מחקר יישומי

האם הייצוג משנה?
חקר הכללת דפוסים מתמטיים בקרב תלמידי כיתות ה'-ו'

ד"ר עדי עראקי
המחלקה למתמטיקה
הפקולטה לחינוך ומנהיגות,
המכללה האקדמית אחוה



האם הייצוג משנה?
חקר הכללת דפוסים מתמטיים בקרב תלמידי כיתות ה'-ו'[1]

עדי עראקי

מבוא

הכללה היא מיומנות חיונית במתמטיקה, המאפשרת לתלמידים לזהות דפוסים ויחסים, לחזות ולפתור בעיות בצורה יעילה (Karsenty, 2020). מחקרים הראו שסוג הייצוג המשמש להצגת נתונים יכול להשפיע על יכולתם של התלמידים להכליל. בייצוגים מספריים משתמשים במספרים וסמלים כדי לייצג את התבנית, בעוד בייצוגים חזותיים-ציוריים משתמשים בתמונות או דיאגרמות כדי להראות את התבנית. לשני סוגי הייצוג יש יתרונות וחסרונות. ייצוגים מספריים הם מופשטים יותר מאשר ייצוגים חזותיים-ציוריים, והתלמידים נדרשים להבין סמלים ופעולות מתמטיות. לעומת זאת, ייצוגים חזותיים-ציוריים קונקרטיים יותר מאשר ייצוגים מספריים, ויכולים לעזור לתלמידים לדמיין את התבנית והמבנה הבסיסי שלה (Moyer-Packenham & Boyard, 2016).

בשנים האחרונות מתגבר דיון בחינוך המתמטי לגבי הכללת מושגים אלגבריים בשיעורי חשבון ברמת בית הספר היסודי. חוקרים בדקו את הגישה שמושגים אלגבריים יכולים להיות מושרשים כבר בדרגות כיתה נמוכות יותר כאשר ילדים מכירים בקביעות של התנהגות מספרית, במיוחד במספרים טבעיים. על פי גישה זו, התבוננות בדפוסים ובסדרות מאפשרת לתלמידים להכיר את המנגנונים המחברים בין מספרים ופעולות אריתמטיות (Cai & Knuth, 2011; Stacey & Chick, 2004). על ידי התבוננות בדפוסים ובסדרות הלומדים יכולים להכיר את המנגנונים המחברים בין מספרים ופעולות אריתמטיות.

רצפים של צורות המדגימים שינויים בסדרה מסוימת זוהו כמשימות מתאימות לחקירת סדרות, שכן הן מזמנות לכל תלמיד חוויות מתמטיות ברמות שונות (Smith, Hillen & Catania, 2007). משימות אלו יכולות לשמש "גשר" מהעולם הפיזי, כמו קוביות וקְסָמים, לאלגברה פורמלית. עם זאת, מעבר זה מקונקרטי למופשט חייב להיות מלווה בפיתוח יכולת ההכללה וההיגיון של תלמידים. בלנטון וקפוט מתארים תהליך זה כמקום שבו תלמידים מכלילים רעיונות מתמטיים ממופעים מסוימים, מבססים את ההכללות הללו באמצעות שיח וטיעון, ומבטאים אותן בדרכים פורמליות יותר ויותר מותאמות לגיל (Blanton & Kaput, 2005).

מחקרים הראו שעבודה עם דפוסים משפיעה על כמה היבטים של היכולות המתמטיות של תלמידים. היא מאפשרת לתלמידים לפתח שפה מתמטית, להניח השערות ולהצדיק או להפריך אותן (Moss & Beatty, 2006), תומכת בהבנת היחסים בין כמויות (Carraher, et.al., 2008), והיא דרך לבנות הכללות מתמטיות (Kieran, 1992; Carraher, et.al., 2008).

חוקרים זיהו דפוסים שונים, כולל דפוסים ליניאריים, דפוסים בהליכים חישוביים ודפוסים חוזרים (Zazkis & Liljedahl, 2002). המחקר הנוכחי מתמקד בדפוסים הניתנים לייצוג אריתמטי ולייצוג חזותי-ציורי. באמצעות ייצוג של דפוסים אלו נבקש מהתלמידים לנסח הכללות לגבי הופעת מספר או מספר עיגולים בסדרה (Moss & Beatty, 2006). בהתאם ליכולתם, התלמידים יכולים לבטא את ההכללות שלהם במילים או בסמלים.

