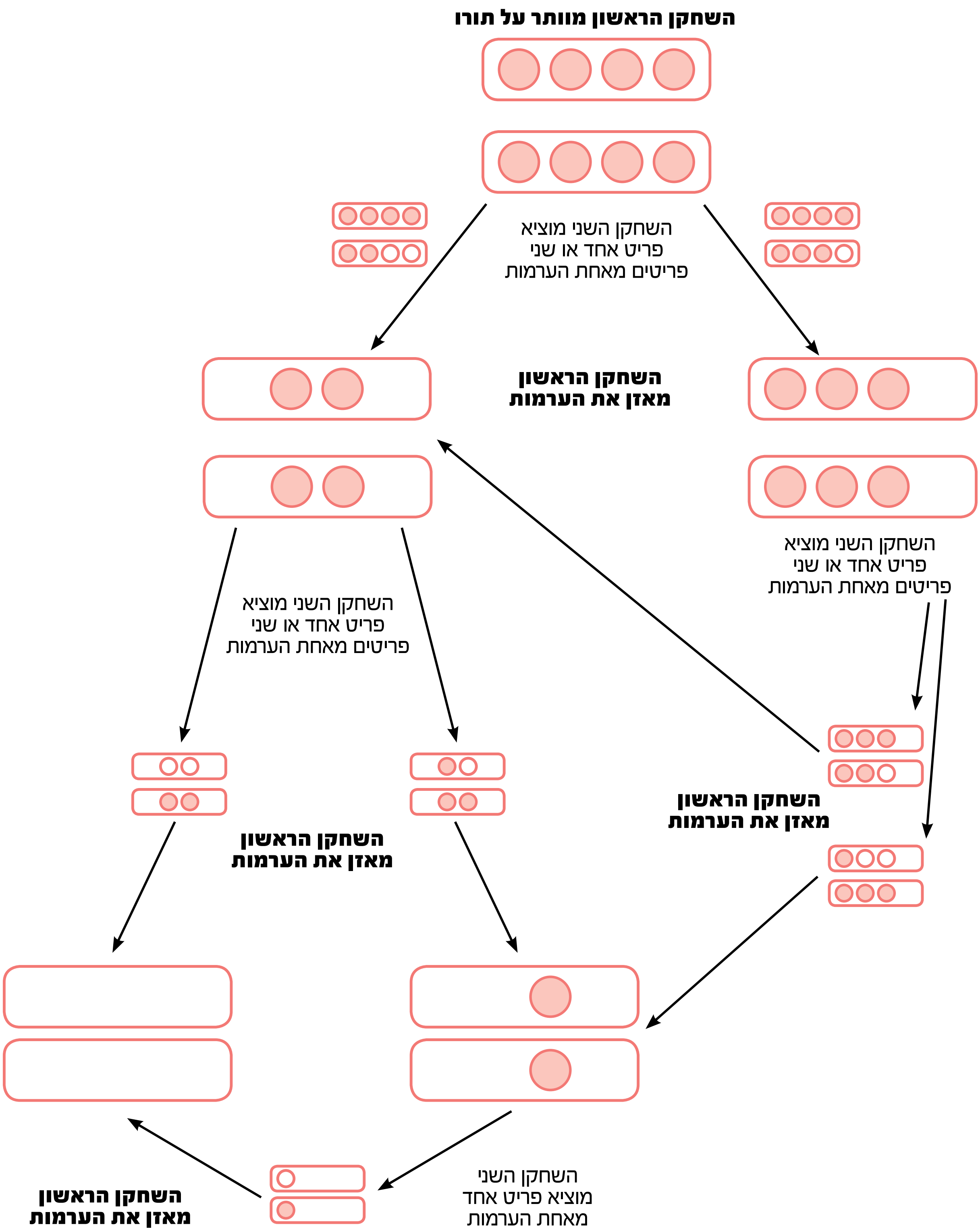
תרשים 1.
התפתחות המשחק ממצב 4-4

משחק עם שתי ערימות. במצב ההתחלתי שתי ערימות זהות עם ארבעה פריטים בכל אחת. התרשים מציג את התנהגות השחקן הראשון המובילה לניצחון - ריקון שתי הערימות. תחילה, השחקן הראשון מוותר על תורו.

ליד החיצים מסומנים המצבים אחרי הצעד של השחקן שהתחיל להוציא את הפריטים (השחקן השני) (○ - הפריט הנלקח, ● - הפריט הנשאר)

בקצה החץ - המצב אחרי תגובתו של השחקן המנצח (השחקן הראשון).

1. המשחק בגרסה זו מזכיר את "משחק 21" (סטופל והר-שפר, 2007; "Nim", Wikipedia, 2020") בו בכל תור, כל מתמודד חייב לקחת גפרור אחד, שני גפרורים או שלושה. בשונה מהמקרה שלנו, המנצח במשחק הוא המתמודד אשר לא נותרו לו גפרורים לקחת. האסטרטגיה לניצחון בגרסה זו מותירה לאחר כל תור מספר גפרורים אשר שווה לפריט בסדרה 4n+1, דהיינו, מספר שמותיר שארית 1 כאשר מחלקים אותו ב-4.



