

מחקר יישומי

פירוק והרכבה בפתרון בעיות גאומטריות במבחני מיצ"ב במתמטיקה

ד"ר ברוריה צובריי-פורת
חוקרת ומרצה
מכללת בית ברל ומכללת לוינסקי



פירוק והרכבה בפתרון בעיות גאומטריות במבחני מיצ"ב במתמטיקה

ברוריה צוברי-פורת

מבוא

פתרון בעיות הוא אחד מהמרכיבים המרכזיים בהוראת המתמטיקה, ומיומנות חיונית לפיתוח חשיבה מתמטית אצל תלמידים. בהקשר של לימודי הגאומטרייה, יכולת פתרון בעיות תורמת להבנת מושגים גאומטריים מורכבים ולפיתוח כלים לניתוח ופתרון בעיות חדשות. מחקרים רבים מצביעים על כך שתלמידים רבים מתקשים בפתרון בעיות גאומטריות, במיוחד כשמדובר בבעיות המחייבות שילוב של ידע מופשט וחשיבה אנליטית (למשל, שפיגל, 2018; Paraskevi & Gagatsis, 2013).

בסוף שנת הלימודים נבחנים תלמידי כיתה ה' בבחינת מיצ"ב במתמטיקה (מיצ"ב - מדדי יעילות וצמיחה בית ספרית). מבחני המיצ"ב במתמטיקה הם מבחני הישגים הבודקים בין היתר, כיצד באים לידי ביטוי התכנים המרכזיים והמיומנויות השונות על פי תוכנית הלימודים והמדיניות של משרד החינוך. המיומנויות הן מגוונות וכוללות, בין השאר, "שימוש באסטרטגיות חשיבה גבוהות" כמו הבנת תהליכים, מעבר בין ייצוגים שונים, יישום ידע נלמד בהקשרים חדשים ועוד (רקע כללי - מיצ"ב חיצוני ופנימי, אתר ראמ"ה, 2024). מיומנויות אלה הן חלק ממיומנויות הלומד במאה ה־21 המקדמות למידה מעמיקה ומשמעותית (The National Academic of Sciences Engineering Medicine, 2015).

מבחני המיצ"ב כוללים בין היתר שאלות בתחום הגאומטרייה. תוצאותיהם מראות כי תלמידים בכיתות ה' נתקלים בקשיים ניכרים בפתרון בעיות גאומטריות, והקשיים הללו לא תמיד קשורים לידע המתמטי, אלא ליכולת ליישם את הידע הזה בפתרון בעיות. מחקר זה מתמקד בניתוח קשיים של תלמידי כיתה ה' בפתרון בעיות גאומטריות מתוך מבחני המיצ"ב, ובתוך כך התמקדות בהבנה ויישום של היוריסטיקות כמו "פירוק והרכבה". מטרת המחקר היא לחשוף את הגורמים המרכזיים לקשיים אלו, ולהציע דרכים לשיפור הוראת הגאומטרייה לשם קידום מיומנויות של פתרון בעיות.

1. רקע תיאורטי למחקר

אחת המיומנויות הנדרשות במבחן מיצ"ב היא **פתרון בעיות** בנושאים שנלמדו (אתר ראמ"ה, 2024). בפתרון חלק מהבעיות במיצ"ב נדרשת פנייה להיוריסטיקות[1] שונות תוך כדי ביצוע בקרה על תהליך פתרונן. המודעות לחשיבות פתרון בעיות במתמטיקה והפיכתה לנושא מרכזי בחינוך מתמטי החלה בשנות השמונים של המאה ה־20 בארה"ב (Schoenfeld, 1985, 1992). בעקבות זאת נערכה רפורמה שכללה שינויים בדרכי הוראת מתמטיקה, והמתמטיקה הפכה ממקצוע שעיקרו שינון פרוצדורות ותרגול למקצוע המתמקד בבניית השערות, חקירת תבניות ובחיפוש אחר פתרונות שונים (NCTM, 1980; Schoenfeld, 1985, 1992).

1.1. פתרון בעיות (Problem solving)

בעשורים האחרונים תופסים אנשי חינוך מתמטי בעולם (CCSSI, 2010 - Common Core State Standards Initiative) **פתרון בעיות** כאחת מן המיומנויות הבסיסיות של המאה ה־21 וכמיומנות חיונית לתפקוד מוצלח בעידן המידע והתקשורת שאנו חיים בו. קוקרופט (Cockroft, 1982) טען ששימוש בפתרון בעיות הוא אמצעי לפיתוח חשיבה מתמטית המשמשת ככלי מעשי בחיי היום־יום ואשר מסייעת במגוון סיטואציות חדשות ובלתי מוכרות.

1. הקריאה "אאוריקה!" שייכת למתמטיקאי יווני מפורסם ארכימדס (287-212 לפנה"ס) ומזוהה עם גילויו של אחד החוקים הפיזיקליים. "אאוריקה!" הוא ביטוי לשמחה כאשר עולה רעיון חדש או נפתרת בעיה מורכבת. לכן אסטרטגיות כלליות לפתרון בעיות נקראות היוריסטיקות.



בפתרון בעיות ישנה חשיבות רבה לתהליכים קוגניטיביים המתרחשים אצל הפותר ולפיתוח כלים ואסטרטגיות.

הואיל וכך, מחקרים בחינוך המתמטי מצאו שיש להתמקד בתהליך פתרון בעיה יותר מאשר בפתרונות עצמם (גירון, 1999; Chung & Krawec, 2014; Tam, 2005). ג'ורג' פויה הציע תהליך לפתרון בעיות מתמטיות הכולל ארבעה שלבים: 1. הבנת הבעיה; 2. תכנון; 3. יישום התוכנית; 4. סקירה אחורנית - אימות, הערכה ובדיקת הפתרון (Polya, 1945, 1957).

שוינפלד (Schoenfeld, 1985, 1992), חוקר בולט בתחום פתרון בעיות, הציע מודל קוגניטיבי לפתרון בעיות מתמטיות. באמצעות המודל ניתן לנתח קשיים של תלמידים על פי ארבעה רכיבים:

1. **משאבים** (Resources) - הידע הנדרש (ידע קודם) המושגי, העובדתי, האלגוריתמי, האינטואיטיבי, הפורמלי והפרוצדורלי שיש לפותר בתחום שבו עוסקת בעיה, והקשרים בין רכיבי ידע בתוך תחום תוכן ובין תחומי תוכן שונים.
2. **היוריסטיקות** (Heuristics) - אסטרטגיות וטכניקות לחיפוש פתרון לבעיה לא מוכרת או מורכבת, לדוגמה: אנלוגיה לפתרון ידוע, בחינת מקרים פרטיים והכללה, "הליכה לאחור", פירוק בעיה לתת־בעיות, מעבר בין ייצוגים שונים, בניית עזר לבעיה נתונה, ועוד.
3. **בקרה** (Control) - מודעות הפותר לתהליך הפתרון של עצמו, פעולות כגון: תכנון, קבלת החלטות, הערכה, פירוט של נכונות הפתרון ויעילותו.
4. **אמונות** (Beliefs) - אמונות של הפותר על אודות המתמטיקה ועל יכולותיו: כיצד לגשת לבעיה, כיצד להוכיח, כיצד יש לבצע בקרה ועוד.

במחקר זה בחרנו להתרכז ברכיב "היוריסטיקות".

1.2. היוריסטיקות בפתרון בעיות

חקר ההיוריסטיקות שואף להבין את תהליך פתרון הבעיות, ובייחוד את האופרציות המנטליות אשר טיפוסיות בתהליך זה, במטרה ללמוד על תהליכים אשר אינם תלויים בתחום התוכן, וניתנים ליישום בכל סוגי הבעיות (Polya, 1945). זיהוי התנהגויות היוריסטיות אפקטיביות של תלמידים ואיתור קשיים ביכולת יישום היוריסטיקות עשויים לתרום באופן משמעותי לתהליך ההוראה ולפיתוח תוכניות לימודים מתאימות.

היוריסטיקות הן אסטרטגיות כלליות המתאימות למגוון בעיות ואינן תלויות בנושא מסוים (Anderson, 1985; Schoenfeld, 1985, 1992). פויה מונה מספר היוריסטיקות שבאמצעותן חקר את תהליך פתרון בעיות, ובמיוחד את האופרציות המנטליות המאפיינות תהליך זה (Polya, 1945, 1957). מטרתו ככלל, ללמד על תהליכים שאינם תלויים בתחום התוכן ושניתן ליישמם בכל סוגי הבעיות. ההיוריסטיקות העיקריות הן: חיפוש אינדוקטיבי; הכללה; אנלוגיה; רדוקציה; פירוק והרכבה; מעבר בין ייצוגים שונים/המחשה; הליכה לאחור; בניית עזר. נתייחס בהרחבה לשתיים מההיוריסטיקות: פירוק והרכבה והליכה לאחור, אשר את השימוש בהן בפתרון בעיות גאומטריות בחנו במסגרת המחקר.

מחקרים קודמים על אודות היוריסטיקות חקרו קשיי תלמידים בשימוש בהיוריסטיקות בנושאים מתמטיים שונים בקרב תלמידי חטיבות ביניים, תיכון, סטודנטים ופרחי הוראה. נחקרו קשיי תלמידים בשימוש בהיוריסטיקה "פירוק והרכבה" בפתרון בעיות גאומטריות (לחמי, 2009; שפיגל, 2018); קשיים בשימוש בהיוריסטיקה "היסק לאחור" בפתרון בעיות שגרתיות פחות במתמטיקה בקרב פרחי הוראה (וולפוביץ, 2004; שפיגל, 2006). לא נערך מחקר שבחן קשיי תלמידים בפתרון בעיות מיצ"ב בבחינת השימוש בהיוריסטיקות "פירוק והרכבה" ו-"הליכה לאחור" בקרב תלמידי כיתה ה' (כיתות היסוד). מחקר זה בוחן קשיים אלו.