הוצעו כמה מודלים תיאורטיים כדי להסביר כיצד תלמידים מכלילים דפוסים. אחד המודלים הוא מודל שלבי ההכללה. על פי מודל זה, התלמידים יעברו מספר שלבים לפני שהם מגיעים להכללה. השלב הראשון כולל זיהוי הדפוס וביצוע תצפיות פשוטות לגביו.

1. מאמר זה הוא חלק מעבודת תיזה שבוצעה במסגרת לימודי תואר שני במחלקה להוראת המדעים, אוניברסיטת בן-גוריון בהנחיית פרופ' מייקל פריד ופרופ' ראיסה גוברמן.



השלב השני כולל מציאת נוסחה או כלל המתארים את התבנית, בעוד השלב השלישי כולל בדיקת הכלל כדי לראות אם הוא "עובד" עבור דוגמאות אחרות (Wijns, et.al., 2019).

המחקר הנוכחי נועד לחקור את יכולת ההכללה של תלמידי כיתות ה'-ו' בדפוסים המיוצגים מספרית וחזותית-ציורית. המטרה הייתה לזהות הבדלים כלשהם ביכולתם של תלמידים להכליל מתוך ניתוח ההכללות שיוצרו על ידי התלמידים מהסוגים השונים הללו של ייצוגים. לממצאי המחקר יש השלכות על הוראה ולימוד מתמטיקה, במיוחד במונחים של האופן שבו מורים יכולים לתמוך ביכולת ההכללה של התלמידים כאשר עובדים עם סוגים שונים של דפוסים וייצוגים. הממצאים ממחקר זה יתרמו להבנתנו את הדרכים שבהן התלמידים מפתחים חשיבה אלגברית, ואת התפקיד שצורות ייצוג שונות ממלאות בתהליך זה.

מתודולוגיה

במחקר זה נעשה שימוש במחקר עיצוב ניסויי ובגישות מעורבות לבחינת יכולת ההכללה של תלמידי כיתות ה' ו'ו לתבניות מספריות וחזותיות-ציוריות. במחקר השתתפו 91 תלמידים מבתי ספר שונים במרכז הארץ שנבחרו באמצעות דגימת נוחות. התלמידים למדו שיעורי מתמטיקה קבועים, ובהם קיבלו דפי עבודה עם משימות שדרשו מהם להכיר ולהכליל את סדירותו של רצף. בכל דף עבודה נכללו שתי משימות, אחת לכל צורת ייצוג, והשלמת כל דף עבודה והדיון על אסטרטגיות פתרון ארכו שיעור שלם (45-50 דקות).

בין דפי העבודה נבחרו שניים לניתוח, שבהם הוצג אותו רצף בפורמטים מספריים וחזותיים-ציוריים כאחד (ראו איור 1). שני הרצפים בדפי העבודה היו שונים מבחינת האופי המתמטי שלהם: בדף עבודה 1 המשימה היא סדרה חשבונית (4n+1). המשימה הראשונה מוצגת בייצוג חזותי-ציורי והמשימה השנייה בייצוג מספרי. בדף עבודה 2 הרצף הוא של מספרים משולשיים. בדומה לדף עבודה 1, המשימה הראשונה מוצגת בייצוג חזותי-ציורי והמשימה השנייה בייצוג מספרי. הכלל שלפיו פעלה ההתקדמות האריתמטית היה שהמספרים מתחלקים ב־4 עם שארית של 1 (דף עבודה 1), בעוד שרצף המספרים המשולשיים ייצג כל איבר כקבוצת עצמים שניתן לסדר בצורת משולש שווה צלעות (דף עבודה 2).

איור 1:

דפי העבודה שקיבלו לתלמידים

דף עבודה 1

משימה 1:

התבוננו בסדרה הבאה:



א. כמה נקודות יהיו באיבר ה־6? הסבירו.