השחקן הראשון מוותר על תורו
השחקן השני מוציא פריט אחד או שני פריטים מאחת הערמות
השחקן הראשון מאזן את הערמות
השחקן השני מוציא פריט אחד או שני פריטים מאחת הערמות
השחקן השני מוציא פריט אחד או שני פריטים מאחת הערמות
השחקן הראשון מאזן את הערמות
השחקן הראשון מאזן את הערמות
השחקן השני מוציא פריט אחד מאחת הערמות
השחקן הראשון מאזן את הערמות

2. ההמשך הטבעי של הדיון הינו ניתוח משחקים עם שתי ערמות **במצב לא סימטרי** כאשר ההפרש בין מספר הפריטים בערמות הוא 1 או 2. נשים לב כי מצבים אלה מוכרים לתלמידים שכן מצב 5-4, למשל, התקבל ממצב 5-5 בעקבות הוצאת פריט מאחת הערמות. במצב זה, הצעד הכדאי (והמנצח) לשחקן המשחק בתורו הינו השוואת מספר הפריטים בערמות, כלומר, מעבר למצב סימטרי (סעיף 1).
ניתן לראות כי טיעון זה נכון עבור כל כמויות הפריטים בשתי הערמות ובתנאי שההפרש בין מספר הפריטים בערמות קטן מ-3, כלומר 1 או 2. על פי אסטרטגיית הניצחון, יש לבחור בצעד אשר יותיר שוויון בין שתי הערמות וכך יעשה בכל שלב אחרי שהיריב "מפר את השוויון".
(נציין כי במצב ערמות 3-2 או 3-1 קיימת אפשרות נוספת לניצחון, על-ידי "ריקון" הערמה הקטנה והותרת הערמה האחרת עם 3 פריטים, מצב מנצח לפי המסקנות מפעילות 1).
חשוב לשים לב, כי המעבר למצב בו ההפרש בין מספר הפריטים בערמות הוא 1 או 2, גורם מיד להפסד השחקן המשאיר מצב זה. לצורך המחשת המסקנה, אפשר להציע לדוגמה, משחק 28-26, בו בערמה אחת 28 פריטים ובאחרת 26 פריטים. על פי הדרך שהתגלתה קודם, על השחקן הראשון להוציא שני פריטים מהערמה "הגדולה" ולהותיר שוויון בין הערמות. בכך, הוא מביא את המצב לאיזון ובכל צעדיו ישמור על סימטריה זו כמו שנותח לעיל. השחקן השני שובר את הסימטריה ובכך מפסיד.
3. נעבור למצבים בהם הפרש מספר הפריטים ההתחלתי בין הערמות גדול יותר. תחילה נתמקד במקרה בו ההפרש הוא 3. בהמשך יתבהר כי שלב זה הוא המכריע להבנת האסטרטגיה לניצחון באופן כללי ולכן נתקדם בהדרגה.
   - במצב הערמות 4-1, במידה והשחקן המתחיל ירוקן את הערמה הקטנה, הוא יותיר ערמה בגודל 4. השחקן האחר יותיר בערמה 3 פריטים, ויבטיח את ניצחונו (לפי פעילות 1). במידה והשחקן המתחיל יוציא פריט אחד או שניים מהערמה הגדולה הוא יותיר את הערמות במצב 3-1 או 2-1 ויפסיד כי השחקן השני יפעל לפי עיקרון הסימטריה להשוואת מספר הפריטים בערמות, כלומר יביא למצב 1-1, וינצח. בכך, במצב 4-1 כל פעולה של לקיחת פריטים גורמת להפסד ולכן על השחקן הראשון לוותר על תורו כדי לנצח.
   - במצב הערמות 5-2, במידה והשחקן בתורו יוציא פריט אחד או שניים מאחת הערמות, השחקן האחר יבצע את אותה הפעולה בערמה האחרת. נפרט: אם השחקן המתחיל הוציא פריט אחד מאחת הערמות ומותיר 5-1 או 4-2, השחקן השני יותיר את המצב 4-1 הידוע כבר כמצב הפסד לנמצא בו. במידה והשחקן המתחיל ירוקן את הערמה הקטנה ויותיר 5-0, גם כאן השחקן השני יבצע אותה פעולה בערמה האחרת (יוציא ממנה שני פריטים) ויותיר לשחקן הראשון ערמה אחת עם שלושה פריטים, מצב 3-0. אפשרות אחרונה: במידה והשחקן המתחיל יוציא שני פריטים מהערמה הגדולה, הוא יותיר מצב 3-2. השחקן השני בתורו ישאיר לשחקן הראשון מצב 3-0, "מצב ניצחון" לשחקן השני, או יצור סימטריה בין הערמות ויותיר מצב 2-2, "מצב ניצחון" לפי סעיף 1. לפיכך, במצב התחלתי 5-2, כל מהלך מוביל להפסד ולכן האפשרות היחידה לניצחון של השחקן הראשון הינה ויתור על תורו.