שוינפלד ציין שהוראה המבוססת על תיאור דרכים שונות ליישום אסטרטגיות והמאמנת תלמידים לבחור אסטרטגיה מתאימה מבין אוסף אסטרטגיות, מאפשרת להטמיע שימוש באסטרטגיות שנלמדו על מגוון בעיות ותחומי תוכן (Schoenfeld, 1985). שתי

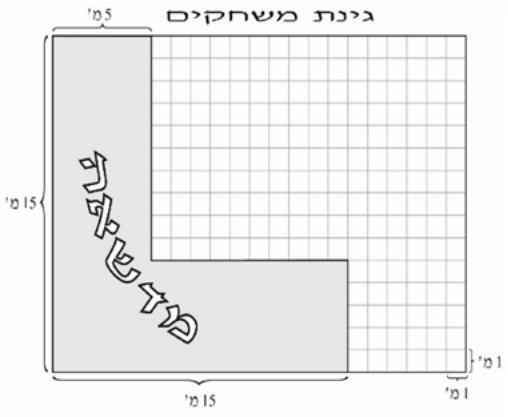
היוריסטיקות מרכזיות בפתרון בעיות גאומטריות הן: פירוק והרכבה והליכה לאחור.

אחד הנושאים המרכזיים בתוכנית הלימודים במתמטיקה בבית הספר היסודי הוא גאומטרייה, והוא נתפס כאחד החשובים והמורכבים ביותר מבין התחומים המתמטיים השונים (Hoffer, 1981, 1983; Arcavi, 2003; Zhang, Ding, Stegall, & Mo, 2012 אצל Rivella et al., 2021).

1.2.1. היוריסטיקה "פירוק והרכבה" בפתרון בעיות גאומטריות

ההיוריסטיקה **פירוק והרכבה** היא אסטרטגיה לפתרון בעיות שבה מפרקים את הצורה לחלקים קטנים יותר (פירוק), ובמידת הצורך מרכיבים את פתרונה מן החלקים המצומצמים (הרכבה). להלן דוגמה לבעיה גאומטרית מתוך שאלון מיצ"ב תשע"ז (נוסח א') של כיתה ה', ואשר בפתרונה מתאים להשתמש בהיוריסטיקה פירוק ו/או הרכבה (איור 1). הבעיה עוסקת בחישוב שטח של מצולע כללי:

איור 1:



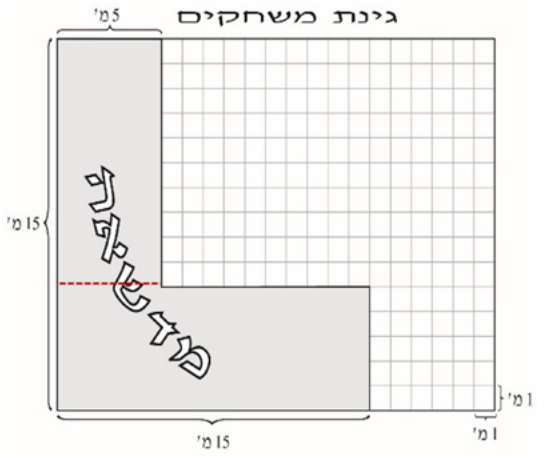
לפניכם סרטוט מוקטן של גינת משחקים בצורת מלבן ובתוכה מִדשאה.

א. מה השטח של המדשאה? הַציגו את דרך הפתרון.

תשובה: _____ מ"ר.

אחת הדרכים לפתרון בעיה זו היא באמצעות היוריסטיקה **פירוק והרכבה**.

איור 2:



נדגים את אחד הפירוקים האפשריים:

שלב I - פירוק המשושה לשני מלבנים באמצעות בניית עזר (איור 2).

שלב II - חישוב השטח של כל אחד מהמלבנים.

שלב III - הרכבה מחדש על ידי חישוב סכום שטחי המלבנים שחושבו בשלב II.

בפתרון הבעיה ישנו **פירוק** נוסף של צלע שאורכה 15 מ' לשני קטעים של 5 מ' ו־10 מ' אשר כל אחד מהם הוא צלע באחד מהמלבנים. נוסף לכך, הבעיה מזמנת שילוב היוריסטיקה נוספת: **בניית עזר** של סרטוט קטע לצורך **פירוק** המשושה הנתון (הקטע האדום באיור 2).

על פי נתוני ראמ"ה, 43.9% מהתלמידים בשנת תשע"ז **שגו** בפתרון הבעיה, 2.9% לא השיבו עליה, 7.2% ענו חלקית ו־46% השיבו נכונה (ראמ"ה, 2024).

היוריסטיקה נוספת שבאה לידי ביטוי בפתרון בעיות גאומטריות בשאלוני מיצ"ב של כיתה ה' היא ההיוריסטיקה **הליכה לאחור**. בהיוריסטיקה זו מתחילים לפתור את הבעיה מן הסוף (מן המטרה, ממה שצריך לחשב/לבנות) אל ההתחלה (נקודת המוצא).

ההיוריסטיקה הליכה לאחור כוללת מספר רכיבים:

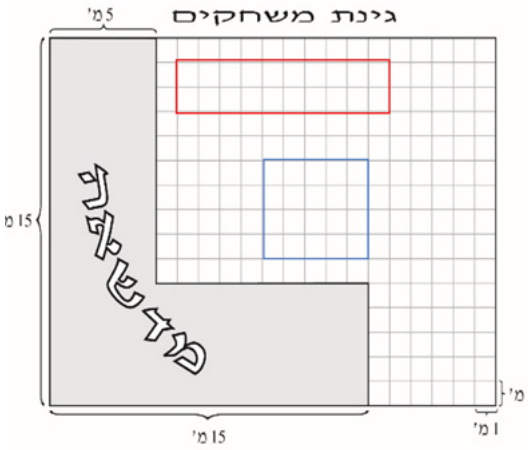
1. יכולת לחשוב על המטרה כנקודת מוצא.
2. יכולת להכיר ברלוונטיות שבהפיכת פעולות אריתמטיות בסיסיות לפעולות ההפוכות להן.



3. היכולת לקשר את המצב הסופי של מערכת נתונה למצבים הקודמים לו.
4. היכולת לבצע היקש לאחור בצעדים.
5. היכולת לבצע הכללה של תהליך ההליכה לאחור (וולפוביץ, 2004; שפיגל, 2006).

גול טען כי יכולת החשיבה לאחור אינה מולדת ולכן חשוב להקנותה (Gole, 2003). שליטה בשיטה תהווה כלי נוסף לפתרון בעיות ותתרום לביטחון עצמי ולחשיבה יצירתית בעת חיפוש פתרונות לבעיות שאינן מוכרות. בפתרון בעיות גאומטריות בשאלוני מיצ"ב לרוב נדרש שימוש בהיוריסטיקה הליכה לאחור בשילוב עם פירוק ו/או הרכבה. נדגים את השימוש בהיוריסטיקה הליכה לאחור בפתרון סעיף ב'1 והרכבה בסעיף ב'2 לבעיה שהוצגה לעיל. סעיף ב' עוסק בתכונות מלבן וחישוב שטח (איור 3):

איור 3:



ב. באזור שאין בו מדשאה מתכננים להקים בריכת דגים בצורת **מלבן בשטח של 20 מ"ר**.

1. כִּתבו הצעה לאורכי הצלעות של בריכת הדגים, כך שיתאימו למידות שבסרטוט.
   אורך צלע אחת _____ מ',
   ואורך הצלע הסמוכה לה _____ מ'.
2. **סַרטטו** בתוך הסרטוט של גינת המשחקים את בריכת הדגים לפי המידות שהצעתם.
3. מה היקף בריכת הדגים שהצעתם?

תיאור תהליך פתרון לסעיף ב'1:

שלב I - התלמיד נדרש לחפש שני מספרים שמכפלתם 20. כל אחד מהם מייצג צלע במלבן (שתי צלעות סמוכות). שימוש בהיוריסטיקה **הליכה לאחור** מתבטא בבניית מלבן על פי "מספר מטרה" - שטח של 20 מ"ר;

שלב II - הרכבה של מלבן באמצעות סרטוט שתי צלעות סמוכות. באיור 3 מוצגות שתי האפשרויות: מלבן אדום 2×10 ומלבן כחול 4×5.

על פי נתוני ראמ"ה, 24.4% מהתלמידים בשנת תשע"ז **שגו** בפתרון סעיף ב'1 של הבעיה, 4.1% לא השיבו עליה, ו־71.5% השיבו נכונה (ראמ"ה, 2024).

1.3. קשיי תלמידים בפתרון בעיות גאומטריות בבחינות מיצ"ב

שליש מהבעיות המוצגות במבחנים ארציים (מבחני מיצ"ב ומבחני מפמ"ר) ובין־לאומיים (מבחני PISA ומבחני TIMSS) הן בעיות גאומטריות. ממצאי מבחנים אלה חושפים אחוזי הצלחה נמוכים יחסית בתחומים אלו (ראמ"ה, 2024) לעומת תחומים אחרים (למשל, פעולות במספרים טבעיים).