ב. הסבירו את חוקיות הסדרה בלשונכם.

משימה 2:

התבוננו בסדרה הבאה:

5; 9; 13; 17...

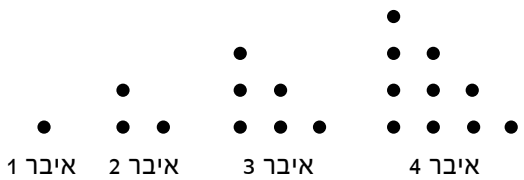
א. מה יהיה המספר במקום החמישי?

ב. הסבירו את חוקיות הסדרה בלשונכם.

דף עבודה 2

משימה 1:

התבוננו בסדרה הבאה:



א. כמה נקודות יהיו באיבר ה־6? הסבירו.

ב. הסבירו את חוקיות הסדרה בלשונכם.

משימה 2:

התבוננו בסדרה הבאה:

1; 3; 6; 10...

א. מה יהיה המספר במקום החמישי?

ב. הסבירו את חוקיות הסדרה בלשונכם.



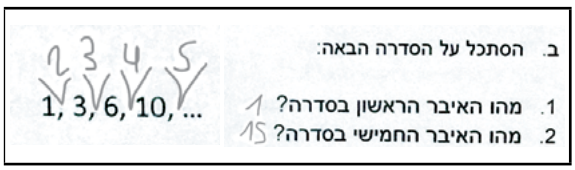
דפי העבודה שנאספו לאחר השלמתם מן התלמידים נותחו ניתוח תוכן ישיר, שבו סווגו השלבים שבהם התקדמו התלמידים במטרה להגיע להכללה לפי המסגרת שהציעה רדפורד (Radford, 2010). מסגרת זו כוללת קידוד של כל שלב בפתרון לפי טיפולוגיה של צורות חשיבה אלגברית בעקבות רמת ההכללה שמספקים התלמידים בעבודתם. הקטגוריות שנוצרו חולקו לשתי קטגוריות־על.

1. חשיבה אלגברית עובדתית:

א. זיהוי חוקיות (to objectify a regularity), כלומר התלמיד יכול להגיד מה האיבר הבא בסדרה בהמשך לאיברים הנתונים במשימה (איור 2). הפתרון מציג את היכולת של התלמיד להגיע לאובייקטיפיקציה של החוקיות, כלומר את היכולת לזהות את הקשר בין מספר הצורה בסדרה לבין, למשל, מספר העיגולים שבה. תלמידים אשר בחרו להתמודד עם המשימות בדרך זו היו מסוגלים לקבוע כיצד לקבל את האיבר הבא בסדרה, במקרה שכל המספרים שלפני איבר זה היו נתונים בפניהם. אם היו נתונים כמה מספרים והיה צורך לקבוע מה האיבר העשירי, התלמידים עבדו בקפדנות, וחישבו כל אחד מהאיברים של סדרה זו עד המקום המבוקש.

איור 2:

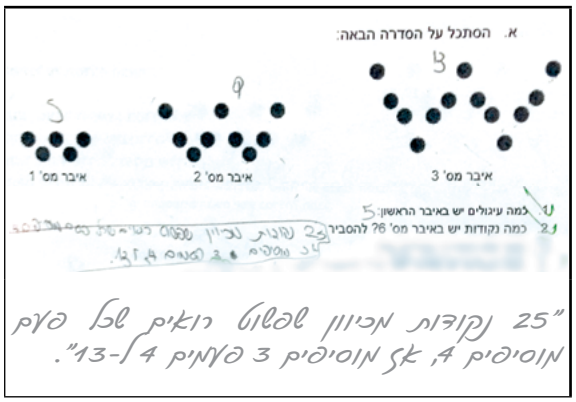
מתוך תשובות התלמיד - דף עבודה 2 משימה 2



ב. יצירת "נוסחה בפעולה" באמצעותה התלמיד יכול לגלות מה גודלו של איבר מסוים שלא נתון במשימה עצמה. איבר זה אינו האיבר הבא בהמשך לאיברים הנתונים. התלמידים ניסו ליצור מעין נוסחה שמטרתה לעזור להם להגיע לפתרון ולהבנת החוקיות בסדרה המתוארת בפניהם (איור 3).