לאחר התנסויות אלו (במידת הצורך, לאחר התנסות נוספת עם מצבים דוגמת 6-3 או 7-4), קל לגלות כי במצב בו ההפרש בין מספר הפריטים בשתי ערמות הוא 3, העברת התור ליריב, מבטיחה ניצחון. במצבים אלה, השחקן שנאלץ להוציא פריטים, הוא המפסיד: תמיד ניתן להשאיר לו שתי ערמות שהן במצב שוויון, או במצב של הפרש 3, עד להפסדו.
4. סביר להניח כי בשלב הבא התלמידים ירצו להתמקד במצבים בהם הפרש מספר הפריטים בין הערמות גדול יותר, למשל 4 או 5. במקרה זה, הניתוח הוא בעצם יישום המסקנות מהסעיף הקודם: למשל, במצב התחלתי 11-7 השחקן המתחיל ישאף להותיר מצב עם הפרש 3, כגון 10-7, הידוע כמצב

לא רצוי להוצאת פריטים, ובכך סולל דרך לניצחונו. באופן דומה יש לפעול במצב כמו 9-4 על-ידי מעבר למצב 7-4.

5. כעת נשאלת השאלה מה קורה כאשר ההפרשים גדולים אף יותר? לדוגמה, איך יש לפעול במצבים כמו 20-28 או 312-103? אם נצטרך לנתח כל אחד ממשחקים אלו בנפרד, אז מצבנו בעייתי שכן יש אינסוף אפשרויות. לכן עלינו לגלות (אם אפשר) את הדמיון בין המצבים השונים ולפתח דרך פעולה משותפת למצבים אלה.

נתחיל בניתוח המצב 5-11:

- ניתן לראות כי כל ניסיון של השחקן להוציא פריטים מהערמה הגדולה מיד מאפשר לשחקן האחר להותיר את הערמות עם הפרש 3 כלומר 5-8 שזהו מצב מנצח (לפי סעיף 3).
- במידה והשחקן הראשון יוציא פריטים מהערמה הקטנה, השחקן השני "יעתיק" פעולה זו בערמה הגדולה ושוב ישמור על מצב ערמות עם הפרש 6 (3-9 או 4-10 בדוגמה זו). בשלב מסוים, הערמה הקטנה תתרוקן וממצב עם הפרש 6 נגיע למצב עם הפרש 3, ושוב השחקן שהתחיל להוציא את הפריטים יפסיד.

ניתוח דומה תקף לכל מצב בו הפרש מספר הפריטים בין הערמות הינו כל כפולה של 3. בכל שלב, "מחזירים" למתחרה מצב בו הפרש מספר הפריטים בין שתי הערמות שווה לכפולה של 3, לרבות מצב בו מתרוקנת אחת הערמות (כמו 0-3, 0-6 וכדומה) או שמגיעים למצב סימטרי, של הפרש 0 בין הערמות (נציין כי גם 0 הוא כפולה של 3). כל הוצאת פריט ממצב ערמות בו הפרש הפריטים הוא כפולה של 3, מובילה להפסד. לכן אם זהו המצב ההתחלתי, על השחקן הראשון לוותר על תורו ולתת למתחרה להתחיל. נציין כאן כי המסקנה מפעילות 1 מהווה מקרה פרטי של הגילוי החדש.

6. כעת, לאחר גילוי העיקרון של "**להותיר ליריב מצב בו ההפרש הוא כפולה של 3**", תלמידים יהיו מוכנים להתמודד עם כל מצב התחלתי כלשהו. אכן, במידה וההפרש בין מספר הפריטים בערמות הוא כפולה של 3, מוותרים על תור. כך לדוגמה, במצב 16-25 (הפרש 9), על השחקן המתחיל לוותר על התור. אך במידה וההפרש לא מתחלק ב-3, יש להוציא מאחת הערמות מספר פריטים כך שההפרש בין מספר הפריטים יהיה כפולה של 3, ויש לשמור על תכונה זו לאחר כל תור. לדוגמה, במצב 13-21 ההפרש בין הערמות 8, ולכן על השחקן המתחיל להוציא שני פריטים מהערמה הגדולה ולהותיר מצב עם הפרש 6 (13-19) או להוציא פריט אחד מערמה הקטנה ולהותיר את המצב 12-21, עם הפרש 9.

להמשך הדיון, נדגיש את חשיבות ההתבוננות בשאריות החלוקה ב-3 של מספר הפריטים בכל ערמה. כאשר שאריות אלו שוות זו לזו, משמעות הדבר כי ההפרש בין מספר הפריטים בשתי הערמות הינו כפולה של 3 (מצב אשר מתאים להשאיר ליריב אך לא להוצאת פריטים). כאשר השאריות שונות, על השחקן לבצע את צעד הניצחון ולהביא את המשחק למצב עם הפרש שהוא כפולה של 3, במילים אחרות, לדאוג לשוויון שאריות בחלוקה ל-3 של מספרי הפריטים בשתי הערמות.

כעת, אפשר להגדיר מהו "מצב ניצחון" במשחק עם שתי ערמות: "מצב ניצחון" הינו כאשר מוסרים ליריב מצב ערמות כך ששאריות החלוקה ב-3 של מספר הפריטים בשתי הערמות שוות. חשוב לציין כי במקום לבדוק מצבים עם מספרי פריטים שונים ומגוונים בערמות, מספיק להתמקד רק בשאריות של חילוק מספרים אלה ב-3.

