מספר חלק 2000

גיליון 35



כתב עת להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי | **אוקטובר 2024**

ראש מל"מ אוניברסיטת חיפה: פרופ' רוזה לייקין

ניהול מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי: פרופ' ראיסה גוברמן וד"ר אתי נוי

חברי המערכת (בסדר א-ב):

ד"ר ג'וני אוברמן ■ ד"ר שי אולשר ■ ד"ר מיכל איילון ■ ד"ר בת-שבע אילני ■ פרופ' מריטה ברבש ■ פרופ' אביקם גזית ■ פרופ' שרה הרשקוביץ ■ פרופ' מיכל טבח ■ ד"ר חנה לב-זמיר ■ ד"ר אתי נוי ■ ד"ר דורית נריה ■ ד"ר מיכל סוקניק ■ פרופ' איליה סיניצקי ■ ד"ר אבתיסאם עבד אלחאלק ■ ד"ר אלכס פרידלנדר ■ פרופ' פסיה צמיר ■ ד"ר ענת קלמר-שורץ

עורכת כתב העת: פרופ' ראיסה גוברמן

עורכת משנה: תמי ניר בוכבינדר

עריכת הלשון: מרים מילשטיין

ייעוץ מתמטי: מיכאל שימנוביץ'

עיצוב, עימוד ועריכה גרפית: רוית מדמוני

תמונות ואיורים: shutterstock

כתובת המערכת:

מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי ■ הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה ■ שד' אבא חושי 199, הר הכרמל חיפה, ת"ד 3338, מיקוד 3103301 ■ טל: 04-8240646 ■ פקס: 04-8288073 ■ email: mathcntr@edu.haifa.ac.il

ISSN (online): 2618-009X ■ ISSN (print): 2618-0081

מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי

المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلة الابتدائية

מספר חזק

2000

גיליון מספר 35

אוקטובר 2024

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית -
אגף א' מדעים
הפיקוח על
הוראת המתמטיקה

אוניברסיטת חיפה
UNIVERSITY OF HAIFA
جامعة حيفا
הפקולטה לחינוך

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז המורים מופעל על ידי אוניברסיטת חיפה עבור משרד החינוך במסגרת מכרז מס' 22/11.2020
הקמה והפעלה של מרכזי מורים ארציים במקצועות הבאים: מדעים, טכנולוגיה ומתמטיקה

דבר המערכת

קוֹרְאוֹת יְקָרוֹת שָׁלוֹם,

עם פתיחת שנת הלימודים החדשה, אנו שמחות לפתוח בפניכם את הגיליון מספר 35 של כתב העת "מספר חזק 2000". השנה החולפת הייתה שנה עם אתגרים רבים והותירה משקע עמוק בלב כולנו. למרות הקשיים, אתם המורים, הראיתם מסירות יוצאת דופן והמשכתם לשמש עוגן לתלמידיכם ולהעניק להם תמיכה.

המתמטיקה ככלי המפתח חשיבה ויכולת פתרון בעיות, היא יותר מתמיד רלוונטית לעולמנו המשתנה. היא מציעה לתלמידים כלים להתמודד עם אתגרים, לטפח חשיבה ביקורתית ויצירתיות, ולגלות את היופי הטמון בהבנת העולם הסובב אותם.

בגיליון זה תמצאו מגוון רחב של מאמרים העוסקים בנושאים שונים הקשורים בהוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי: החל בפעילויות חדשניות בכיתה, דרך גישות מתקדמות להוראת נושאים מרכזיים, וכלה בעצות מעשיות להתמודדות עם קשיים של תלמידינו.

במדור "**על המספר...**" מתפרסמת הכתבה "המספר 35" שבה תוכלו לקרוא על התכונות המתמטיות של המספר הזה. נוסף לכך מוצעות פעילויות אחדות הקשורות במספר 35 המתאימות לתלמידים בבית הספר היסודי, וביניהן התייחסות למספרים צורניים (Figurate Numbers) והקשר שלהם למשולש פסקל.