איור 3:

מתוך תשובות התלמיד - דף עבודה 1 משימה 1

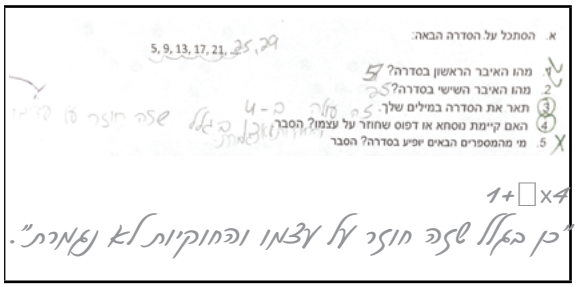


2. חשיבה אלגברית הקשרית:

א. הבאת דוגמה גנרית לצורך ניסוח כלל הסדרה (איור 4).

איור 4:

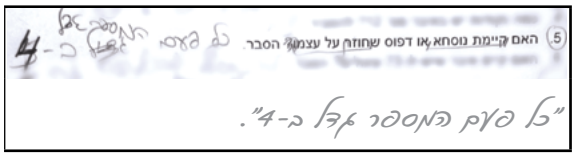
מתוך תשובות התלמיד - דף עבודה 1 משימה 2



ב. תיאור הכלל במילים באופן כללי ללא הסתמכות על דוגמה מסוימת (איור 5).

איור 5:

מתוך תשובות התלמיד - דף עבודה 1 משימה 2



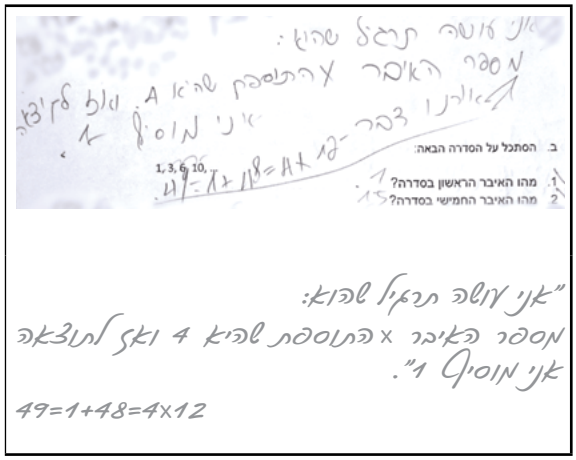


ג. חשיבה אלגברית סטנדרטית:

אינדוקציה אריתמטית נאיבית: התלמיד משתמש באינדוקציה באופן נאיבי, כלומר אינו מכיר את המושג ואת הכוונה, אך כדי להגיע להכללה הוא נותן דוגמה כללית, ממנה מסיק מה האיבר הבא, ומגיע לפתרון כללי של הסדרה ללא הסתמכות על דוגמה מסוימת (איור 6).

איור 6:

מתוך תשובות התלמיד - דף עבודה 1 משימה 1



בשלב השני של המחקר בוצע ניתוח סטטיסטי כדי להשוות את יכולת ההכללה של התלמידים בין ייצוג מספרי לבין ייצוג חזותי-ציורי באמצעות מבחני t. זה אפשר לנו לקבוע אם קיימים הבדלים משמעותיים בנכונות פתרונות המשימות בין שתי צורות הייצוג.

ממצאים

נתייחס לשיטת ההכללה עבור כל רצף על ידי הצגת דוגמאות מעבודת התלמידים. ניתוח ההכללות הראה שתלמידים השתמשו ביותר משלב אחד כדי להגיע להכללה. במילים אחרות, כדי לנסח את ההכללה, התלמידים עברו תהליך שמתחיל בחשיבה אלגברית עובדתית, וחלק מהם המשיכו לחשיבה אלגברית הקשרית.

בתחילה בחנו התלמידים את האלמנטים בכל רצף כדי להבין את אופי הבנייה שלהם, כלומר הם חיפשו תחילה קשר בין אלמנט אחד לזה שלפניו או אחריו. לעומת זאת, לניתוח הייצוג החזותי-ציורי, התייחסו התלמידים למבנה ה"ציורי" שלו (ראו טבלה 1).

