

משחקים מתמטיים

קוביית סומה

ד"ר סבינה סגרה
המכללה האקדמית אחוה
תלפיות - המכללה האקדמית לחינוך

קוביית סומה

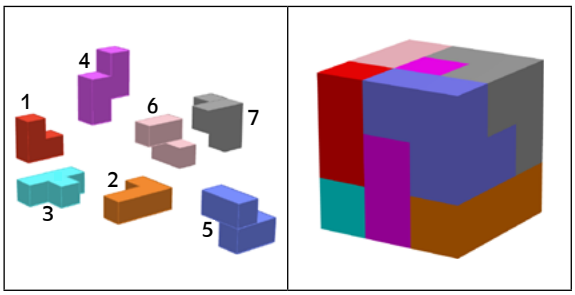
סבינה סגרה

אחת ההזדמנויות לפעילות מעניינת ומאתגרת, שאינה חלק מתוכנית הלימודים הפורמלית, היא עיסוק בפאזלים (תצרפים) המפתחים חשיבה מתמטית אצל ילדים ומעוררים את סקרנותם. כדוגמה לפעילות מן הסוג הזה נציג כאן את הפאזל הנקרא "קוביית סומה" (איור 1). ניתן ליצור את חלקי הפאזל בקלות מקוביות מתחברות, או למלמדים תוכנות כמו "טינקרקד" (Tinkercad), להדפיסם במדפסת תלת־ממד (Domínguez Martínez, 2021).

איור 1:

קוביית סומה (ימין) וחלקיה (שמאל)

התמונות נגזרות מיישומון גאוגברה מאת Steve Phelps, CC-BY-SA.



פאזלים ומשחקי הרכבה מסוג זה מפתחים מגוון יכולות חשובות אצל ילדים (פדלון ופטקין, 2012). הם מעודדים את הילדים לזהות ולעבד מידע מרחבי, ואף לפעול עם הרכבים מרחביים - מיומנות חשובה להתפתחות החשיבה המתמטית בכלל, והחשיבה הגיאומטרית בפרט (Battista, 1999). נוסף לכך, פתרון פאזלים מפתח סקרנות, סבלנות ויכולת ריכוז, שכן הילדים נדרשים לשים לב לפרטים קטנים, לנסות דרכים שונות להרכבה, ולא לוותר עד אשר מצליחים להשלים את המשימה (Van Hiele, 1999).

חשוב גם להזכיר את הסיפוק והביטחון העצמי שילדים מרגישים כאשר מצליחים להרכיב פאזל לאחר מאמץ. תחושת ההישג עשויה לתרום להעצמתם ולחיזוק אמונתם ביכולותיהם. לבסוף, פאזלים וקוביות בנייה מפתחים גם את הדמיון והיצירתיות, מכיוון שניתן להרכיב מהם צורות שונות על־פי הדמיון (אסמן, 1996). החידות המוצגות בהמשך מאמר זה יכולות להמשיך את הפעילות "קובייה ועוד קובייה" עבור תלמידים בכיתות א' ו־ב' (מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי, 2020). הפעילויות מתאימות גם לתלמידים בכיתות גבוהות יותר ואף למבוגרים.