במדור "**מחקר יישומי**" מתפרסמים שלושה מחקרים. הראשון "**הידע הנדרש למורי המתמטיקה המלמדים ארבע פעולות חשבון במספרים טבעיים בכיתות א'-ב'**" מאת איריס שרייבר, לובה ויסוצ'אנסקי ורותי ברקאי. כידוע, "ארבע פעולות חשבון על מספרים טבעיים" הוא אחד הנושאים המרכזיים בתוכנית הלימודים של כיתות א'-ב'. החוקרות שואלות: מהו בעצם הידע הנדרש למורות ולמורים למתמטיקה כדי ללמד נושא זה, והאם הידע הזה הוא נחלתם של מורות ומורים שהשתתפו במחקר? אחת המסקנות המרכזיות של המחקר היא שיש לשים דגש מיוחד על ידע תוכן מתמטי בקרב מורים ועל הקשר שבין הידע הזה לבין דרכי הוראתו לתלמידים.

מחקר נוסף שמוצג בגיליון הוא מחקרה של עדי עראקי "**האם הייצוג משנה? חקר הכללת דפוסים מתמטיים בקרב תלמידי כיתות ה'-ו'**". החוקרת בדקה באיזה ייצוג לתלמידים קל יותר לנסח הכללות ומהן הסיבות לכך. הייצוגים שנבדקו במחקר הם ייצוג מספרי וייצוג חזותי־ציורי של סדרות חשבוניות. ניתוח הנתונים התבצע באמצעות מסגרת תיאורטית של לואיס רדפורד, ומטרתו להראות שלבים בהתפתחות החשיבה הקדם־אלגברית בקרב תלמידים בבית הספר היסודי.

המחקר השלישי הוא של ברוריה צוברי־פורת "**פירוק והרכבה בפתרון בעיות גיאומטריות במבחני מיצ"ב במתמטיקה**" ועניינו פתרון בעיות גיאומטריות באמצעות היוריסטיקות שונות. ממצאי המחקר מאפשרים לאפיין ולנתח את הקשיים של התלמידים בצורה מעמיקה ולשפר דרכי הוראה-למידה.

במדור "**משחקים מתמטיים**" מתפרסם מאמרה של סבינה סגרה "**קוביית סומה**". קוביית סומה היא פאזל תלת־ממדי שבאמצעותו ניתן לפתח ראייה מרחבית ויכולת התמצאות במרחב, וכך להשפיע על התפתחות החשיבה המתמטית. מחברת המאמר מציעה מספר חידות בתוך המאמר עצמו, ומספר רב של חידות המוצגות באמצעות יישומון GeoGebra אשר ניתן להתאים לאוכלוסיות שונות של תלמידים.

במדור "**דיווחים מהשטח**" מובאת כתבה מעניינת על יחידת ההוראה "**דובי הקוטב הצפוני באים לבקר בשיעורי המתמטיקה**" שמשלבת מתמטיקה וקיימות. אושרת אוחיון פותחת לנו את דלת כיתתה, ומראה כיצד ניתן לשלב בין שני הנושאים באמצעות למידה שיתופית, שילוב כלים טכנולוגיים ויצירתיות רבה גם של התלמידים וגם של המורה.

לסיום, ברצוננו להזכיר שכתב העת "מספר חזק 2000" הוא כתב עת שפיט החל מינואר 2017, היוצא לאור אחת לשנה. נשמח שתשלחו אלינו מאמרים, פעילויות מיוחדות שהפעלתם בכיתותיכם, משחקים חדשים שפיתחתם ועוד לפי בחירתכם, לשיתוף מורי המתמטיקה וכל העוסקים בחינוך המתמטי.

אנו מאחלות לכם קריאה מהנה, העשרת הידע והרחבת ארגז הכלים הפדגוגי. המשיכו להצטיין בעבודתכם החשובה, לשמש השראה לתלמידיכם וליצור חוויות למידה מעשירות ומצמיחות.

בברכה,
פרופ' ראיסה גוברמן - עורכת כתב העת
ד"ר אתי נוי - מנהלת מרכז מורים

תגובותיכם לכתב העת חשובות לנו מאוד.
נא מלאו את **טופס המשוב**.