טבלה 1:

חשיבה אלגברית עובדתית - זיהוי החוקיות

ייצוג מספרי	ייצוג חזותי-ציורי
יובל: כאן זה גדול ב־1, כאן ב־2, ואז 3 ואז 4. כך הגענו ל־10 (סדרת מספרים משולשיים).	**אלון:** קיים דפוס צורה, הכל כאן שווה וזה כמו האות W האנגלית, אז זה תמיד חוזר על עצמו (סדרה חשבונית).

במילים אחרות, בשלב הראשון התייחסו התלמידים לסדירות עבור שני הרצפים ושני הייצוגים. ההבדל הוא באופן שבו האובייקטים היו קשורים בכל מקרה: לגבי הייצוג המספרי התייחסו התלמידים להבדל בין שני אלמנטים סמוכים, ואילו לגבי הייצוג החזותי-ציורי הם התייחסו למראה החיצוני של כל איבר (האות W, ה־משולשים) ולא תרגמו זאת לייצוג מספרי. חלק מהתלמידים נשארו ברמת הכללה זו, עם מספרים דומים עבור כל רצף אך מספרים שונים עבור כל ייצוג: עבור ייצוג מספרי, כשני שלישים מהתלמידים המשיכו לבנות "נוסחה בפעולה", לעומת כמחצית שהמשיכה לשלב הבא עם הייצוג החזותי-ציורי.

השלב השני של בניית ההכללה הוא יצירת "נוסחה בפעולה". במקרה זה הציעו התלמידים תיאור אופרטיבי כיצד לבנות את האלמנט הבא מקודמו, מעין תיאור 'רקורסיבי' של הרצף, ובתוך כך שימוש במילים ולא באותיות (ראו טבלה 2).



טבלה 2:

חשיבה אלגברית עובדתית - יצירת "נוסחה בפעולה"

ייצוג מספרי	ייצוג חזותי-ציורי
דניאל: כל פעם מוסיפים למספר עוד אחד, עכשיו סתם דוגמה 1 ועוד 2 זה שלוש ולזה נוסיף עוד 3 ואז עוד ארבע ועוד חמש ועוד שש ועוד שבע וככה זה הכפולות (סדרת מספרים משולשיים).	**חן:** קודם מוסיפים 1 למספר ואז 2, 3 ועד אין סוף (סדרת מספרים משולשיים).

כשני שלישים מהתלמידים בכל מקרה (סוג סדרה וסוג ייצוג) נשארו ברמת הכללה זו, ורק שליש התקדמו ליצירת נוסחה עם דוגמה גנרית - בניית נוסחה המבוססת על דוגמה ספציפית שיכולה להיחשב כמקרה כללי (ראו טבלה 3).

טבלה 3:

חשיבה אלגברית הקשרית - יצירת נוסחה עם דוגמה גנרית

ייצוג מספרי	ייצוג חזותי-ציורי
יובל: המספר 73, למשל, אינו שייך לרצף הזה כי הוא מתחלק ב-1 ובעצמו ואי אפשר לקחת אותו כמשהו כפול 4 ועוד 1 (סדרה חשבונית).	**דניאל:** אם אני צריך לדעת את המספר במקום ה־12, אני אכפול 12 ב־4 ואוסיף 1, כי זה בעצם מספרים עם שארית של 1 (סדרה חשבונית).

רמת ההכללה הגבוהה ביותר שנצפתה הייתה תיאור במונחים כלליים, שאליה הגיעו כ־12% מן התלמידים כאשר עבדו על משימה עם סדרה חשבונית בייצוג מספרי. שום תלמיד לא הגיע לרמה זו של הכללה עבור רצף המספרים המשולשיים בייצוג מספרי. אף לא אחד מהם גם הגיע לרמה זו של הכללה עבור שום רצף משני הרצפים בייצוג חזותי-ציורי (ראו טבלה 4).