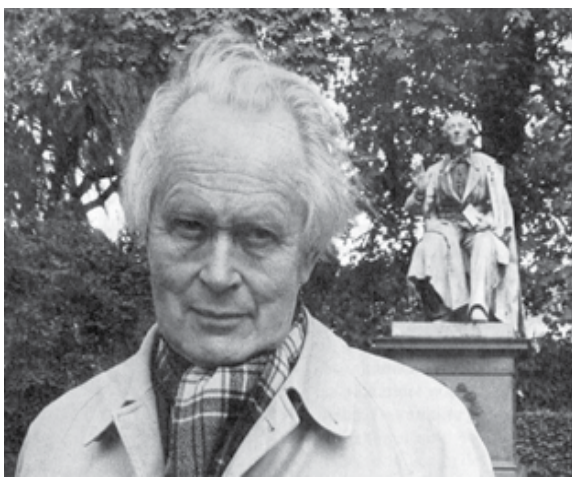
חלקי הפאזל

היוצר מאחורי קוביית סומה הוא פיט היין (איור 2), והוא גם האיש שפיתח את המשחק "הקס" שעליו כתבנו בעבר (סגרה, 2023). היין החל לדמיין את חלקי הפאזל בעקבות הרצאה של הפיזיקאי המפורסם ורנר הייזנברג (1901-1976) שהתמחה בפיזיקת הקוונטים. היין התמקד בדמיון צורות תלת־ממדיות המורכבות מארבע קוביות או פחות (כך שלכל שתי קוביות פאה משותפת), למעט תיבות (איור 3). כלומר, כל הצורות שדמיין הן קעורות עם לפחות "פינה פנימית" אחת. מתברר כי ישנם שבעה חלקים כאלה, ומהם ניתן להרכיב קובייה שלמה.

איור 2:

פיט היין (1905-1996)

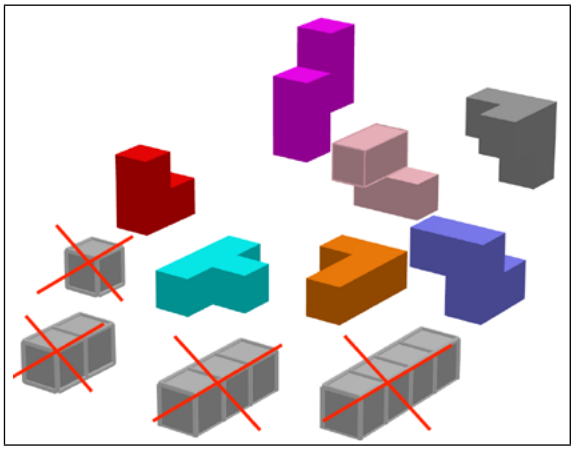
תמונת ויקיפדיה מאת André Savik, CC BY 3.



איור 3:

כל ההרכבים האפשריים מארבע קוביות או פחות, כולל תיבות. התיבות אינן נחשבות חלקי קוביית סומה, מפני שהן קמורות.

התמונה נגזרת מיישומון גאוגברה מאת Steve Phelps, CC-BY-SA.



שניים מחלקי הפאזל (מס' 5 ומס' 6 באיור 1) הם כיראליים, כלומר האחד הוא תמונת מראה של השני, בדומה לידיים של האדם. אין דרך לקבל אחד מהם באמצעות סיבובים של השני. מקור המילה "כיראליות" הוא בשפה היוונית, χείρ ("כאֵיר" בכ"ף רפה) שמשמעותה "יד", והיא מופיעה למשל במילה "כירורגיה". המושג כיראליות נפוץ יותר בכימיה, והוא מתאר תכונה חשובה ומוכרת של מולקולות.

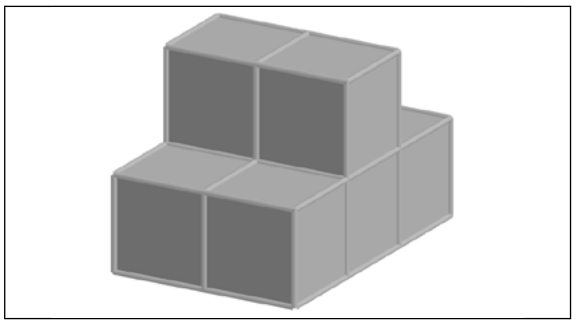
זהירות... הפאזל עלול להיות ממכר. ברומן "עולם חדש מופלא" מאת אלדוס האקסלי, סומה הוא הסם שאמור לשמח את כולם. כמו הסם "סומה" בספר, שמשמש כאמצעי לבריחה מהמציאות, גם "קוביית סומה" יכולה לספק הסחת דעת מרתקת, אם כי בצורה בריאה ומאתגרת יותר. ההבדל המשמעותי הוא שבעוד "סומה" בספר גורמת לדיכוי חשיבה עצמאית, "קוביית סומה" דווקא מעודדת חשיבה יצירתית ופתרון בעיות.