המספר 35

אחד הדברים החשובים בהוראת המתמטיקה הוא לעורר את סקרנותם של התלמידים. אחת הדרכים לעשות זאת היא להרכיב את "סיפור המספר". הרי לכל מספר אפשר למצוא תכונות מתמטיות מעניינות, לזהות אותו ביצירות אומנות, ללמוד על חשיבותו במדע ועוד. בכתבה "המספר 35" מוצגות פעילויות המאפשרות לגלות את סיפורו המתמטי של המספר.

הידע הנדרש למורי המתמטיקה המלמדים ארבע פעולות חשבון במספרים טבעיים בכיתות א'-ב'

במאמר מודגש הצורך בידע תוכני וידע פדגוגי־תוכני להוראת ארבע פעולות החשבון במספרים טבעיים. אחת המסקנות המרכזיות של המחקר היא החשיבות להכיר את הטעויות האופייניות של התלמידים, ולדעת כיצד לתקן אותן בצורה אפקטיבית. נוסף לכך, במאמר מוצע להשתמש בהמחשות, ייצוגים מתמטיים ומשחקים כדי לשפר את הבנת התלמידים. השימוש בייצוגים ויזואליים, כמו לבני עשר ולוח מאה, יכול לעזור להדגיש פיתוח של הבנה עמוקה יותר בקרב התלמידים.

האם הייצוג משנה? חקר הכללת דפוסים מתמטיים בקרב תלמידי כיתות ה'-ו'

מהמאמר ניתן לחלץ מספר תובנות חשובות למורים למתמטיקה: חשוב לחשוף תלמידים לסוגים שונים של סדרות ודפוסים, הן מספריים והן חזותיים־ציוריים. חשיפה מגיל צעיר עוזרת לתלמידים לפתח את יכולת הזיהוי וההכללה של הדפוסים. תלמידים מתמודדים בדרך כלל טוב יותר עם ייצוגים מספריים מאשר עם ייצוגים חזותיים־ציוריים. לכן, כדאי לספק יותר הדרכה ותמיכה כשעובדים עם ייצוגים חזותיים. דבר נוסף חשוב הוא התפתחות החשיבה האלגברית שהיא תהליך הדרגתי. כדאי להתחיל מדפוסים פשוטים ומוכרים לתלמידים לפני המעבר לדפוסים מורכבים יותר.

פירוק והרכבה בפתרון בעיות גיאומטריות במבחני מיצ"ב במתמטיקה

המאמר עוסק באתגרים וקשיים שהתלמידים בכיתה ה' נתקלים בהם במבחני מיצ"ב, ובמיוחד בהבנה ובשימוש בהיוריסטיקות כמו פירוק והרכבה והליכה לאחור. במאמר מודגשים הקשיים של תלמידים בפתרון בעיות. זיהוי קשיים אלו יכול לסייע למורה לפתח דרכי הוראה המותאמות לצורכי התלמידים. במאמר מוצעים כלים ודרכים לשימוש בהיוריסטיקות כמו פירוק והרכבה והליכה לאחור. שימוש בהיוריסטיקות הללו עשוי לאפשר למורים לעזור לתלמידים לעסוק בבעיות גיאומטריות בצורה שיטתית ויעילה יותר.

קוביית סומה

המאמר מתאר את קוביית סומה ככלי חינוכי לפיתוח חשיבה מתמטית ויכולת מרחבית אצל תלמידים, במיוחד בתחומי הגיאומטריה. פאזלים כמו קוביית סומה עוזרים לפתח מיומנויות קריטיות למשל זיהוי ועיבוד מידע מרחבי, חשיבה גיאומטרית, סבלנות וריכוז. השימוש בפאזלים אלו מעודד חשיבה יצירתית ומפתח מיומנויות בפתרון בעיות. כמו כן, הצלחת התלמידים בהרכבת הפאזלים עשויה להגביר את תחושת ההישג והביטחון העצמי שלהם.

דובי הקוטב הצפוני באים לבקר בשיעורי המתמטיקה

הכתבה מדגימה את החשיבות של הלמידה הבין־תחומית המשלבת תחומי דעת (מתמטיקה, קיימות, אומנות) ביחידת הוראה אחת. הכותבת מציגה פעילות שמאפשרת לתלמידים ברמות שונות להשתתף תוך יצירת חוויה לימודית משמעותית.