1.3.1. קשיים במשאבים

מחקרים שעסקו בפתרון בעיות בגאומטרייה ובמדידות (למשל: כהן, 2007; Deliyianni et al., 2010; Huang, 2015; Tan Sisman & Aksu, 2016), בקרב תלמידי בית הספר היסודי, תלמידי חטיבות הביניים (למשל: לחמי, 2009; שפיגל, 2018; Chappell & Thompson, 1999) ותלמידי התיכון (למשל: Chinnappan, 1998; Machaba, 2016) חשפו קטגוריות שונות של יכולות של תלמידים בניווט, בהפקת מידע ובניצול יעיל של **משאבים**. הם הצביעו על תפיסה מצומצמת של סכֵמות גאומטריות (למשל, זיהוי צורות גאומטריות, טרנספורמציה של צורות), שימוש חלקי **במשאבים** (למשל, תפיסת המושגים אורך ושטח) וידע קונספטואלי חסר או חלקי בתהליך פתרון בעיות (למשל, קשר בין גובה משולש לשטחו).



כידוע, ישנן בעיות גאומטריות משני סוגים: בעיות חישוב ובעיות הוכחה. נתמקד בקשיים הנובעים מתכונות מרחביות של גאומטרייה בבעיות חישוב. לצורות גאומטריות יש בו זמנית שני היבטים: היבט מושגי והיבט צורני. ההיבט המושגי של צורות נובע מכך שהן מבטאות רעיון כללי, מופשט, שמשמעותו נקבעת על פי ההגדרה. ההיבט הצורני נובע מהתכונות המרחביות שהצורות מייצגות (Fischbein, 1993). שילוב בין הפן המושגי לפן הצורני בתהליך פתרון בעיות גאומטריות מבטא מצב אידיאלי.

הקושי **בהיבט המושגי** משתקף בתופעת ה"אב טיפוס" (Prototype). רכישת המושג תלויה בהיווצרות דימוי מושג (Concept Image). דימוי מושג הוא קבוצה של תכונות, קשרים ותמונות המייצגים את המושג במוחו של הפרט. הוא נרכש בהתנסויות, ויכול להתאים להגדרת המושג באופן מלא, חלקי או מנוגד לה (Hershkowitz & Vinner, 1983). בגאומטרייה יש לכל מושג לפחות דוגמה טיפוסית אחת הנרכשת ראשונה בלימוד המושג, ולכן קיימת לרוב בדימוי המושג. הדוגמאות הטיפוסיות הן, בדרך כלל, תת־קבוצה בקבוצת הדוגמאות של המושג. קשיים נוצרים כאשר משתמשים באב טיפוס לצורך בחינת הדוגמאות האחרות תחת להשתמש בהגדרת המושג (Bishop, 1986).

דוגמאות לקושי **בהיבט הצורני** ניתן לראות במחקריו של דובל (Duval, 1995, 1998, 1999) שבחן, בין השאר, את השימוש בפירוק ויזואלי של צורות. הוא מתייחס לגורמים מסייעים ומעכבים את זיהוי התת־צורות. למשל, קשה יותר לאתר פירוק של צורה גאומטרית לתת־צורות כאשר התת־צורות אינן משלימות לצורה מוכרת. חוקרים נוספים (דבורה, 2003; לחמי, 2009) שבחנו קושי זה - יכולת התלמידים להבחין ב"חלקים מול השלם", מצאו כי הקושי העיקרי בפירוק רלוונטי של סרטוט טמון באי־זיהוי הפוטנציאל שבפירוק צורה או מבנה לתת־צורות או מבנים מוכרים (צורות המרכיבות אותה), גם כאשר ישנם גורמים המסייעים לזהות את הפירוק הנדרש.

הקשיים שתוארו בהיבט הצורני ובהיבט המושגי בגאומטרייה וקשיים בהבנת מושגים גאומטריים כפי שהתבטאו במחקרים קודמים מתייחסים לקשיים ב"משאבים" של תלמידים בתהליך פתרון בעיות (רכיב ראשון בפתרון בעיות על פי המודל הקוגניטיבי של שוינפלד). קשיים בשימוש בהיוריסטיקות בתהליך פתרון בעיות (רכיב שני בפתרון בעיות על פי המודל הקוגניטיבי של שוינפלד) לא נבחנו בגאומטרייה בקרב תלמידי בית ספר יסודי.

ממצאים מתוך מבחני המיצ"ב ב־13 השנים האחרונות (תשס"ב - תשע"ד) מעידים על אחוז שגיאות הנע בין 20% ל־70% בפתרון בעיות גאומטריות שבהן נדרשת פנייה להיוריסטיקה פירוק והרכבה. אחוזי ההצלחה הנמוכים בפתרון בעיות אלו מעידים על מיומנות חלקית של התלמידים בשימוש בהיוריסטיקות. שליטה במגוון רחב של היוריסטיקות היא אחד הרכיבים המהותיים המובילים להצלחה בפתרון בעיות (למשל: עובדיה, 2017; רייזמן־דן, 2023; Koichu, Berman & Moore, 2004; Martinez, 1998; Schoenfeld, 1985, 1992).

1.3.2. קשיים בהיוריסטיקות

חוקרים הצביעו על קשיי תלמידים בשימוש בהיוריסטיקה **פירוק והרכבה** בפתרון בעיות בגאומטרייה ובמדידות (למשל: לחמי, 2009; שפיגל, 2018; Paraskevi & Gagatsis, 2013). הקשיים במחקרים אלה הוסברו בהתייחס לתאוריה של דובל (Duval, 1995, 1998, 1999) בנוגע לתפיסות ויזואליות של צורה - קושי בהיבט צורני וביכולת תפיסה אופרטיבית.

2. מערך המחקר

מטרת המחקר הייתה לאפיין את הקשיים של תלמידי כיתה ה' בפתרון בעיות גאומטריות מתוך שאלון מיצ"ב, לנתח אותם על פי שלושה מודלים: המודל הקוגניטיבי של שוינפלד (Schoenfeld, 1985, 1992), מודל הידע הפרוצדורלי והקונספטואלי של היברט ולפבר (Hiebert & Lefevre, 1986) ומודל התפיסה הוויזואלית של דובל (Duval, 1998), ולבחון את



הסיבות האפשריות להם.

אוכלוסיית המחקר: 90 תלמידי כיתה ה' משני בתי ספר יסודיים ממרכז הארץ. התלמידים למדו עם מורים שונים והיו בעלי הישגים לימודיים שונים (אוכלוסיית המחקר לא כללה תלמידים משולבים או לקויי למידה).

כלי המחקר: כלי המחקר הוא מבחן מיצ"ב נוסח א' תשע"ב שכלל 37 בעיות: 15 מתוכן (כ־40%) הן בעיות אשר בפתרונן מתאים לפנות להיוריסטיקה פירוק והרכבה לעיתים בשילוב היוריסטיקה נוספת (הליכה לאחור או מעבר בין ייצוגים). בעיות אלה נותחו וחולקו לשלושה נושאים מתמטיים על פי המשאבים הנדרשים בפתרונן: חמש בעיות בגאומטרייה, ארבעה ביטויים אריתמטיים ושש בעיות בצורות ייצוג שונות. בכל הבעיות פרט לאחת משולבת היוריסטיקה נוספת של הליכה לאחור או מעבר בין ייצוגים, או שתיהן.

נוסף לשאלון המחקר נערכו ראיונות אישיים עם 15 תלמידים.

מהלך המחקר: התלמידים התבקשו לענות על שאלון מיצ"ב תשע"ב בפרק זמן של כ־90 דקות. פתרונות התלמידים נותחו, מהם מופו הפתרונות השגויים.

בעקבות ניתוח הפתרונות השגויים התקיימו ראיונות אישיים עם 15 תלמידים שביטאו קושי בפתרון הבעיות. הקשיים שנחשפו בתחום הגאומטרי נותחו על פי שלושת המודלים, כאמור לעיל.

במאמר זה נדון בממצאים ובקשיים שבאו לידי ביטוי בפתרון חמש הבעיות הגאומטריות. חמש הבעיות מאופיינות בהיותן מזמנות פתרון באמצעות ההיוריסטיקה פירוק והרכבה, ובחלקן נדרש שילוב של היוריסטיקה נוספת (הליכה לאחור, בניית עזר).

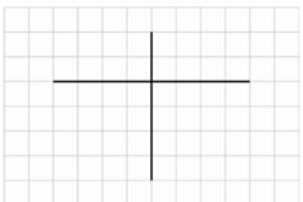
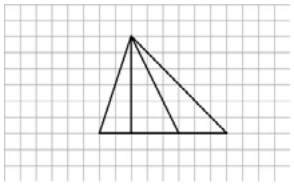
3. ממצאים

ניתוח השגיאות הראה כי מרבית הקשיים נבעו ממיומנות מצומצמת או חסרה בשימוש בהיוריסטיקות פירוק או הרכבה והליכה לאחור או שתיהן ובהבנה קונספטואלית חלקית של מושגים גאומטריים ותכונות של צורות.

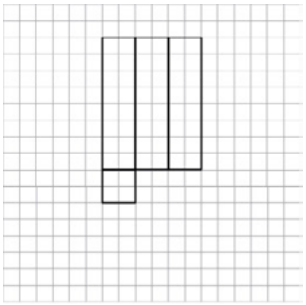
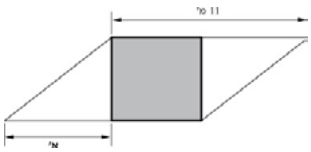
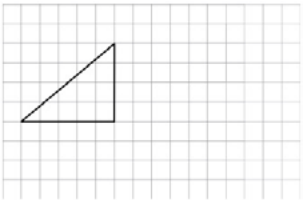
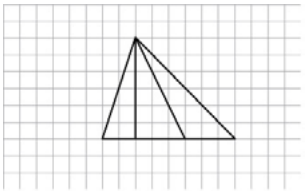
בטבלה 1 מוצגות חמש הבעיות הגאומטריות שפתרו התלמידים ואשר פתרונותיהן נותחו, אחת מהן כוללת שני סעיפים (23א', 23ב'). הבעיות מוצגות בטבלה על פי סדר - מאחוז ההצלחה הגבוה ביותר בפתרון הבעיה לאחוז ההצלחה הנמוך ביותר.