חידות

חידה ראשונה שניתן להציג לתלמידים לאחר יצירת חלקי הפאזל שנבנו מקוביות מתחברות או באמצעות מדפסת תלת־ממד, היא ליצור את ה"מדרגות" המוצגות באיור 4. חידה זו אינה קשה במיוחד ומתאימה ל"חימום". את הפתרון תוכלו לראות באיור 5.

איור 4:

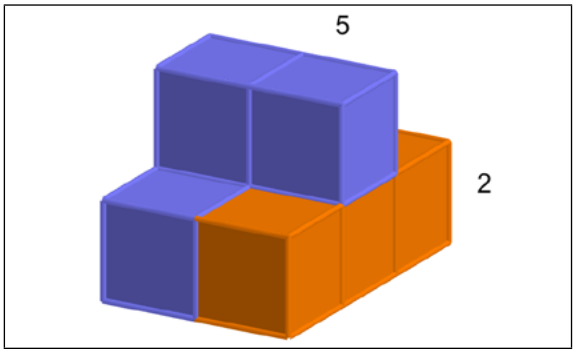
חידת המדרגות



איור 5:

פתרון לחידת המדרגות

המספרים והצבעים קשורים לאיור 1.



בשלב השני אפשר לבקש מהתלמידים להרכיב קובייה משבעת חלקי הפאזל. מלבד שיקופים וסיבובים ישנם 240 פתרונות למשימה זו, שאותם ניתן לבדוק ביישומון גאוגברה הנמצא כאן. את הפתרונות מצא ג'ון הורטון קונווי והציג אותם באופן שיטתי בגרף (Conway, 1982). תוצאה זו אושרה בהמשך גם בעזרת מחשבים בדרך של הצגת המיקום של כל אחד מחלקי הסומה באופן מתמטי (Brunvoll et al., 1986).

בעיות הרכבה רבות ניתן למצוא במאמר מאת מרטין גרדנר על קוביית סומה (Gardner, 1987). ראו גם את הקישורים בסוף המאמר.

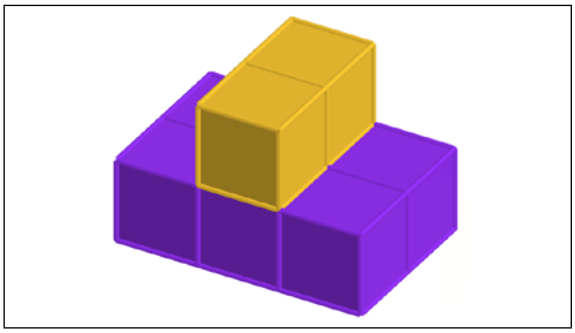
נפח

אחרי שהתלמידים הרכיבו פאונים שונים מחלקי הפאזל כדאי לבקש מהם לחשב את הנפח של הפאונים הללו בדרכים שונות. דרך אחת היא לדמיין את הפאון כמורכב מתיבות (ראו דוגמה באיור 6), לחשב את נפח התיבות כמכפלת שלושת הממדים, ולחבר את הנפחים שהתקבלו עבור התיבות השונות. דרך אחרת היא לחבר את הנפחים של חלקי הפאזל, בהתבסס על כך שהנפח של כל אחד מהחלקים הוא סכום נפחי הקוביות שמרכיבות אותו (4 יחידות נפח עבור החלקים 2 עד 7 באיור 1, ו־3 יחידות נפח עבור החלק הראשון).

מובן שהתוצאות שהתקבלו באמצעות אסטרטגיות שונות אמורות להיות זהות, והסיבה לכך היא עיקרון שימור הנפח. לפי עיקרון זה הנפח של גוף תלת־ממדי נשמר בהזזה, שיקוף, סיבוב, פירוק והרכבה. כמו עיקרון שימור השטח, עיקרון שימור הנפח יכול לסייע לתלמידים בפיתוח חשיבה מרחבית, ובמיוחד בחישוב של נפחים.

איור 6:

המדרגות של האיורים 4 ו־5, הפעם כמורכבות מתיבות.