תוכן עניינים

על המספר:

המספר 35 8
אתי נוי וראיסה גוברמן

מחקר יישומי:

הידע הנדרש למורי מתמטיקה המלמדים ארבע פעולות חשבון במספרים טבעיים בכיתות א'-ב' 14
איריס שרייבר, לובה ויסוצ'אנסקי ורותי ברקאי

האם הייצוג משנה? חקר הכללת דפוסים מתמטיים בקרב תלמידי כיתות ה'-ו' 26
עדי עראקי

פירוק והרכבה בפתרון בעיות גיאומטריות במבחני מיצ"ב במתמטיקה 34
ברוריה צוברי-פורת

משחקים מתמטיים:

קוביית סומה 54
סבינה סגרה

דיווחים מהשטח:

דובי הקוטב הצפוני באים לבקר בשיעורי המתמטיקה 60
אושרת אוחיון



על המספר

המספר 35

ד"ר אתי נוי

מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי,
אוניברסיטת חיפה
המכללה האקדמית אורנים

פרופ' ראיסה גוברמן

מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי,
אוניברסיטת חיפה
המכללה האקדמית אחוה

המספר 35

אתי נוי וראיסה גוברמן

בחרנו להציג בפניכם עובדות מעניינות על המספר 35 (מספרו של הגיליון הנוכחי) ולשתף אתכם בתכונותיו המגוונות מבחינה מתמטית. כמו כן נציג דוגמאות לפעילויות הקשורות למספר 35.

תכונות מתמטיות[1]

- **35 הוא המספר הטבעי העוקב ל־34 וקודם ל־36.**

המספר 35 על ישר המספרים:



- סכום ספרות המספר הוא 8, מכפלת ספרותיו שווה ל־15.
- 35 הוא מספר מיוחד. אם מחברים לספרת היחידות פעמיים את מכפלת הספרות 3 ו־5, מתקבל המספר 35:

$$35 = 5 + 2 \times 3 \times 5$$

מכפלת הספרות — ספרת היחידות

תכונות התחלקות

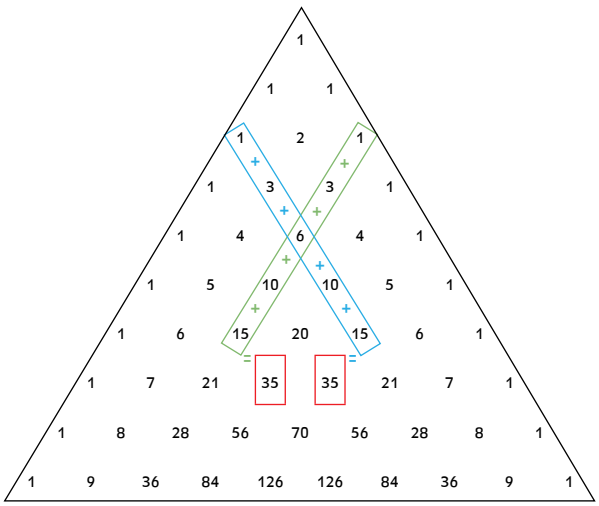
- 35 הוא **מספר פריק**, כלומר אפשר להציגו כמכפלה של שני מספרים טבעיים הגדולים מ־1.
- 35 מתחלק במספרים הבאים: 1, 5, 7, 35.

המספר 35 ומשולש פסקל

במשולש פסקל ניתן לקבל את המספר 35 בדרכים שונות. אחת מהן לדוגמה היא כאשר סוכמים את המספרים לאורך האלכסונים (ראו איורים 1 ו־2).