טבלה 1:

הצגת הבעיה, תיאורה ומאפייניה ואחוז ההצלחה בפתרון הבעיה

מספר בעיה במבחן מיצ"ב	תיאור הבעיה	מאפייני הבעיה		אחוז הצלחה
		משאבים (מושגים)	היוריסטיקות	
בעיה 1 (בעיה מס' 4 במיצ"ב)	הקטעים המסורטטים לפניכם הם אלכסוני מרובע. סרטטו את צלעות המרובע. 	אלכסון במרובע	הרכבה והליכה לאחור	92%
בעיה 2 (בעיה מס' 23א' במיצ"ב)	צִבעו בסרטוט משולש קהה זווית. 	תכונות משולשים	פירוק	89%



בעיה 3 (בעיה מס' 21 במיצ"ב)	לפניכם חלק מפריסה של תיבה שחסרות בה שתי פאות. הוסיפו את הפאות החסרות כך שתתקבל פריסה של תיבה.		פריסת תיבה	פירוק והרכבה	64%
בעיה 4 (בעיה מס' 26 במיצ"ב)	לפניכם סרטוט מוקטן של מקבילית ובתוכה ריבוע. שטח הריבוע 25 מ"ר (מטר רבוע). מה אורך הקטע המסומן באות א'?		תכונות מקבילית וריבוע, מדידות אורך	פירוק והליכה לאחור	53%
בעיה 5 (בעיה מס' 25 במיצ"ב)	סרטטו משולש חד־זוויות ששטחו שווה לשטח המשולש שבסרטוט.		גובה במשולש ושטח משולש	פירוק והרכבה הליכה לאחור	43%
בעיה 6 (בעיה מס' 23ב' במיצ"ב)	ב. צִבעו בסרטוט משולש ישר זווית שהוא גם שווה שוקיים.		תכונות משולשים	פירוק והרכבה	19%

שתי הבעיות הראשונות שיוצגו מתוך חמש הבעיות הגאומטריות מאופיינות בשלב אחד של פתרון. אחריהן יוצגו שלוש בעיות שהתאפיינו בשני שלבים של פתרון, ושמשלבות היוריסטיקה הליכה לאחור עם פירוק והרכבה. פתרונות התלמידים ששגו דורגו על פי שתי רמות:

רמה א' - הרמה הנמוכה ביותר שאליה שויכו תלמידים אשר ביטאו קושי בשלב הראשון של פתרון הבעיה - שימוש בפירוק ו/או הרכבה.

רמה ב' - שאליה שויכו תלמידים אשר ביטאו יכולת חלקית בשימוש בהיוריסטיקה פירוק ו/או הרכבה, וביטאו קושי בתמרון עם היוריסטיקה הליכה לאחור.

ממצאי המחקר חשפו קשיים של תלמידים שהתבטאו בשלושה מרכיבים קוגניטיביים:

1. קושי בפירוק של צורה לתת־צורות.
2. קושי בהרכבה של צורה מתת־צורות או מרכיב נתון שהוא חלק ממנה בשילוב עם היוריסטיקה הליכה לאחור.
3. קושי ביכולת לבצע ויזואליזציה לצורות במישור או לגופים במרחב.

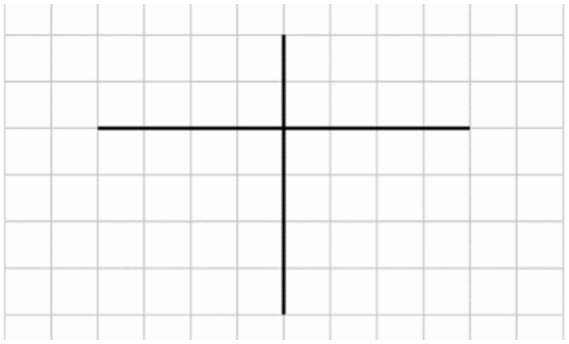
הממצאים שעלו לגבי כל אחת מהבעיות יוצגו על פי סדר הצגתן בטבלה 1 מהבעיה הפשוטה ביותר למורכבת יותר - מהבעיות שאחוז השגיאות בפתרונן היה הנמוך ביותר לבעיות שאחוז השגיאות בפתרונן היה הגבוה ביותר.



3.1. בעיה מס' 1

(בעיה 4 מתוך מבחן המיצ"ב תשע"ב):

איור 4:

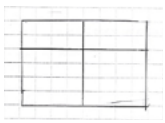


הבעיה: הקטעים המסורטטים לפניכם הם **אלכסוני מרובע.** סרטטו את צלעות המרובע (איור 4).
פתרון הבעיה מְזַמֵּן פנייה להיוריסטיקה **הרכבה** בשילוב **הליכה לאחור**.
מאפיין ההרכבה: סרטוט ארבעה קטעים שיהוו צלעות מרובע ששני הקטעים הנתונים יהוו את אלכסוניו (איור 4א'). 8% מהתלמידים שגו בפתרון הבעיה. **האתגר** בפתרון הבעיה הוא במוטיב ההליכה לאחור: בדרך כלל נתון מרובע, ויש לסרטט את שני אלכסוניו. בבעיה זו נתונים שני אלכסונים ויש לסרטט את צלעותיו. התלמידים ששגו ביטאו קושי בהבנה קונספטואלית של המושג אלכסון (משאבים) ובשילוב היוריסטיקות הליכה לאחור עם הרכבה. באיורים 5 ו־6 דוגמאות לפתרונות שגויים של תלמידים.

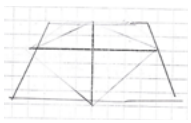
איור 4א':

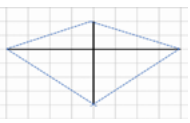
פתרון הבעיה

איור 5:



איור 6:



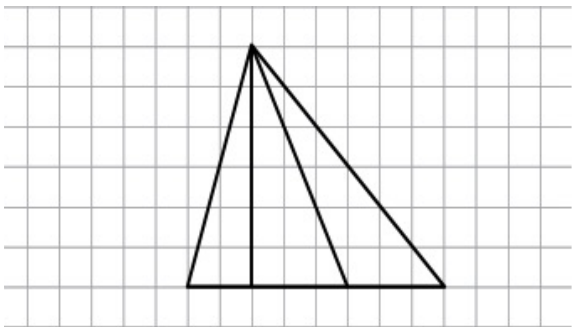


עדות לקושי בקטע מריאיון עם תלמיד ששגה: "*אני יודע מה זה אלכסון אבל לא ידעתי איך לסרטט את המרובע שהקווים האלו יהיו האלכסונים שלו*" (איור 6). עדות זו מבטאת קושי בהיבט המושגי - הבנה קונספטואלית חלקית של מושג האלכסון.

3.2. בעיה 2

(בעיה מס' 23 סעיף א' מתוך מבחן המיצ"ב תשע"ב):

איור 7:



בעיה: צְבעו בסרטוט משולש קהה זווית.
פתרון הבעיה מְזַמֵּן זיהוי משולשים על פי תכונותיהם מבין משולשים שונים שבסרטוט (איור 7).
המאפיין את פתרון סעיף א' של הבעיה (איור 8) הוא **פירוק**: פירוק של המשולש הנתון לשלושה משולשים אשר אחד מהם (משולש ימני (כחול) באיור 8) עונה על דרישות הבעיה. בפתרון זה שגו 11% מהתלמידים. תלמידים אלה ביטאו קושי בפירוק צורה (משולש) לתת־צורות (שלושה משולשים המרכיבים את המשולש "הגדול"). קושי זה נבע מיכולת חלקית לזהות משולש קהה זווית כחלק ממבנה/סרטוט (זיהוי חלק ממבנה 'שלם').

איור 8:

פירוק משולש לשלושה משולשים - פתרון סעיף א'



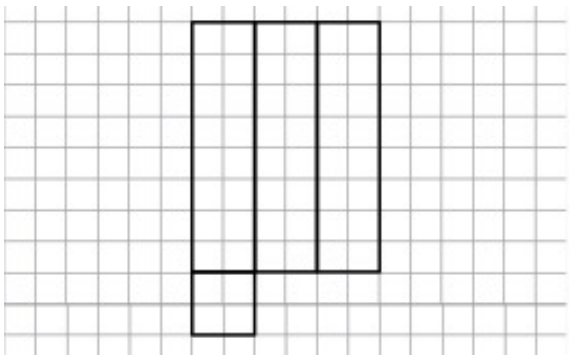
שלוש הבעיות הבאות מאופיינות בשימוש בהיוריסטיקה פירוק והרכבה בשילוב עם היוריסטיקה הליכה לאחור. פתרון בעיות אלה כולל שני שלבים.



3.3. בעיה 3

(בעיה מס' 21 מתוך מבחן המיצ"ב תשע"ב):

איור 9:

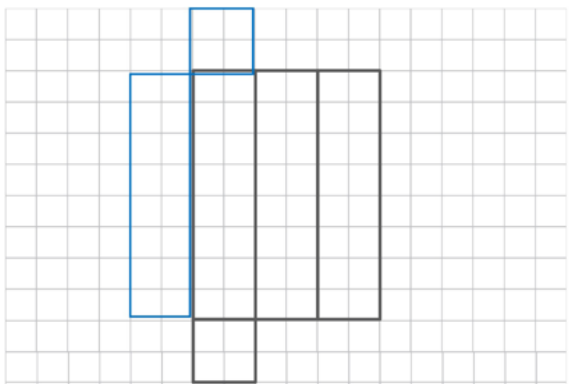


הבעיה: לפניכם חלק מפריסה של תיבה שחסרות בה שתי פאות. הוסיפו את הפאות החסרות כך שתתקבל פריסה של תיבה.