בהקשר זה כדאי לציין משפט מעניין: נתונות שתי צורות דו־ממדיות בעלות שטח זהה. תמיד ניתן למצוא פירוק לחלקים של אחת משתי הצורות, כך שניתן יהיה להרכיב את הצורה השנייה מהחלקים הללו. אין הכללה של משפט זה לשלושה ממדים (סגרה, 2022). לפי הפרדוקס של בנך־טרסקי, ניתן לחתוך כדור מוצק למספר סופי של חלקים, ולהרכיב מהם שני כדורים זהים לכדור המקור. פרדוקס זה מנוגד לאינטואיציה שלנו לגבי שימור נפח. עם זאת, החלקים אינם "רגילים", אלא קבוצות מורכבות מאוד מתמטית, והחיתוך וההרכבה מחדש מתבססים על תכונות של קבוצות אינסופיות. זאת אומרת, שבבית הספר ניתן לבקש מהתלמידים לחתוך מבנים המורכבים מחלקי קוביות סומה לתיבות, ולחשב את הנפחים. אין השפעה של הפרדוקס על העולם הפיזי היומיומי שלנו.

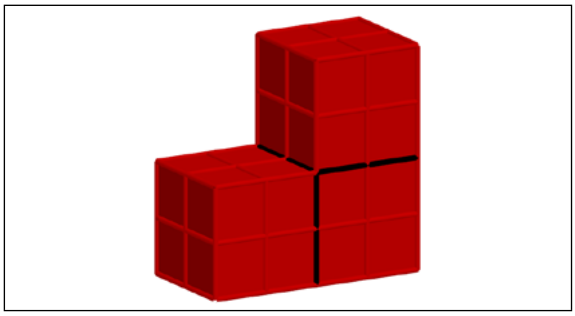
בעיית הגדלה

נתונות שמונה קוביות חופפות שמהן ניתן להרכיב קובייה חדשה גדולה. אורך המקצוע של הקובייה החדשה הוא פי שניים מאורך המקצוע של הקובייה המקורית. כל אחת מהפאות של הקובייה החדשה מורכבת מארבע פאות של הקובייה המקורית.

כאשר מרכיבים משמונה קוביות את כל אחת משלוש הקוביות שמרכיבות את החלק מס' 1 (איור 1), ניווכח שחלק זה יהיה מורכב מ־24 קוביות (איור 7). 24 הוא מספר הקוביות שמרכיבות את שאר חלקי הפאזל (שש פעמים ארבע). לכן כדאי לתת לתלמידים את המשימה להרכיב מחלקים מס' 2 עד מס' 7 (המופיעים באיור 1) העתק מוגדל של החלק מס' 1, ואכן יש פתרון למשימה זו (איור 8). הפעילות מתאימה לשמש הקדמה לנושאים הקשורים לדמיון, כגון הגדלה והקטנה ופרופורציות בין צלעות של צורות דומות. תלמידים בבית הספר היסודי אכן יכולים לעסוק במושגי דמיון גיאומטריים, אם כי הבנתם משתנה (Xistouri & Pitta-Pantazi, 2011).

איור 7:

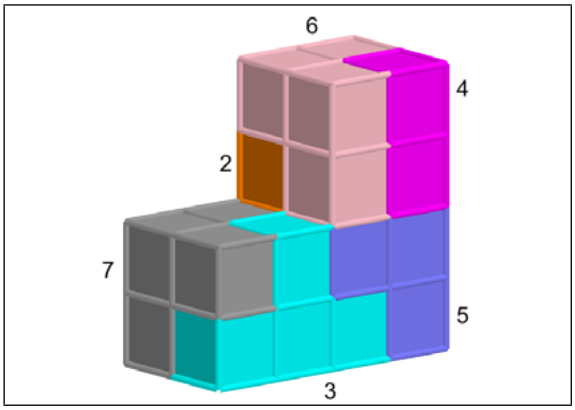
בבעיית ההגדלה, שמונה קוביות מרכיבות כל אחת משלוש הקוביות שמרכיבות את חלק מס' 1 של קוביית סומה.