טבלה 4:

חשיבה אלגברית סטנדרטית - אינדוקציה אריתמטית נאיבית

ייצוג מספרי	ייצוג חזותי-ציורי
נועה: 1 + □ × 4 (סדרה חשבונית). **דניאל:** המקום של המספר 4 ולאחר מכן להוסיף 1 (סדרה חשבונית).	שום תלמיד לא הגיע לרמה זו של הכללה לייצוג זה.

טבלה 5 משקפת את כמויות תשובות התלמידים בנוגע לכל אחת מרמות ההכללה כפי שזוהתה בקרב התלמידים אשר השתתפו במחקר. ניתן לראות כי ברמת ההכללה חשיבה אלגברית עובדתית, בדגש על זיהוי החוקיות, רוב התלמידים הצליחו במשימה אשר יוצגה באופן חזותי-ציורי. בנוגע לרמת ההכללה של יצירת "נוסחה בפעולה" נמצאה תלות במורכבות הסדרה החשבונית, זאת בדומה לרמת ההכללה חשיבה אלגברית הקשרית ברמת דוגמה כללית. נוסף לכך, ברמת ההכללה העוסקת בתיאור במונחים כלליים, ניתן לראות כי רק 11% מהתלמידים הגיעו לרמת הכללה זו, וזאת רק במשימה אחת מבין המשימות ורק בייצוג מספרי.

זאת ועוד, בדיקה סטטיסטית של התוצאות שהתקבלו מלמדת כי לגבי ההתקדמות האריתמטית (סדרה חשבונית) אין הבדלים ניכרים בתהליך יישום החשיבה האלגברית בין שני הייצוגים. במילים אחרות, תהליך הפתרון עובר את אותם השלבים, באותה מידה של הצלחה בקרב התלמידים. לעומת זאת, הבדיקה הסטטיסטית של הרצף האחר (מספרים משולשיים) מראה הבדלים ניכרים: נכונות ההכללה גבוהה יותר לייצוג מספרי ($t(91) = 2.12, p < .05$); זיהוי החוקיות קל יותר לייצוג מספרי ($t(91)=2.24, p < .05$); כתיבת "נוסחה בפעולה" קלה יותר לייצוג מספרי ($t(91) = 4.03, p < .001$). אפשר לראות את רמת ההכללה של התלמידים בטבלה 5.



טבלה 5:
רמת הכללה שזוהתה בקרב התלמידים המשתתפים במחקר

	רמת ההכללה	אחוז התלמידים אשר הגיעו לרמת הכללה של הרצף ... 1; 3; 6; 10		אחוז התלמידים אשר הגיעו לרמת הכללה של הרצף ... 5; 9; 13; 17	
		מספרי	חזותי-ציורי	מספרי	חזותי-ציורי
חשיבה אלגברית עובדתית	**זיהוי חוקיות:** התלמיד יכול להגיד מה האיבר הבא בסדרה בהמשך לאיברים הנתונים במשימה.	86%	91%	93%	100%
	יצירת "נוסחה בפעולה": התלמיד יכול לגלות מה גודלו של איבר מסוים שלא נתון במשימה עצמה.	62%	73%	67%	47%
חשיבה אלגברית הקשרית	**דוגמה כללית:** הנוסחה של התלמיד מבוססת על מקרה מסוים שיכול להיות קשור למקרה כללי.	37%	41%	40%	32%
	תיאור במונחים כלליים: תיאור סדירות בניית סדרה במילים או בסמלים מבלי להסתמך על דוגמה ספציפית.	0	0	11%	0

מסקנות

מחקר זה בדק כיצד מתמודדים תלמידים עם משימות הדורשות הכללה של סדרות חשבוניות המוצגות כדפוסים מספריים וחזותיים-ציוריים. המחקר מצא שתלמידים מסוגלים להתמודד עם משימות מהסוג הזה כבר ברמת בית הספר היסודי. יתרה מכך, המחקר מצא כי ייצוג מספרי יעיל יותר מאשר ייצוג חזותי-ציורי בפתרון משימות, וייתכן שהמורים יצטרכו לספק לתלמידים יותר הדרכה כאשר משימות מוצגות באופן ציורי.