פתרון הבעיה מְזַמֵּן פנייה להיוריסטיקה **פירוק והרכבה** בשילוב היוריסטיקה **הליכה לאחור** (איור 9).

איור 9א':

דוגמה לפתרון הבעיה



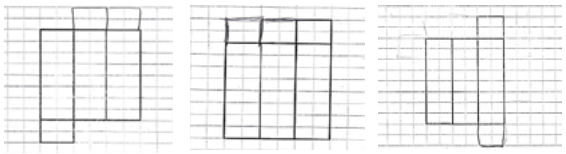
מאפיין הפירוק: ביצוע ויזואליזציה לגוף תלת־ממד (תיבה) לשש פאותיו באופן שתתקבל פריסתו. לאחר מכן הרכבת הפאות החסרות בסרטוט המוצג בדו־ממד. בהשלמת הפאות החסרות על התלמיד להקפיד על גודלן ומיקומן הנכון בסרטוט הקיים (איור 9א').

36% מהתלמידים שגו בפתרון הבעיה. **האתגר** בפתרון הבעיה מורכב משני מרכיבים:

1. **פירוק** תיבה לשש פאות הטומן בחובו יכולת ביצוע ויזואליזציה, כלומר מעבר מגוף תלת־ממד לצורה בדו־ממד.
2. **הרכבת** החלקים המפורקים במיקום ובגודל הנכונים כך שתתקבל פריסת נכונה של תיבה.

קושי בפירוק תיבה (גוף תלת־ממד) לחלקיה, ולאחר מכן בהרכבה של החלקים החסרים בגודל ובמיקום הנכונים כך שתתקבל צורה דו־ממדית (פריסה של התיבה) נובע מקושי בוויזואליזציה. עדויות לקשיי התלמידים באיורים 10-12:

איור 10: **איור 11:** **איור 12:**



באיור 10 מתוארת השלמה חלקית של חלקי התיבה. עדויות נוספות בקטעי ראיונות שהתקיימו עם שניים מהתלמידים ששגו:

תלמיד א': *"לא הצלחתי לדמיין את התיבה כשאני פותח אותה... לא הצלחתי לראות את החלקים שלה בדמיון ולסרטט את זה... לא יודע למה.. היה לי קשה".*

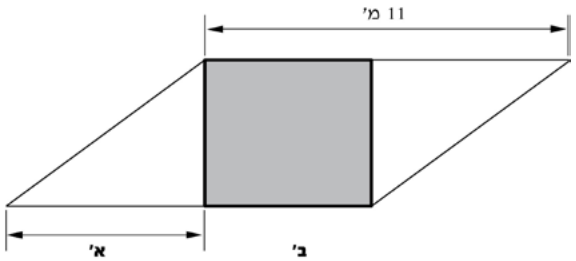
תלמידה ב': *"ניסיתי לדמיין את התיבה נפתחת וככה סרטטתי. היה לי קשה להחליט איפה לשים כל חלק בסרטוט".*

באיורים 11 ו־12 מתוארות השלמות של חלקים "עודפים" ומיקומם בסרטוט אינו נכון.

3.4. בעיה 4

(בעיה מס' 21 מתוך מבחן המיצ"ב תשע"ב):

איור 13:





הבעיה: לפניכם סרטוט מוקטן של מקבילית ובתוכה ריבוע. שטח הריבוע 25 מ"ר.
מה אורך הקטע המסומן באות א'?

פתרון הבעיה מְזַמֵּן פנייה להיוריסטיקה **פירוק והרכבה** ותמרון באמצעות **הליכה לאחור** (איור 13). בבעיה התלמיד מתבקש למצוא את קטע א' במקבילית הנתונה. ניתן לחלק את תהליך הפתרון לשני שלבים:

1. **שלב I:** למציאת אורך צלע ריבוע יש לבצע **פירוק** של השטח השווה ל־25 מ"ר ל־5 מ' × 5 מ'. **האתגר** בשלב זה הוא בפנייה להיוריסטיקה **הליכה לאחור**: 25 = __ × __. תלמיד שמבטא יכולת לפנות להיוריסטיקה הליכה לאחור ימצא שאורך קטע ב' שווה ל־5 מ'.
2. **שלב II:** בשלב זה יש לבצע **פירוק** נוסף של צלע המקבילית שאורכה הנתון 11 מ'. אחת מתכונותיה של מקבילית היא שכל שני זוגות של צלעות נגדיות שוות זו לזו, מכאן שסכום הקטעים א' ו־ב' הוא 11 מ' (איור 13). קטע ב' הוא צלע הריבוע ששווה 5 מ' (התקבל בשלב I). **האתגר** הוא בפנייה להיוריסטיקה **הליכה לאחור** במציאת ההפרש בין צלע המקבילית לקטע ב' המהווה חלק ממנה: 6 = 5 - 11.

כמחצית מהתלמידים (47% מהתלמידים) שגו בפתרון הבעיה. קבוצה זו מתחלקת לשתי רמות:

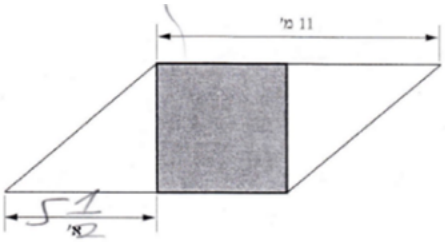
רמה א' - הרמה הנמוכה יותר, שאליה שויכו תלמידים ששגו בשלב הראשון בתהליך הפתרון.

רמה ב' - תלמידים ששגו בשלב השני בתהליך הפתרון.

רמה א' - כ־34% מהתלמידים ששויכו לרמה זו ביטאו קושי בפנייה להיוריסטיקה פירוק והרכבה. תלמידים אלה ביססו את פתרונם על מדידה עם סרגל, ניחוש או מראית עין. באיור 14 מתואר שהתלמיד חישב את אורך קטע א' כמחצית מצלע המקבילית אשר אורכה הנתון הוא 11 מ'. התייחסותו של התלמיד למחצית מהצלע התבססה על ויזואליות ולא על חישוב אריתמטי המתבקש מתהליך פתרון הבעיה.

איור 14:

פתרון הבעיה של תלמיד ברמה א'



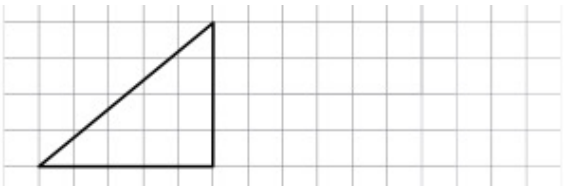
עדויות נוספות בקטעי ראיונות עם שלושה תלמידים: **תלמיד (א')** - *"ניחשתי"*; **תלמיד (ב')** - *"עשיתי לפי העין"*; **תלמיד (ג')** - *"נראה לי שזה חצי מה-11 אז כתבתי 5.5 מטר"* (איור 14).

רמה ב' - כ־13% מהתלמידים ששויכו לרמה זו ביטאו יכולת לבצע פירוק של שטח הריבוע ומציאת אורך צלעו (שלב I בתהליך הפתרון). עם זאת, תלמידים אלה ביטאו קושי בפירוק צלע המקבילית בשילוב הליכה לאחור (שלב II בתהליך הפתרון). תהליך פתרונם היה חלקי, והם רשמו את צלע הריבוע כתשובה לבעיה.
עדות לכך בקטע ריאיון עם תלמיד: *"ראיתי ששטח הריבוע הוא 25, אז שאלתי את עצמי, מה כפול מה שווה 25, כדי לדעת מה הצלעות של הריבוע. זה חמש. אז כתבתי שזה חמש"*.
תלמידים ברמה זו ביטאו מיומנות חלקית בשימוש בהיוריסטיקה פירוק והרכבה. הם התעלמו מנתון צלע המקבילית (11 מ') כנתון הכרחי לפתרון הבעיה, והסתפקו בפירוק שטח הריבוע בלבד. הם לא פירקו את צלע המקבילית בשילוב עם הליכה לאחור (11 = __ + 5).

3.5. בעיה 5

(בעיה מס' 25 מתוך מבחן המיצ"ב תשע"ב)

איור 15:





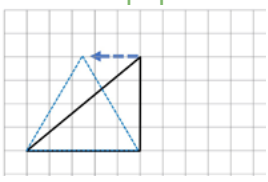
הבעיה: סרטטו משולש חד־זוויות ששטחו שווה לשטח המשולש שבסרטוט.

פתרון הבעיה מְזַמֵּן פנייה להיוריסטיקה **פירוק והרכבה:** בפתרון הבעיה מתאים לבצע **פירוק** של המשולש הנתון לגובה ובסיס, ומשני מרכיבים אלו **להרכיב** משולש אחר: חד־זוויות (איור 15). **האתגר** בבעיה הוא בבחינת יכולת ההבנה הקונספטואלית של התלמידים את המושג "שטח משולש". לָרוב התלמידים רגילים לחשב שטחי משולשים שונים בהינתן גובה ובסיס. בבעיה זו נדרשים התלמידים לסרטט על רשת משבצות משולש אחר תוך כדי שימוש בגובה ובבסיס הידועים על פי המשולש הנתון.