צעדי השחקן מוגדרים לא על-סמך מספר הפריטים בכל ערמה ואפילו לא על-סמך ההפרשים בין מספרים אלה, אלא אך ורק מהשוואת שאריות החלוקה ב-3 של מספר הפריטים בערמות. ממגוון ענק של מצבים בשתי ערמות, הגענו כעת להבחנה בין מצבים בודדים:

1. תחילה, נחשב את שארית החלוקה שארית החלוקה של מספר הפריטים בכל ערמה ב-3.
2. אם שאריות אלו שוות זו לזו (שתיהן 0, 1 או 2), יש לוותר על התור הראשון.
3. אם שאריות אלו שונות, יש לבחור באחת הערמות ולהוציא פריט או שניים כך שלאחר ההוצאה יתקיים שוויון בין שאריות אלו.

נשים לב כי אסטרטגיית הניצחון בשתי ערמות נכונה

גם למשחק בערמה אחת; כאשר אחת הערמות ריקה, שארית החלוקה של מספר פריטים בה ב-3 שווה ל-0. ולכן האסטרטגיה שומרת על שוויון בשאריות החלוקה בין שתי הערמות ובכל צעד על שארית החלוקה ב-3 בערמה שאינה ריקה להיות שווה ל-0.

באופן מפתיע, עיקרון שוויון שאריות החלוקה של מספר הפריטים בערמות ב-3 אותו גילינו בפעילות עם שתי ערמות, סולל דרך לניתוח המשחק במצבים מורכבים יותר, כאשר מספר הערמות גדול יותר, ואפילו גדול מאד.

פעילות 3

"אחד, שניים - נים" בשלוש ערמות

כעת נעסוק במשחק "נים" בשלוש ערמות. בכל ערמה יש מספר בלתי תלוי של פריטים. המטרה, בדומה למשחק בערמה אחת או שתיים, להיות המתמודד אשר מוציא את הפריט האחרון מכלל הערמות, כלומר, לשחקן השני לא נשארים פריטים לקחת באף ערמה.

נזכיר את הידוע עד כה: מצב המשחק לא משתנה אם מספר הפריטים באחת הערמות יִקטן ב-3 או בכל כפולה של שלוש, כלומר:

- כל ערמה שמכילה מספר פריטים שהוא כפולה של 3 היא בעצם "קבוצת הפסד". היא לכאורה לא מכילה פריטים, במילים אחרות, ערמה עם מספר פריטים כזה היא כמו "ערמה ריקה".
- לכל ערמה עם מספר פריטים שנותן שארית 1 בחילוק ב-3, אפשר להתייחס כמו לערמה עם פריט אחד; לכל ערמה עם מספר פריטים שנותן שארית 2 בחילוק ב-3, ניתן להתייחס כמו לערמה עם שני פריטים.

לדוגמה, מצב הערמות ההתחלתי 2-5-9 שקול למצב 2-5-6, שהוא שקול למצב 2-5-3, שהוא שקול למצב 0-5-2, אשר שקול למשחק עם שתי ערמות 2-5 שהוא בתורו בעצם מצב 2-2.

מרגע זה ואילך נסמן בכל ערמה, לא את מספר הפריטים עצמו, אלא רק את **שארית החלוקה של מספר זה ב-3**. לדוגמה, 10-16-20 שקול ל-2-1-1 בהתאמה, 1-5-5 שקול ל-1-2-2, 3-8-9 שקול ל-0-2-0.

מגוון ענק של מצבים שונים בשלוש ערמות משחק, "מצטמצם" כעת רק למצבים אחדים השונים מבחינת שאריות החלוקה ב-3 של מספר הפריטים בכל אחת מן הערמות. מעתה, כאשר אנו מסמנים למשל את המצב 2-1 הכוונה לשאריות החלוקה ב-3 של מספר הפריטים בכל ערמה (לדוגמה, 5-4).

ומהם כעת המצבים במשחק בשלוש ערמות?

- אם ב**אחת** מתוך שלוש הערמות יש מספר פריטים שהוא כפולה של 3, ניתן לראות כי משחק זה שקול למשחק ללא ערמה זו: בכל שלב, במידה ומקטינים את הערמה הזו, השחקן השני מקטין את מספר הפריטים בה שוב עד לכפולה הקרובה של 3, וכך עד לריקונה. לפיכך, משחק בו קיימת ערמה אחת עם מספר פריטים שהוא כפולה של 3, שקול למשחק עם שתי ערמות.
- אם ב**שתיים** מתוך שלוש הערמות מספר הפריטים הוא כפולה של 3, יש להתייחס לשתי ערמות אלו כאל "ערמות ריקות", וכאן יש בעצם משחק בערמה אחת.
- במידה ש**בכל אחת מהערמות** שאריות החלוקה של מספר הפריטים ב-3 שוות ל-0, על השחקן הראשון לוותר על תורו.
- כעת נותר להתייחס רק למצבים בהם **בכל הערמות** שאריות החלוקה ב-3 **שונות מ-0**; קיימות רק ארבע אפשרויות (כמו תמיד, אין חשיבות לסדר הערמות): 1-1-1, 2-1-1, 1-2-2, 2-2-2. באנאלוגיה למשחק בשתי ערמות, על פניו נראה כי כדאי להשאיר ליריב את מצבי שוויון השאריות (1-1-1 או 2-2-2). אך דווקא על-סמך ההבנות שהתגלו בפעילות 2 ובסעיף הקודם, "תחזוקת" שלוש הערמות עם אותה השארית תוביל להפסד. השחקן שמקבל בתורו מצב זה, "מאפס" את אחת הערמות (כלומר משנה את מספר הפריטים לכפולה של 3) ומותיר אחריו מצב סימטרי של שתי ערמות לא ריקות 0-1-1 או 0-2-2. נזכיר כי השחקן הראשון יאלץ בתורו להפר את האיזון בין שתי הערמות הנותרות (מהלך המוביל להפסד לפי פעילות 2).
- נשים לב כי בכל אחד מהמקרים המוזכרים של שלוש שאריות שונות מ-0, **קיימות לפחות שתי ערמות**