איור 8:

פתרון לבעיית ההגדלה

מספור החלקים וצביעת החלקים לפי איור 1.



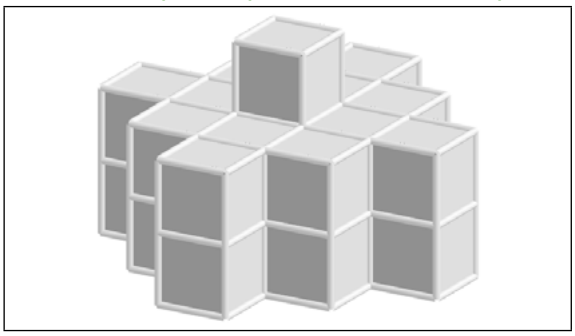
פאזל בלתי אפשרי

לא ניתן להרכיב את הצורה שבאיור 9 מחלקי הפאזל של קוביית סומה. ההוכחה היא מאת סלומון גולומב (1932-2016), מתמטיקאי ופרופסור להנדסת חשמל במכון הטכנולוגי של קליפורניה. גולומב, המוכר בקרב חובבי מתמטיקה כממציא הפוליומינואים (הכללה של אבני דומינו), תרם רבות לתחום. ההוכחה שנזכיר כאן מופיעה במאמר מאת מרטין גרדנר על קוביית סומה (Gardner, 1987).

איור 9:

חידה ללא פתרון

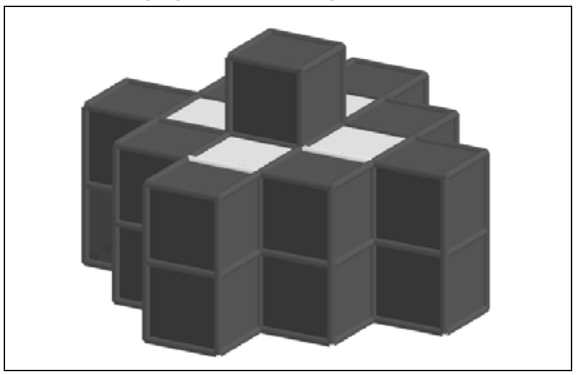
לא ניתן להרכיב צורה זו מהחלקים של קוביית סומה.



עבור הוכחה זו מוצע לצבוע את עמודי הצורה בשחור-לבן לסירוגין (איור 10), בסגנון של לוח שחמט. בצורה הצבועה ישנן 19 קוביות שחורות ו-8 קוביות לבנות. לאחר מכן מוצע לצבוע גם את חלקי הפאזל סומה. כיוון שמספר הקוביות השחורות בצורה שבאיור 10 גדול יותר ממספר הקוביות הלבנות, נבדוק עבור כל אחד מחלקי הפאזל, באיזה מיקום בתוך המבנה יהיה המספר הגדול ביותר של קוביות שחורות. ראו לדוגמה מיקום אפשרי עבור חלק מס' 6, שבו 3 קוביות של חלק זה תהיינה שחורות, ורק אחת לבנה (איור 11). התוצאות של בדיקה זו מופיעות בטבלה 1. ניתן לראות שאין אפשרות לארגן את חלקי הפאזל כך שיותר מ-18 קוביות תהיינה שחורות. לעומת זאת, נדרשות 19 קוביות שחורות עבור המבנה שבאיור 9. לכן לא ניתן להרכיב אותו מחלקי קוביית סומה.

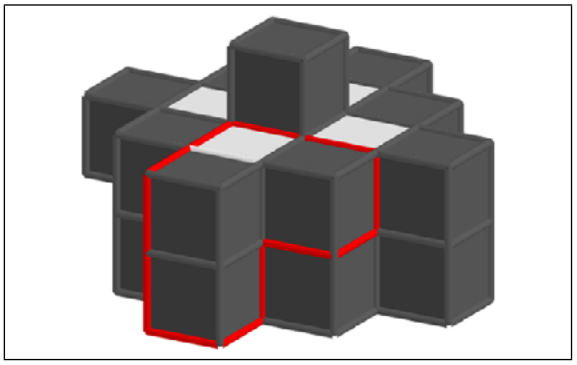
איור 10:

צביעת הצורה שלא ניתן להרכיב מחלקי קוביית סומה



איור 11:

דוגמה למיקום של חלק מס' 6 אם המטרה היא שכמה שיותר קוביות תהיינה שחורות.