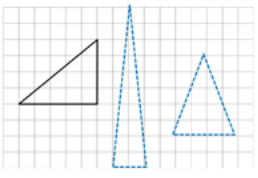
בפתרון בעיה זו תיתכנה שתי דרכים:

1. דרך פתרון אלגנטית שעל פיה התלמיד "מזיז"/"מחליק" ויזואלית את גובה המשולש הנתון לכיוון שמאל עד ארבע משבצות, ומחבר את קצה הגובה לשני קצוות הבסיס, כך שיתקבל משולש חד־זוויות (איור 15א'). דרך זו מעידה על הבנה קונספטואלית של הקשר בין שטח המשולש לגובה ולבסיס ולהבנה קונספטואלית של המושג גובה ותכונות של מַקְבִּילוּת (איור 15א'). דרך זו **לא נקט שום תלמיד**.
2. דרך פתרון שנייה היא באמצעות חישוב והיא כוללת שלושה שלבים: פירוק שטח המשולש לגובה ובסיס; חישוב שטח המשולש הנתון; הרכבה של משולש חד־זוויות תוך כדי שימוש בהליכה לאחור. דרך זו מורכבת יותר כיוון שהיא מחייבת מספר שלבים, ובשילוב היוריסטיקה הליכה לאחור, מרכיב קוגניטיבי מורכב יותר מאשר חשיבה קדימה (איור 15ב').

איור 15א':
דרך פתרון אחת - "הזזת" קדקוד המשולש



איור 15ב':
סרטוט משולשים שווי שטח על פי חישוב

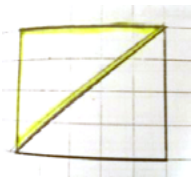


כ־57% מהתלמידים שגו בפתרון הבעיה. הם חולקו לשתי קבוצות על פי מאפייני הקשיים שנחשפו:

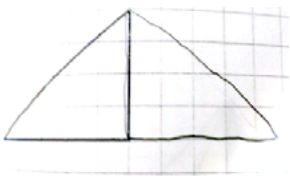
רמה א' - כ־40% מהתלמידים ביטאו קושי בשימוש בהיוריסטיקה פירוק והרכבה. תלמידים אלו ביטאו קושי לפרק את שטח המשולש לשני מרכיבים: גובה ובסיס. נוסף לכך ביטאו קושי במשאבי ידע מאחר שלא ידעו כיצד לחשב את שטח המשולש הנתון. ברמה זו אופיינו 40% מהתלמידים ששגו.

באיורים 16 ו־17 מוצגות דוגמאות לפתרונות שגויים של תלמידים המאופיינים ברמה א'. התלמידים "שכפלו" את המשולש הנתון במנח אחר (סימטריה שקופית), ולא ענו על דרישות הבעיה.

איור 16:



איור 17:



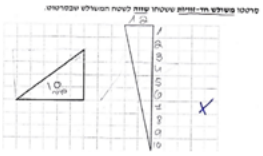
עדות נוספת בקטע ריאיון עם תלמיד: *"ניסיתי לספור משבצות שבתוך המשולש, אבל אז היו לי משבצות חלקיות, לא שלמות, ולא ידעתי מה לעשות איתן".*

עדויות אלה מבטאות הבנה קונספטואלית לקויה של המושג שטח משולש ומשמעות מרכיביו (גובה ובסיס), מיומנות חסרה בפירוק שטח משולש לרכיביו (גובה וצלע) והרכבת משולש בעל מאפיינים שונים (חד־זוויות) באמצעות רכיבים אלה.

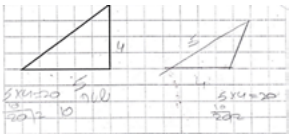
רמה ב' - לרמה זו שויכו כ־17% מהתלמידים ששגו. תלמידים אלה ביטאו יכולת לבצע פירוק של המשולש הנתון לשני המרכיבים: גובה ובסיס, אך ביטאו קושי בתהליך ההרכבה - סרטוט משולש חד־זוויות. בהרכבת משולש בעל תכונות אחרות מהמשולש הנתון קיים מוטיב של הליכה לאחור: משטח משולש אחד לסרטט משולש אחר, ובתוך כך שימוש במרכיביו (גובה ובסיס). למרות שתלמידים ברמה זו ביטאו שליטה מלאה בידע פרוצדורלי בחישוב שטח משולש, ידע זה לא סייע בידם בפתרון הבעיה. הקושי של תלמידים אלה נבע מהבנה קונספטואלית חלקית של המושג שטח משולש. באיורים 18 ו־19 דוגמאות לפתרונות שגויים של תלמידים שאופיינו ברמה זו:



איור 18:



איור 19:



באיורים 18 ו־19 מוצגים משולשים ששטחם שווה לשטח המשולש הנתון כנדרש בבעיה. עם זאת, סוג המשולש אינו תואם את דרישות הבעיה.

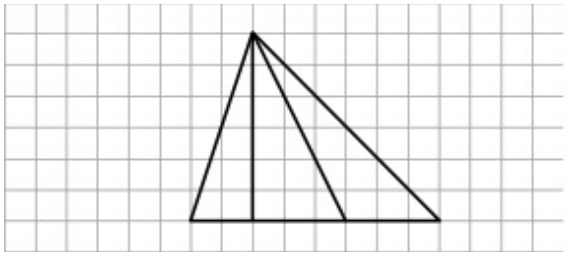
עדות לכך בקטע ריאיון עם תלמיד ג': *"חישבתי את שטח המשולש שבסרטוט, הנה פה... אבל לא הצלחתי לסרטט משולש חד זוויות ושווה שוקיים... אני לא יודע... לא הצלחתי... ישבתי על הבעיה הזאת הרבה זמן במבחן... זה היה לי קשה".*

ממצאים אלה מעידים על קשיי התלמידים במעבר מעיבוד אנליטי (נוסחת שטח משולש) לדימוי ויזואלי של משולש מתאים (כהן, 2007).

3.6. בעיה 6

(בעיה מס' 23 סעיף ב' במבחן המיצ"ב תשע"ב):

איור 20:



הבעיה: צִבעו בסרטוט משולש **ישר זווית ושווה שוקיים**.

בפתרון הבעיה (איור 20) נדרש פירוק המשולש לחמישה משולשים שונים: שלושה משולשים כמתואר באיור 22 (כמתבקש בסעיף א' של הבעיה) ושני משולשים נוספים המתקבלים מצירוף שני משולשים סמוכים (איורים 21 ו־22). **האתגר** בסעיף ב' של הבעיה הוא בזיהוי **הרכבה** של שני משולשים סמוכים למשולש אחר בתוך המבנה השלם (איור 21). הרכבה זו כרוכה בשימוש ב"מחיקת עזר" (שפיגל, 2018) - פעולה הפוכה מבניית עזר, שמשמעותה, התעלמות מקווים מיותרים בסרטוט.

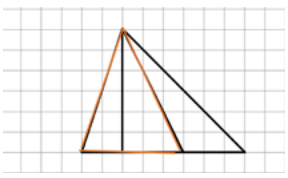
איור 21:

פירוק למשולש המורכב משני משולשים



איור 22:

פירוק למשולש המורכב משני משולשים



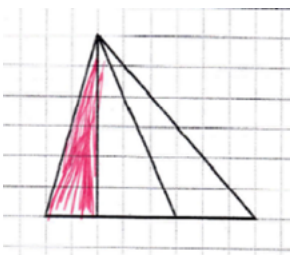
בפתרון סעיף ב' של הבעיה שגו כ־81% מהתלמידים. תלמידים אלה חולקו לשתי קבוצות על פי מאפייני הקושי:

רמה א' - תלמידים ברמה זו ביטאו יכולת לבצע פירוק לשלוש תת־צורות גנריות (שלושה משולשים המרכיבים את המשולש "הגדול"), אך קושי בפירוק למשולשים המורכבים משני משולשים. קושי זה מבטא יכולת מצומצמת בשימוש בהיוריסטיקה פירוק והרכבה (דוגמאות באיורים 23 ו־24) וקושי בהיבט המושגי והצורני המתייחס לתכונות משולש ישר זווית ותכונות משולש שווה שוקיים.

איור 23:



איור 24:



עדויות לקושי זה מוצגות בקטעי ראיונות עם שתי תלמידות:

תלמידה א': *"את השאלה הזאת היה לי קשה לפתור. ניסיתי כאילו כמו שיש משימות בחוברת, עם כמה משולשים, וניסיתי להסתכל על כל משולש בצורה בודדת ועל הרבה משולשים שהם מפורקים. ולא הצלחתי להגיע למשולש ישר זווית וגם שווה שוקיים. זה הזווית הישרה"* (מצביעה על המשולש האמצעי שהוא ישר זווית ואינו שווה שוקיים). מדברי התלמידה עולה הקושי בזיהוי



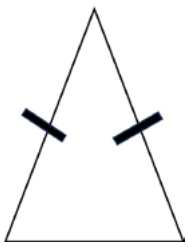
משולשים המורכבים מצירוף של שני משולשים.

תלמידה ב': "(הופכת את הדף) *מדדתי ככה, לא מדדתי ככה, מדדתי כאילו ככה (ולא הצלחתי למצוא. אז בסוף צבעתי את המשולש הזה (האמצעי), כי הוא ישר זווית ומדדתי את הצלעות שלו, ראיתי שהן כמעט אותו דבר*".

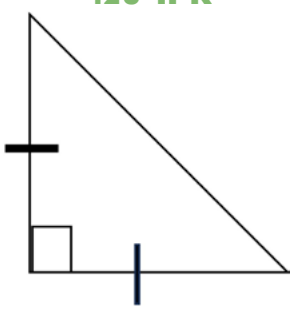
התלמידה מדדה עם סרגל את הניצב והיתר של המשולש האמצעי. מדידה עם סרגל חשפה קושי בזיהוי של משולש ישר זווית ושווה שוקים המתקבל מצירוף/הצמדת שני משולשים.