עם אותה השארית בחילוק ב-3. אזי, המהלך שתיארנו עבור המצבים 1-1-1 או 2-2-2 מתאים גם בשני המצבים האחרים (1-1-2 ו- 2-2-1): כמו כן התברר, כי תמיד במצבים אלה אפשר להותיר ליריב מצב בו שתי ערמות עם אותה השארית בחלוקה ל-3, וערמה שלישית "מאופסת" בשארית החלוקה ב-3 - "מצב הניצחון".

כדאי מאד להמחיש את ההנחיות האלו בהתנסויות במשחקים עם שלוש ערמות בעלות מספר פריטים קטן, כמו למשל במשחק עם ערמות 5-3-2 (שקול למשחק ב-2 ערמות 2-0-2), 3-3-1 (שקול למשחק בערמה אחת 0-0-1), 5-4-4 (שקול למשחק 2-1-1, יש להוציא שני פריטים מהערמה הגדולה במהלך הראשון) וכדומה.

כפי שאנו רואים, האסטרטגיה לניצחון במשחק עם שלוש ערמות, בעצם מבוססת על "מצבי הניצחון" שכבר ידועים לנו: עבור משחק עם ערמה אחת (מספר הפריטים הוא כפולה של 3), ועבור משחק עם שתי ערמות (שתי ערמות עם אותה השארית בחילוק ב-3). כדי לנצח במשחק עם שלוש ערמות, על השחקן להביא את מצב הערמות לאוסף של תת-מצבי ניצחון ("מצב ניצחון" בשתי ערמות ו"מצב ניצחון" בערמה השלישית). מסקנה זו הינה מפתח להכללה עבור משחק עם מספר ערמות כלשהו המנותח בפעילות הבאה.

פעילות 4

(בעצם, פעילות K): "אחד, שניים - נים" עם מספר ערמות כלשהו

במקרה זה נוריד את המגבלה על מספר הערמות, ונזכיר כי בכל ערמה יש מספר בלתי תלוי של פריטים. המטרה, בדומה למקרים הקודמים, להיות המתמודד אשר מוציא את הפריט האחרון מכלל הערמות, כלומר, לשחקן השני לא נשארים פריטים לקחת באף ערמה. מקרה זה מכיל את כל המצבים המנותחים לעיל, והדיון בו מתבסס על הגילויים והתובנות מהגרסאות הפשוטות יותר של המשחק.

נזכיר את הידוע עד כה:

- מצב בו ליריב נמסרת ערמה בה מספר הפריטים הינו כפולה של 3 הוא "מצב ניצחון": מסירתו ליריב מאפשרת "לתחזק" כפולה קטנה יותר של 3 ובסופו של דבר להוציא את הפריט האחרון. לפיכך, יש להתייחס לערמות עם מספר פריטים השווה לכפולה של 3 כאל אוסף של ערמות "ריקות". בהתאם, נתייחס בהמשך רק לערמות בהן מספר הפריטים לא מתחלק ב-3 (כידוע, במידה ושאריות החלוקה ב-3 של מספר הפריטים בכל ערמה שווה ל-0, המצב מוגדר כ-"מצב ניצחון" ולכן השחקן הראשון יוותר על תורו);
- במשחק עם שתי ערמות "לא ריקות" (שארית החלוקה ב-3 של מספר הפריטים שונה מ-0), השחקן מבטיח את ניצחונו על-ידי צעד שמותיר מצב שבו שארית החלוקה ב-3 של מספר הפריטים בשתי הערמות שווה (1-1 או 2-2). גם במשחק עם שלוש ערמות, הצעד המנצח מותיר ליריב זוג ערמות (תוך "איפוס", במקרה הצורך, של הערמה השלישית כאשר משאירים בה מספר פריטים המתחלק ב-3).

כעת התלמידים מוזמנים להתנסות בהדרגתיות במשחקים עם מספר ערמות גדול משלוש בהתאם לקצב ההתקדמות והבניית תובנות כלליות.