בהתבסס על ממצאי מחקר זה ניתן להציע מספר המלצות מעשיות ודידקטיות למורים בכיתה. האחת, על המורים לחשוף את תלמידיהם לסוגים שונים של סדרות המוצגות בדפוסים ותבניות, הן מספריות והן חזותיות-ציוריות, כדי לפתח את יכולתם לזהות ולהכליל דפוסים. המחקר הראה שתלמידי בית הספר היסודי יכלו להתמודד בהצלחה עם משימות העוסקות בדפוסים. לכן מורים יכולים לשלב משימות מבוססות דפוס בהוראה בכיתה של תלמידים כבר בגיל צעיר. משימות כאלה יכולות להיות מוצגות ברצפים, צורות או מספרים, ויכולות לעזור לתלמידים לפתח את השפה המתמטית ואת יכולות החשיבה שלהם. עם זאת, חשוב לציין שתלמידים עשויים להיות מסוגלים להגיע לרמה גבוהה יותר של הכללה כאשר הם עוסקים ברצפים שהם מכירים. לכן, על המורים לשקול להתחיל ברצפים פשוטים ומוכרים יותר לפני שהם מתקדמים לרצפים מורכבים מאלה. כאשר מלמדים תלמידים על הכללה, התחלה מדפוסים שהם כבר מכירים עשויה להועיל, כמו רצפי מספרים שנותנים את אותה השארית כאשר מחלקים במספר מסוים. זה יכול לעזור לתלמידים להגיע לרמה גבוהה יותר של הכללה ולחבר את הרצף עם תכונות אריתמטיות.

שנית, המורים צריכים להיות מודעים לצורת הייצוג המועדפת על תלמידיהם, בין אם היא מספרית או חזותית-ציורית ולהתאים לכך את שיטת ההוראה שלהם. בדרך כלל קל יותר לתלמידים לפתור משימות המוצגות מספרית ושיעורי ההצלחה בפתרונן גבוהים יותר. ובכל זאת, משימות המוצגות באופן חזותי-ציורי עשויות לדרוש התערבות רבה יותר מצד המורה כדי לעזור לתלמידים להבין ולנתח את הרצף.

שלישית, מורים צריכים להתמקד בטיפוח חוש



למספרים בקרב תלמידיהם. זה כרוך בסיוע לתלמידים להבין את הקשרים בין האיברים ברצף, ואת היכולת להכליל וליצור נוסחאות כדי למצוא איברים במיקומים גבוהים יותר. על ידי ניתוח ההכללות שהתקבלו יחד עם התלמידים, ודיון ביעילות של כל אחת מהן, מורים יכולים להעמיק את הבנתם של תלמידיהם לגבי הקשר בין המספרים ואת הגמישות בעבודה איתם.

המחקר תומך ברעיון שחשיבה אלגברית מתפתחת בשלבים. לכן, על המורים להתייחס לטיפוח החשיבה האלגברית כתהליך הדרגתי, המתבסס על הידע והכישורים הקיימים של התלמיד. זה כרוך בסיוע לתלמידים להכליל רעיונות מתמטיים, לבסס את ההכללות הללו באמצעות טיעונים, ולבטא אותן בדרכים פורמליות יותר ויותר המותאמות לגיל.

לבסוף, מורים צריכים להיות מודעים לשלבי ההתפתחות של החשיבה האלגברית, כפי שהוצע על ידי רדפורד (Radford, 2010). הבנת השלבים השונים תעזור למורים להתאים את ההוראה שלהם במטרה לענות על הצרכים של תלמידיהם ולעזור להם לפתח את החשיבה האלגברית.

ביבליוגרפיה

- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *ZDM*, *37*(1), 34-42.
- Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer Science & Business Media.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*, 3-22.
- Karsenty, R. (2020). Mathematical ability. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 494-497.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). New York, NY: Macmillan.
- Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*, 441-465.
- Moyer-Packenham, P. S., & Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the definition of a virtual manipulative. *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulative*, 3-23.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.
- Smith, M. S., Hillen, A. F., & Catania, C. L. (2007). Using pattern tasks to develop mathematical understandings and set classroom norms. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(1), 38-44.
- Stacey, K., & Chick, H. (2004). Solving the problem with algebra. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*, 1-20.
- Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, *49*, 152-163.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379-402.