רמה ב' - תלמידים ברמה זו ביטאו יכולת לבצע פירוק לכל חמשת המשולשים האפשריים, אך ביטאו קושי בזיהוי משולש ישר זווית ושווה שוקיים מתוך חמשת המשולשים. קושי זה נבע מהמנח שבו הוא הוצג המשולש בסרטוט (איור 26). לרוב, תלמידים רגילים לראות משולש שווה שוקיים שהוא חד־זוויות במנח שבו בסיס המשולש אופקי לשולי הדף ושתי שוקיים שוות זו לזו (איור 25). בבעיה זו נדרשו התלמידים לזהות משולש שווה שוקיים וישר זווית, כך שאחד מניצביו הוא "בסיס" משולש שווה שוקיים המוצג במנח אופקי על רשת משבצות. קושי בזיהוי המשולש הרצוי כאשר הוא במנח אחר מהמנח שבו רגילים התלמידים לראותו נובע מסכמת "אב טיפוס" של משולש שווה שוקיים (קושי בהיבט המושגי).

איור 25:



איור 26:



חיפוש משולש שווה שוקיים וישר זווית כנדרש בבעיה, הצריך מהתלמידים יכולת ויזואלית בשילוב גמישות מחשבתית בהרכבת שני משולשים "קטנים" למשולש אחר שיענה על דרישות הבעיה נוסף ליכולת לזהות את המשולש על פי תכונות רלוונטיות.

4. סיכום ודיון

מיומנות פתרון בעיות היא אחת מתוך המיומנויות הבסיסיות שעל התלמיד לרכוש במאה ה־21. מחקרים שנערכו במשך השנים הראו כי ניתן לשפר את יכולתם של תלמידים בפתרון בעיות מתמטיות על ידי תרגול והוראה מתאימה של היוריסטיקות (למשל: עובדיה, 2017; Koichu, 2003; Koichu, Berman & Moore, 2004; Schoenfeld, 1985, 1992). מנגד, מחקרים אשר בחנו את מידת הפנייה ומיומנות השימוש בהיוריסטיקות שונות מבלי שנלמדו באופן ישיר, העידו על קשיים במיומנות קוגניטיבית זו (וולפוביץ, 2004; לחמי, 2009; שחם, 2006; שפיגל, 2006, 2018; Ginat & Wolfson, 2002). במחקר זה מוצגות שש בעיות גאומטריות המאופיינות בהיותן מזמנות פנייה ושימוש בהיוריסטיקה פירוק ו/או הרכבה, לעיתים בשילוב היוריסטיקה נוספת (בניית עזר, מחיקת עזר, הליכה לאחור). מממצאי המחקר עולה כי מידת ההבנה הקונספטואלית של מושג או תכונה גאומטרית קשורה, בין היתר, למיומנות בפתרון בעיות. ממצאי המחקר הצביעו על ארבעה קשיים מרכזיים בפתרון בעיות גאומטריות:

1. **קושי בפירוק צורה או מבנה לתת־צורות** - מרבית התלמידים אשר שגו בפתרון הבעיות ביטאו קושי בביצוע פירוק ויזואלי של צורות לתת־צורות כשתת־הצורות אינן משלימות לצורה מוכרת, ובהרכבה של תת־צורות לצורה אחרת. ניתן היה לראות קושי גדול יותר בפירוק לצורות שאינן מוכרות/אב טיפוס מאשר לצורות מוכרות או שהן אב טיפוס. יש לשער כי קושי זה נובע מחוסר גמישות מחשבתית (Flexibility) בחשיבה יצירתית, ביכולת ויזואלית מצומצמת לראות חלק משלם אם החלק מוצג במנח שאינו טיפוסי ובהבנה קונספטואלית של מושגים ותכונות צורות גאומטריות. ממצאים אלה מחזקים ומחדשים מחקרים קודמים (דבורה, 2003; לחמי, 2009; Duval, 1995, 1998), אשר אפיינו קשיים של תלמידים ביכולת ההבחנה



הוויזואלית שלהם לראות את "החלקים מול השלם". כמו כן קושי לתפוס צורות אם הסרטוט שלהן מוצג בדרכים שונות. מחקר זה מחדש בהיותו חושף ומבחין לראשונה בקושי בזיהוי תת־צורה (מבנה) המורכבת משתי צורות. קושי זה נובע בין היתר, מחשיבה יצירתית מצומצמת, המתבטאת בקושי בהתבוננות "גמישה" על סרטוט ובחוסר "שטף" בבחינת האפשרויות לפירוק ו/או הרכבה של צורות מבין תת־צורות הנמצאות בתוך צורה. נוסף לכך, חשיבה יצירתית מצומצמת התבטאה בקושי לבצע ויזואליזציה - לראות חלק מהשלם כאשר החלק מורכב משני חלקים אחרים, ומוצג במנח שאינו טיפוסי (כפי שהורגלו התלמידים לראות).

2. **קושי בשילוב עם היוריסטיקה הליכה לאחור** - ממצאי המחקר חשפו קושי במיומנות הליכה לאחור, ומרבית השוגים עצרו בשלב השני. ממצאים אלה מעידים על קושי בהבנה קונספטואלית בתכונות ובמושגים הגאומטריים שנחקרו (תכונות משולשים ומרובעים, תכונות תיבה וחישובי שטח של ריבוע ומשולש). הבנה קונספטואלית של מושג גאומטרי מתבטאת אצל התלמיד, בין היתר, ביכולת שלו לערוך חישובים קדימה ואחורה באופן מסודר. ממצא זה מחדש ומחדד מחקרים קודמים אשר שיקפו קשיים ביכולת יישום היסק לאחור באספקטים מסוימים, כגון: היפוך מחשבתי, היפוך פעולות אריתמטיות, היקש לאחור במספר צעדים (דבורה, 2003; שפיגל, 2006; Ginat & Wolfson, 2002).

1. **קושי בהבנה קונספטואלית של משאבים** - מרבית התלמידים ביטאו ידע בסיסי במשאבים שנדרשו. עם זאת, כמחצית מאלה ששגו חשפו קושי בהבנה קונספטואלית של משאבים (אלכסון, שטח משולש). נוסף לכך, ניכר כי ככל שנדרשו יותר משאבים (שתי תכונות לצורה נתונה לעומת תכונה אחת) או משאבים מורכבים יותר (חישוב שטח משולש הנתפס כמורכב יותר לעומת חישוב שטח ריבוע הנתפס כפשוט יותר) לפתרון בעיה, כך התלמידים ביטאו קשיים גדולים יותר ומיומנויות נמוכות יותר בתהליך הפתרון.

2. **בקרה** - תופעה נלווית שנחשפה במסגרת מחקר זה היא העדר שימוש בבקרה. בדומה למחקרים אחרים (וולפוביץ, 2004; לחמי, 2009; עובדיה, 2017; צדוק, 2014; שפיגל, 2006), גם במחקר זה רבות משגיאות התלמידים יכלו להימנע או להיחשף באמצעות הפעלה טובה של מרכיב הבקרה המוצג במודל הקוגניטיבי של שוינפלד (Schoenfeld, 1985, 1992). ממצאי המחקר חושפים קושי של תלמידים להשתמש בבקרה תחילית - התבוננות בבעיה טרם ניגשים לפתרונה וחוסר בבקרה בתהליך פתרון הבעיה ובסיומו. ממצא זה מחזק ומחדד את ממצאי מחקרה של צדוק (2014), שעל פיו תלמידים נוטים לפנות בצורה חפוזה לחישובים בעזרת משאבים ולאסטרטגיות פתרון המבוססות על המוכר גם במקרים שאין צורך בהם.

4.1. השלכות להוראה

ההיוריסטיקות הן אסטרטגיות פתרון מעניינות, מעשירות וחיוניות למגוון תחומי לימוד, ולצורך פתרון בעיות מחיי היום־יום. כמו כן, הן מורכבות ומעוררות קשיים. לפיכך, מומלץ להקדיש זמן להקנייתן באופן מפורש בתהליך ההוראה, לנתח את ייחודיותן, ללמד מתי וכיצד יש להשתמש בהן, ולדון במוקדי הקושי שביישומן. ממחקר זה עולה כי יותר משליש מהבעיות המופיעות בשאלון מיצ"ב הן בעיות שבהן מתאים לעשות שימוש בהיוריסטיקות. מכאן, שהוראת ההיוריסטיקות בבית ספר יסודי רלוונטית ועשויה להשפיע על מידת הצלחתם של תלמידים בפתרון בעיות בכלל ובשאלון מיצ"ב בפרט. להלן מספר המלצות:

- **הוראה מפורשת של אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות** - במסגרת ההוראה בכיתה תלמידים מציעים אסטרטגיות פתרון שונות לבעיה



נתונה. לרוב המורים מציגים את אסטרטגיות הפתרון השונות ללא שימוש במונחים המפורשים כגון: "פירוק ו/או הרכבה, בניית עזר, משלים". מכאן, שהתלמידים עשויים להניח שהאסטרטגיה שהוצגה רלוונטית ומתאימה רק לבעיה הספציפית שנידונה. שימוש בשפה היוריסטית לתיאור אסטרטגיות, כחלק מהשפה המתמטית בכיתה, יבסס הבנה אצל התלמידים שהאסטרטגיה המוצעת היא אסטרטגיה כללית הרלוונטית למגוון בעיות ונושאים, ולאו דווקא בהקשר לבעיה ספציפית.