השלב הבא בניתוח המשחק מתבסס על התובנה כי ניתן להכליל את "מצב הניצחון" של זוג ערמות ולהשתמש בו עבור **מספר זוגות כלשהו**: לדוגמה, המצב 1-1-1-1 מכיל בתוכו שני מצבי 1-1 (ובעצם השחקן יכול להתייחס לכל צעד של היריב ולהגיב "בתוך" אותו זוג ערמות בו נגע). מזה נובע, כי מצב בו יש מספר זוגי של ערמות עם שארית 1 וגם מספר זוגי של ערמות עם שארית 2, הינו "מצב ניצחון"; לכן, כתשובה להוצאת פריטים מערמה, יש להגיב ב-"החזרת המצב לקדמותו" באחת משתי האפשרויות הבאות:

1. הוצאת מספר פריטים **המשלים ל-3** בערמה בה נגע היריב ועל-ידי כך, החזרתה לאותה השארית בחלוקה ב-3 שהייתה טרם פעל. נציין, כי במידה והיריב רוקן ערמה, לא ניתן להוציא ממנה פריטים נוספים ולכן יש לפעול לפי האפשרות הבאה.
2. הוצאת פריטים ב-"פעולת ראי" מהערמה "בת-הזוג" (הערמה עם אותה שארית בחלוקה ב-3) ובכך **השוואת שאריות** החלוקה ב-3 בשתי ערמות אלו

(גם כאן נציין, כי במידה ובזוג הערמות המוזכרות יש, למשל, שבעה פריטים באחת ופריט אחד באחרת והיריב בחר להוציא שני פריטים מהערמה הגדולה ולהותיר בה חמישה פריטים, לא ניתן להוציא שני פריטים מהערמה הקטנה כדי להשוות שאריות, ולכן יש לפעול לפי האפשרות שהוצגה בסעיף קודם).

עד כה ראינו כי במידה ובמצב ההתחלתי יש **מספר זוגי** של ערמות עם **שארית 1, מספר זוגי** של ערמות עם **שארית 2 ומספר כלשהו** של ערמות **עם שארית 0**, על השחקן המתחיל לוותר על תורו מכיוון שאחרי כל צעד של לקיחת פריטים, אפשר להחזיר את המשחק ל"מצב הניצחון", וכך עד סוף המשחק.

על-סמך תגלית זו, נתייחס למקרים אחרים.

ייתכן, כי יש מספר **אי-זוגי** של ערמות עם **שארית כלשהי השונה מאפס**. כלומר, לאחר צימוד זוגות-זוגות של ערמות עם שאריות חלוקה ב-3 שוות, נותרת ערמה אחת ללא בת זוג. במקרה זה על השחקן "לאפס" את שארית ערמה זו על-ידי הוצאת פריט או שניים בהתאם לשארית הערמה, ובכך להותיר מצב בו יש **זוגות** של ערמות עם שאריות שוות ושאר הערמות עם שארית 0. לדוגמה, ניגש למשחק עם עשר (!) ערמות שבהן 3, 5, 7, 8, 10, 12, 15, 16, 20, ו-22 פריטים. בערמות עם 3, 12 ו-15 פריטים, שארית חלוקת מספר הפריטים ב-3 היא 0, ובכך הן כבר "מאופסות". נבדוק את יתר הערמות. בערמות עם 7, 10, 16 ו-22 פריטים - השארית שווה ל-1, בסך הכול ארבע ערמות, מספר זוגי של ערמות. כמו כן, נותרות שלוש ערמות בהן השארית שווה ל-2 (5, 8, 20), מספר אי-זוגי של ערמות. נזכיר, כי במידה וגם מספר הערמות עם שארית 2 היה זוגי, על השחקן היה לוותר על תורו; אך מה עושים בתרחיש הנ"ל? בוחרים ערמה אחת "ללא זוג", לדוגמה, הערמה עם 5 פריטים. יש להוציא שני פריטים מערמה זו, ובכך להותירה עם 3 פריטים, כלומר "לאפס" אותה (אחרי הוצאה זו, מספר הפריטים בה מתחלק ב-3). כעת נותר ליריב מצב של "אפסים" וזוגות של ערמות עם אותה שארית חלוקה ב-3, "מצב ניצחון". ברור כי יש לפעול באופן דומה כאשר יש מספר אי-זוגי של ערמות עם שארית 1, במקרה זה יש להוציא פריט מאחת הערמות הנ"ל.

נשאלת השאלה, מה לעשות כאשר במשחק יש מצב בו מספר **אי-זוגי** של ערמות עם **שארית 1** (נניח, אחת עשרה) ומספר **אי-זוגי** של ערמות עם **שארית 2** (נניח, חמש)? במצב זה לא ניתן במהלך אחד "לאפס" שתי ערמות "מיותרות" בו-זמנית! האם גם כאן יכול השחקן הראשון להגיע ל"מצב ניצחון"? נזכיר כי לצורך כך יש להותיר מספר זוגי של ערמות עם אותה שארית. ניתן לראות כי אכן ישנה דרך המובילה לניצחון: משתי הערמות "המיותרות" עם שאריות חלוקה שונות, נרכיב זוג חדש של ערמות עם אותה השארית. הכיצד? השחקן הראשון יכול, למשל, להוציא פריט אחד מהערמה עם שארית 2, וכך, יחד עם הערמה הבודדת עם שארית 1, נוצר זוג ערמות נוסף עם שארית 1. בכך, השחקן מותיר מספר זוגי של ערמות עם שארית 1 (שתיים-עשרה ערמות) ומספר זוגי של ערמות עם שארית 2 (ארבע ערמות). באופן דומה ישנה אפשרות להוציא שני פריטים מהערמה עם שארית 1 (בתנאי שיש בה מספיק פריטים) ובכך להפוך אותה לערמה עם שארית 2.