טבלה 1:
תוצאות הבדיקה שנערכה כדי להוכיח שלא ניתן להרכיב מחלקי קוביית סומה את המבנה שמופיע באיור 9.

המספר הסידורי של חלק הסומה	המספר הגדול ביותר של קוביות שחורות	המספר הקטן ביותר של קוביות לבנות
1	2	1
2	3	1
3	3	1
4	2	2
5	3	1
6	3	1
7	2	2
סכום	**18**	**9**

בדומה לטנגרם, מספר הצורות שניתן להרכיב מחלקי קוביית סומה נראה כמעט בלתי מוגבל. בעיני מתמטיקאים רבים, קוביית סומה נתפסת לתואם התלת־ממדי המוצלח ביותר של משחק הטנגרם.

קישורים

- ספר גאוגברה עם מספר חידות עבור שניים, שלושה ושבעה חלקים של קוביית סומה:
https://www.geogebra.org/m/kvqyz3at
- אתר אינטרנט באנגלית עם חידות נוספות:
https://home.adelphi.edu/~stemkoski/mathematrix/somacube.html
- יישומון לטלפון חכם:
https://play.google.com/store/apps/details?id=sk.martinflorek.somacube&hl=en

ביבליוגרפיה

- אסמן, ד'. (1996). הטנגרם - כלי עזר בהוראת המתמטיקה. *מספר חזק 13 (בית ברל)*, 6-13.
- מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי. (2020). *קובייה ועוד קובייה*. אוחזר מתוך אוגדן לפיתוח ראייה מרחבית לכיתות א'-ב':
https://ymath.haifa.ac.il/images/stories/part3/teachers/ogdan-spatial-perception/9-building_with_cubes.pdf
- סגרה, ס'. (2023). המשחק "הקס". *מספר חזק 2000, 34*, 62-71.
- סגרה, ס'. (2022). חידות חיתוך והרכבה. *מספר חזק 2000, 33*, 46-55.
- פדלון, ל', & פטקין, ד'. (2012). פיתוח תפיסה מרחבית אצל בנים ובנות בכיתה ג' באמצעות יחידת הוראה חוץ קוריקולרית. *מספר חזק 2000, 21*, 31-36.
- Battista, M. T. (1999). The Importance of Spatial Structuring in Geometric Reasoning. *Teaching Children Mathematics*, *6*(3), 170–177. תרגום לעברית ע"י ב' סגליס נמצא כאן
- Brunvoll, J., Cyvin, B., Cyvin, E., Cyvin, S., Paus, A., Stlevik, M., & Stlevik, R. (1986). The computerized Soma cube. *Computers and Mathematics with Applications*, *12*(1-2 PART B), 113–121.
- Conway, J. H. (1982). Pursuing Puzzles Purposefully. In J. H. Conway, R. K. Guy, & E. R. Berlekamp, *Winning Ways for your Mathematical Plays* (p. 735). Academic Press.
- Domínguez Martínez, A. (2021). *Soma.* From Tinkercad: https://www.tinkercad.com/things/6XwQDKLAkXH-soma
- Gardner, M. (1987). The Soma Cube. In M. Gardner, *The Second Book of Mathematical Puzzles and Diversions* (pp. 65-77). Chicago: The University of Chicago Press.
- Van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. *Teaching Children Mathematics*, *5*(6), 310–316. תרגום לעברית ע"י מ' סוקניק נמצא כאן
- Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2011). Elementary students' transformational geometry abilities and cognitive style. *Proceedings of Seventh Conference of the European Research in Mathematics Education* (p. 578-587). Rzeszów, Poland.: University of Rzeszów.