- **התנסויות בפעילויות פירוק והרכבה של צורות גאומטריות** - שליטה בידע פרוצדורלי בהעדר הבנה קונספטואלית של מושגים ותכונות של מצולעים אינה מספיקה להתמודדות עם פתרון בעיות גאומטריות. חוקרים הצביעו על שימוש באמצעים מוחשיים (קונקרטיים או דיגיטליים) בלימודי גאומטרייה המאפשרים התנסות מעשית משמעותית עם מניפולציות קונקרטיות בתהליך הלמידה. אמצעים אלה סייעו לשיפור ביצועי התלמידים בפתרון הבעיות הגאומטריות (Cekmez & Guler, 2019; Shi et al, 2023; Trigo, 2024). מומלץ לזמן לתלמידים התנסויות (באמצעים מוחשיים ובאמצעים דיגיטליים) בפירוק מצולעים לתת־צורות, בבחינת התכונות של תת־צורות המתקבלות מפירוק ואפיונן, בהרכבה של מגוון מצולעים מתת־צורות, ואפיון הצורות שהתקבלו. התנסויות בהרכבה מורכבות לא פחות מהתנסויות בפירוק, ועל כן יש לשלב את שתיהן במסגרת ההוראה בכיתה. הוראה המשלבת התנסויות בפירוק והרכבה עשויה לפתח אצל התלמידים יכולת טובה יותר לבצע ויזואליזציה במצולעים וגופים, ולבסס הבנה קונספטואלית במושגים ותכונות של מצולעים וגופים בגאומטרייה.
- **חשיפה למצולעים במנחים שונים (שאינם טיפוסים)** - לרוב, מורים חושפים תלמידים למצולעים טיפוסים במנחים אופקיים לשולי הדף או הלוח. חשיפה חלקית זו מובילה לקושי לפתח אצל התלמידים את היכולת הוויזואלית לשפוט צורה על פי תכונותיה, ולא על פי מראית עין, על פי מדידה עם סרגל בהינתן סרטוט מוקטן או על רשת משבצות. הצגה זו מצריכה מהפותר להתמקד בתכונות המצולע, ובדרך זו עשויה לקדם אצלו הבנה קונספטואלית של תכונות ומושגים גאומטריים.
- **עידוד ביצוע בקרה** - ממצאי המחקר הצביעו על העדר שימוש בבקרה בקרב התלמידים. במסגרת הוראה-למידה של מתמטיקה מומלץ לעודד מרכיב זה כחלק בלתי נפרד מתהליך פתרון בעיות. שוינפלד (Schoenfeld, 1985, 1992) ממליץ לעשות זאת באמצעות עריכת דיונים כיתתיים, חשיפת יתרונות וחסרונות השימוש בהיוריסטיקות השונות ובחינת הפתרונות הנידונים במהלכם ובסופם. ממצאים אלו מחזקים את המסקנה כי במסגרת הוראה-למידה של מתמטיקה יש צורך לעודד מרכיב זה כחלק בלתי נפרד מתהליך פתרון הבעיות.
- **פיתוח דיונים מתמטיים בכיתה** - מומלץ לפתח בכיתה דיונים מתמטיים העוסקים בניתוח בעיה/סרטוט, בחינת אפשרויות פירוק שונות ואסטרטגיות פתרון שונות. שימוש במונחים היוריסטיים גם על ידי המורה וגם על ידי התלמידים באופן מפורש ובחינת יעילות הפתרונות שהוצעו עשויים לקדם בקרב תלמידים מיומנויות בפתרון בעיות.

שאלון מיצ"ב משמש כלי להערכת הישגי תלמידים במתמטיקה, וממצאיו מנותחים לפי ארבע רמות חשיבה: ידע וזיהוי; חשיבה אלגוריתמית; חשיבה תהליכים ותובנה; חיפוש פתוח. אם מורים מעוניינים לקדם פתרון בעיות בבתי ספר, כצעד ראשון מומלץ לנתח את פתרונות התלמידים על פי מודל פתרון בעיות. בדרך זו אפשר יהיה לאפיין ולנתח קשיי תלמידים בתחום זה באופן מעמיק ויסודי, ולשפר דרכי הוראה-למידה.



5. ביבליוגרפיה

- גירון, ת' (1999). *למידה שיתופית בקבוצה רב גילית והשפעתה על פיתוח תהליכי חקר ופתרון בעיות הכללה במקרה של מתמטיקה*. פרויקט מחקר כחלק מהדרישות לקבלת תואר M.A. בית הספר לחינוך, אוניברסיטת אלבמה, ברמינגהם.
- דבורה, ט' (2003). *הנחת הנחות בלתי מוצדקות בהסתמך על שרטוטים בגיאומטריה*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.). בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך (ראמ"ה), (2024). מבחנים וסקרים. נדלה מ־ https://rama.edu.gov.il/assessments
- וולפוביץ, מ' (2004). *להתחיל מהסוף: היסק לאחור בפתרון בעיות פחות שגרתיות במתמטיקה*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.), בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- כהן, נ' (2007). *שילוב אנליטי-וויזואלי בביצוע משימות במרחב*. מחקר לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת תואר דוקטור לפילוסופיה (Ph.D.), אוניברסיטת בן גוריון בנגב.
- לחמי, ר' (2009). *קשיים בשימוש בהיוריסטיקה פירוק והרכבה בפתרון בעיות גיאומטריות*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.). בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- עובדיה, ת' (2017). עקרונות התערבות בהוראת מתמטיקה בקרב תלמידות תיכון חלשות. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 6*, עמ' 53-65.
- צדוק, ט' (2014). *חיפזון וחישובים מיותרים בהעדר בקרה תחילית בפתרון בעיות במתמטיקה*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.) בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- רייזמן־דן, ש' (2023). *הוראה מונחית היוריסטיקות של הוכחות בגיאומטריה*. עבודת גמר לתואר דוקטור לפילוסופיה (Ph.D.), אוניברסיטת תל־אביב.
- שחם, ד' (2006). *הכללה פזיזה בחישוב איבר כללי של סדרה לינארית*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.). בית ספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- שפיגל, ה' (2006). *להתחיל מהסוף: אפיון הקשיים ומדרוג היכולת ביישום היוריסטיקת ההיסק לאחור בפתרון בעיות מתמטיות*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.), בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- שפיגל, ה' (2018). *פירוק והרכבה בפתרון בעיות בגאומטריה*. עבודת גמר לקראת התואר דוקטור לפילוסופיה (Ph.D.), אוניברסיטת תל־אביב.
- Anderson, J. R. (1985). *Cognitive Psychology and Its Implications. New York: W.H. Freeman & Co.*
- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representation in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52:* 215–241.
- Bishop, A. (1986). What are some Obstacles to learning Geometry? In R. Morris (Ed.), *Studies in Mathematics Education 5: The Teaching of Geometry (pp. 141-159). UNESCO: Paris.*
- Cekmez, E., & Guler, M. (2019). One problem, multiple solution: The contribution of DGS to heuristics in the problem-solving process. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* 38(3), 231-247.
- Chappell, M. F., & Thompson, D. R. (1999). Take Time for Action: Perimeter or Area? Which Measure Is It?. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(1), 20-23.
- Chinnappan, M. (1998). Schemas and Mental Models in Geometry Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 201-217.
- Chung, K. K. H., & Tam, Y. H. (2005). Effects of cognitive-based instruction on mathematical problem solving by learners



- Ginat, D., & Wolfson, M. (2002). On limited views of the mean as point of balance. *Paper presented at the 26th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Norwich, UK: University of East Anglia.
- Gole, A. M. (2003). Sherlock Holmes, Geometry Proofs, and Backward Reasoning. *The Mathematics Teacher*, 96(8), 544-546.
- Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In *Proceedings of the seventh international conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 223-228).
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than a proof. *The Mathematics Teacher*, 74(1), 11-18.
- Hoffer, A. (1983). Van Hiele based research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 205-227). New York: Academic Press.
- Huang, H. M. E. (2017). Curriculum interventions for area measurement instruction to enhance children's conceptual understanding. International *Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1323-1341.
- Koichu, B. (2003). *Junior high school students' heuristic behaviors in mathematical problem solving* (Doctoral dissertation). Haifa: Technion.

with mild intellectual disabilities. *Journal of Intellectual and Developmental Disability, 30*(4), 207-216.

- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HM Stationery Office.
- Common Core State Standards Initiative - CCSSI. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM). Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices.
- Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2010). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. In *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 696-705).
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: kinds of representation and specific processing. In S. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villiani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer.
- Duval, R. (1999). Presentations, Vision, and Visualization: Cognitive Functioning in Mathematical Thinking. *Proceedings of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.



- Shi, L., Dong, L., Zhao, W., & Tan, D. (2023). Improving middle school students' geometry problem solving ability through hands-on experience: An fNIRS study. *Frontiers in Psychology, 14*, 1126047.
- Tan Sisman, G., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*, 1293-1319.
- The National Academic of Sciences Engineering Medicine. (2015). Retrieved from BOOKS database: https://www.nap.edu/catalog/13398/education-for-life-and-work-developing-transferable-knowledge-and-skills
- Trigo, M. S. (2024). Problem solving in mathematics education: Tracing its founding and current research-practice trends. *ZDM-Mathematics Education, 56*, 211-222.
- Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2004). Promotion of heuristic literacy in regular mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 163-180.
- Krawec, J. L. (2014). Problem representation and mathematical problem solving of students of varying math ability. *Journal of Learning Disabilities, 47*(2), 103-115.
- Machaba, F. M. (2016). The concepts of area and perimeter: Insights and misconceptions of Grade 10 learners. *Pythagoras*, 37(1), 1-11.
- Martinez, M. (1998). What is problem solving? *Phi Delta Kappan, 79*(8), 606-609.
- National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action*. Reston, Virginia: NCTM.
- Paraskevi, M.C & Gagatsis, A. (2013). Geometrical figures in geometrical task solving: an obstacle or Heuristic tool? *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, Issue 13, 17-32.
- Polya, G. (1945, 1957). *How to Solve It. Princeton*, NJ: University Press.
- Rivella, F., Siegler, R. S., McKenney, L., & Gold, S. (2021). Learning a new geometric concept: The role of working memory and of domain-specific abilities. *British Journal of Educational Psychology, 91*, 1537-1554.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving. Orlando*, FL: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 179-214.