לכן, "מצב ניצחון" עבור K ערמות, מוגדר כמצב שבו מספר זוגי של ערמות עם שארית 1 ועם שארית 2 כאשר שאר הערמות - אם ישנן, הן עם שארית 0 בחלוקת מספר פריטיהן ב-3. הראנו כי בכל מצב אחר, יכול השחקן להותיר "מצב ניצחון" אחרי צעדו הראשון.

נסכם את דרך פעילות השחקן:

1. לחשב את שאריות החלוקה ב-3 של מספר הפריטים בכל ערמה ולמיין את הערמות לפי שאריות החלוקה לשלושה סוגים: ערמות עם מספר פריטים המתחלק ב-3 (ערמות עם שארית 0), ערמות עם שארית 1 וערמות עם שארית 2.
2. את הקבוצות עם שארית 1 ושארית 2 מחלקים, ככל הניתן, לזוגות של ערמות עם אותה השארית. אם יש מספר זוגי של ערמות מכל סוג, יש לוותר על התור (במידה וזהו התור הראשון במשחק).
3. אם נותרה ערמה אחת ללא זוג, מוציאים מערמה זו פריט או שניים כך שמספר הפריטים בערמה יתחלק ב-3 (שארית 0).
4. אם נותרה ערמה אחת עם שארית 1 ואחרת עם שארית 2, יש ליצור שוויון בשאריות החלוקה של מספר הפריטים בערמות אלו ב-3, למשל, באמצעות הוצאת פריט אחד מהערמה השנייה.

תרשים 2.
הדרך לניצחון - סיכום

תהליך ביצוע הצעדים המובילים ל"מצב הניצחון" במשחק ובו: מספר זוגי של ערמות בהן מספר הפריטים מתחלק ב-3 עם שארית 1, מספר זוגי של ערמות בהן מספר הפריטים מתחלק ב-3 עם שארית 2, ומספר כלשהו של ערמות בהן מספר הפריטים מתחלק ב-3 ללא שארית.

(* אופציה זו קיימת בכל מקרה למעט מצב בו בכל הערמות עם שארית 1 נשאר פריט אחד בלבד)

חישוב מספר הפריטים בכל ערמה ← חישוב שארית חלוקת מספר הפריטים בכל ערמה ב-3 ← "ביטול" הערמות עם שארית 0 ויצירת "זוגות" של ערמות עם אותה שארית

רק מספר הערמות עם שארית 2 אי-זוגי ← מוציאים שני פריטים מאחת הערמות עם שארית 2

מספר הערמות עם שארית 1 אי-זוגי וגם מספר הערמות עם שארית 2 אי-זוגי ← מוציאים פריט אחד מאחת הערמות עם שארית 2

או

← מוציאים שני פריטים מאחת הערמות עם שארית 1 *

רק מספר הערמות עם שארית 1 אי-זוגי ← מוציאים פריט אחד מאחת הערמות עם שארית 1

מספר זוגי של ערמות עם שארית 1 וגם מספר זוגי של ערמות עם שארית 2
מצב הניצחון

סיכום

משחקי "נים" הינם משחקי אסטרטגיה עם בסיס לוגי מתמטי וקיימות להם גרסאות שונות. בגרסאות הנפוצות, שני שחקנים מוציאים לסירוגין פריטים מאוסף מסוים כך שהמנצח במשחק מוגדר כמתמודד שהוציא את הפריט האחרון מהערמה האחרונה. בדרך כלל מדובר על הוצאת מספר פריטים כלשהו מאוסף ערמות עם כמויות התחלתיות שונות של פריטים, או על הוצאת מספר מוגבל של פריטים מערמה אחת. במאמר הוצג ונחקר המשחק "אחד, שניים - נים". במשחק זה נתונות אוסף ערמות כך שבכל ערמה יתכן מספר שונה של פריטים, וכל שחקן בתורו יכול להוציא מהערמה אשר בחר, פריט אחד או שניים בלבד. המחקר מוצג כפעילויות לתלמידים בארבע גרסאות, החל מהפשוטה ביותר וכלה במורכבת ביותר: דהיינו, משחק בערמה אחת, בשתי ערמות, ב-3 ערמות ובמספר ערמות כלשהו.

קל לנחש, כי אסטרטגיות הניצחון תלויות במספר הפריטים בערמות השונות. יחד עם זאת, באופן מפתיע, התברר כי דרכי הניצחון אינן תלויות בסדר הגודל של מספר הפריטים בערמות, כלומר, אין משמעות אם ישנו מספר רב או מועט של פריטים בכל ערמה.

כבר בניתוח משחק בערמה אחת גילינו כי התנהגות השחקן נקבעת אך ורק על-סמך שארית החלוקה של מספר הפריטים בערמה ב-3. בצעדי הניצחון שלו, השחקן מחזיר לירִיב בכל פעם כפולה קטנה יותר של 3, עד שמגיע ל-0 פריטים בערמה. לפיכך, כל ערמה אשר שארית החלוקה שלה ב-3 שווה ל-0 נחשבת כ"ערמה ריקה" ואין לקחת אותה בחשבון בזמן חישוב הצעד הבא. בהמשך, כאשר חקרנו את המשחק בשתי ערמות גילינו כי "תכונת המפתח" השנייה הינה שוויון בין שאריות החלוקה של מספר הפריטים בכל ערמה ב-3. במילים אחרות, זוג ערמות נמצא במצב סימטרי, אם שאריות

חלוקת מספר הפריטים שלהן ב-3 - שווה.
מדהים, אך שני הגילויים הנ"ל בלבד, מספקים כלים כדי לבנות את האסטרטגיה הכללית לניצחון השחקן עבור משחק עם מספר כלשהו של ערמות. האסטרטגיה פשוטה לביצוע ומטרתה בכל שלב להותיר ליריב מצבים בהם ישנן מספר ערמות כלשהו (כולל 0) עם מספר פריטים המתחלק ב-3 וזוגות של ערמות בהן שאריות החלוקה של מספר הפריטים בהן ב-3 שווה.

אנו מקווים כי בעקבות החקר המרתק הנ"ל, עולה השאלה: "האם אפשר למצוא אסטרטגיה כללית ופשוטה כזו למשחקי "נים" בהם אפשר לקחת לדוגמה, מאחד ועד עשרה פריטים מכל ערמה? התשובה היא חיובית, אך ניסוחה דורש כמובן ניתוח נוסף שכדאי להתחיל אותו ממשחק "אחד, שניים, שלושה - נים". גם שם ממתינות לחוקר הכללות, הפתעות ומסקנות, חלקן דומות אך חלקן גם שונות מאלה שגילינו במשחק הנוכחי.

כמו בכל משחק אסטרטגי, תוך ניתוח המשחק "אחד, שניים - נים" עולים נושאים מתמטיים סמויים אותם אי-אפשר לגלות מראש בהצגת כללי המשחק. הפעילויות המוצגות אמורות לתרום לתובנות אודות מושגים ותכונות מתמטיות תוך שימוש לא שגרתי ואף מפתיע בהן, כגון: התחלקות ושאריות חלוקה במספר, זוגיות וסימטריה. בנוסף, תוך ניתוח משחק זה, עלו רעיונות כלליים לדרכי ניתוח של משחקים אסטרטגיים רבים, כגון: ניתוח משחק מהסוף, מעבר למשחק "מצומצם" יותר ("צמצום" מספר הפריטים והערמות, כפי שנעשה במשחק זה), גילוי יכולת "החלפת תפקידים" ועוד. ההתעסקות בחיפוש אחר אסטרטגיות לניצחון מזמנת התנסות במשחק, העלאת השערות ובדיקת נכונותן, כיסוי כלל האפשרויות ויכולת לנתח בעיות ומצבים.
הבנת דרכי הפעולה והאסטרטגיה בכל פעילות מבוססת על הכללת התובנות והידע שנצבר עד אותו שלב לאורך הפעילויות הקודמות. כל תלמיד יכול לנסות להתמודד עם ניתוח המשחק ולהתקדם בו לפי הקצב המתאים לו, לרבות מספר ההתנסויות בכל שלב ומעבר בין הפעילויות.
אנו סבורים כי נחוץ לשלב בשיעורי המתמטיקה פעילויות כגון משחקים מתמטיים אסטרטגיים בדרך אשר מותאמת לרמת הלומד, על מנת לבנות סביבה ידידותית וליצור מסגרת ללמידה משמעותית של המקצוע.

מקורות

- משרד החינוך (2006). תכנית לימודים חדשה במתמטיקה לבית הספר היסודי בכל המגזרים. ירושלים: המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים. https://meyda.education.gov.il/files/Tochniyot_Limudim/Math/Yesodi/mavo1.pdf
- סטופל, מ' והר-שפר, ג' (2007). משחקי אסטרטגיה ככלי לפיתוח החשיבה. מספר חזק 2000, 14, 42-47. https://ymath.haifa.ac.il/images/stories/mispar_chazak_2000/issue14/stupel_har-shefer.pdf
- Bogomolny, A. (2016). Theory of Nim. Retrieved from: https://www.cut-the-knot.org/nim_theory.shtml#
- Chuang, T. Y., & Chen, W. F. (2007). Effect of computer-based video games on children: An experimental study. In: 2007 *First IEEE International Workshop on Digital Game and Intelligent Toy Enhanced Learning* (*DIGITEL*'07) (pp. 114-118). IEEE.
- Conway, J. H. (2001). *On numbers and games*. AK Peters, Natick, Massachusetts.
- Costa-Gomes, M., Crawford, V. P., & Broseta, B. (2001). Cognition and behavior in normal-form games: An experimental study. *Econometrica*, 69(5), 1193-1235.
- Freiberger, M. (2014). *Play to win with Nim*. Retrieved from https://plus.maths.org/content/play-win-nim
- Randel, J. M., Morris, B. A., Wetzel, C. D., and Whitehill, B.V. (1992). The effectiveness of games for educational purposes: A review of recent research. *Simulation* & *Gaming*, 23 (3), 261-276.
- Wikipedia contributors. "Nim." *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Wikipedia, The Free Encyclopedia, 8 Dec. 2020.


1
2
3
4
5