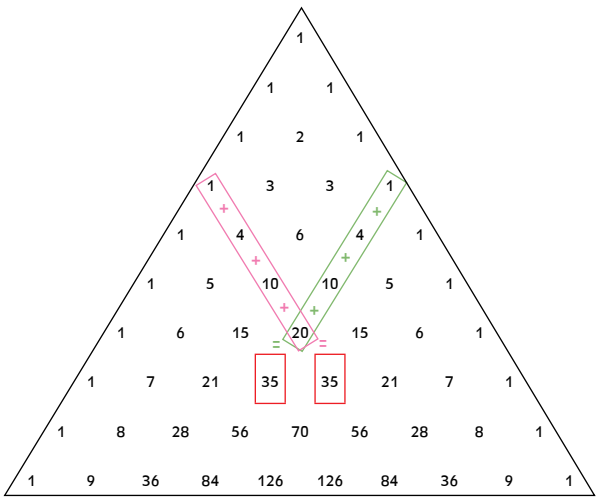
איור 1:

לקבלת המספר 35: 1+3+6+10+15=35



איור 2:

דרך נוספת לקבלת המספר 35: 1+4+10+20=35

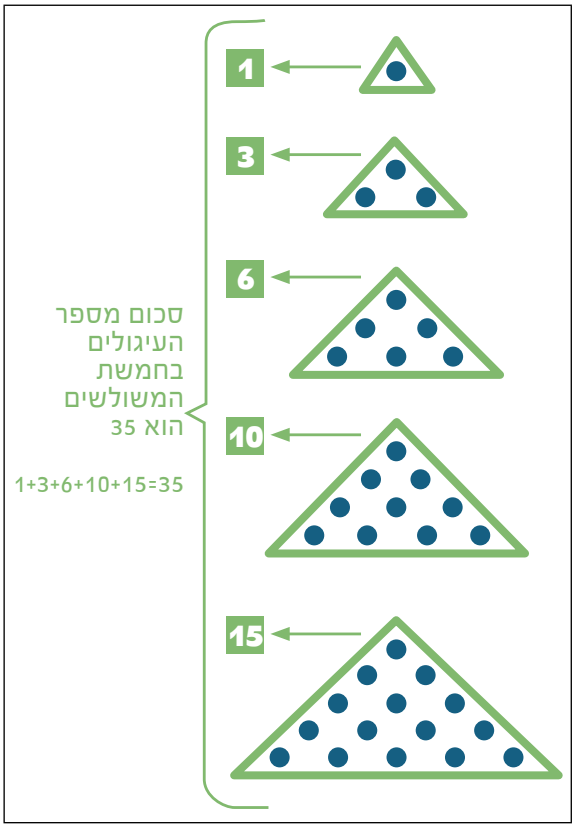


1. חלק מהתכונות לקוחות מכאן.

מספר צורני (פיגורטיבי)

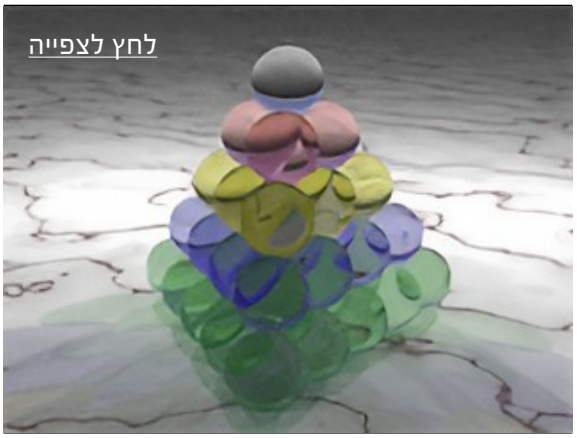
מספרים צורניים (בלעז פיגורטיביים) הם מספרים שניתן להציגם באמצעות צורות גאומטריות.
המספרים שניתן להציגם בצורת משולש נקראים "מספרים משולשיים" והראשונים בסדרה זו הם 1, 3, 6, 10, 15, 21. ישנם אינסוף מספרים משולשיים. אפשר לקרוא עליהם כאן.
לקבלת המספר 35 ניתן גם להסתכל על המספרים המשולשיים באופן הבא:

איור 3:



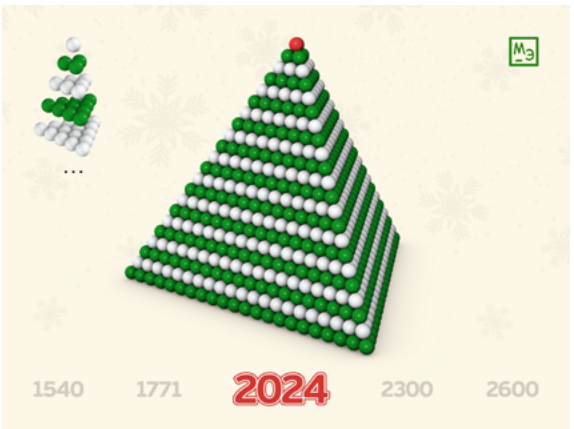
ניתן להציג את המספר 35 באמצעות פירמידה משולשת - ארבעון (לקוח מכאן). הצגת המספר 35 כמספר פירמידלי (פירמידה משולשת) בנויה מחמישה מספרים משולשיים (ראו הסבר לעיל). מניחים את המשולשים האלה זה על גבי זה, כך שהמשולש הבנוי עם מספר הכדורים הגדול ביותר נמצא בתחתית, והמשולש עם כדור אחד נמצא למעלה:

איור 4:



אגב, גם המספר 2024 המציין את שנת 2024 לפי הלוח הלועזי, הוא מספר פירמידלי:

איור 5:



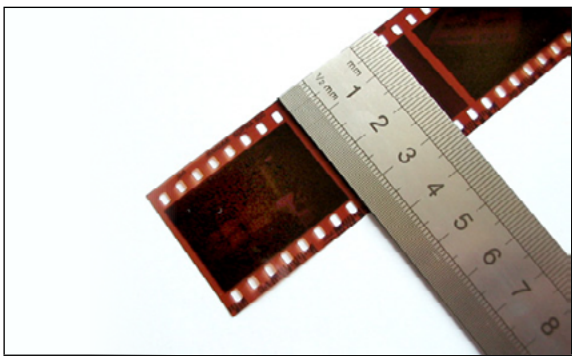
השנה העתידית שהמספר שלה יהיה פירמידלי תהיה בעוד 276 שנים (לקוח מכאן).

עובדה מעניינת הקשורה במספר 35

לפני עידן המצלמות הדיגיטליות השתמשו הצלמים בסרט צילום (פילם) שרוחבו היה 35 מ"מ.

איור 6:

לקוח מכאן



פילם ברוחב הזה שלט בעולם הצילום והקולנוע במשך המאה ה־20 עד להמצאתו של הצילום הדיגיטלי.

פעילויות:

1. לפניכם שישה ריבועים שווים.



צרו ככל האפשר מצולעים שונים המורכבים מששת הריבועים על ידי הצמדת צלעותיהם.

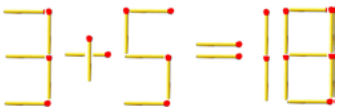
א. כמה מצולעים שונים קיבלתם?

ב. כמה מהמצולעים שהרכבתם הם פריסה של קובייה?

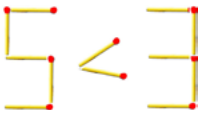
הערה: המשחק הוא הכללה של משחק הדומינו שמורכב משני ריבועים המחוברים זה לזה. הרכבה כמו זו של שישה ריבועים יחד היא משחק מתמטי מפורסם הנקרא הקסמינו.

2. משחקי היגיון עם גפרורים

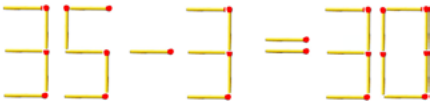
א. הזיזו 2 גפרורים לקבלת שוויון:



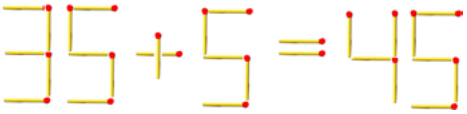
ב. הוסיפו גפרור אחד לקבלת אי־השוויון הנכון:



ג. הוסיפו 2 גפרורים לקבלת משוואה נכונה:



ד. הוסיפו 2 גפרורים לקבלת משוואה נכונה:



3. סימן התחלקות

כולנו מכירים את סימני ההתחלקות למספרים 2, 5, 10, 3, 6 ו־9.

האם תוכלו למצוא סימן התחלקות למספר 35?

4. מספרים ואחוזים

35 הוא 7% מהמספר שבחרתי. איזה מספר בחרתי?

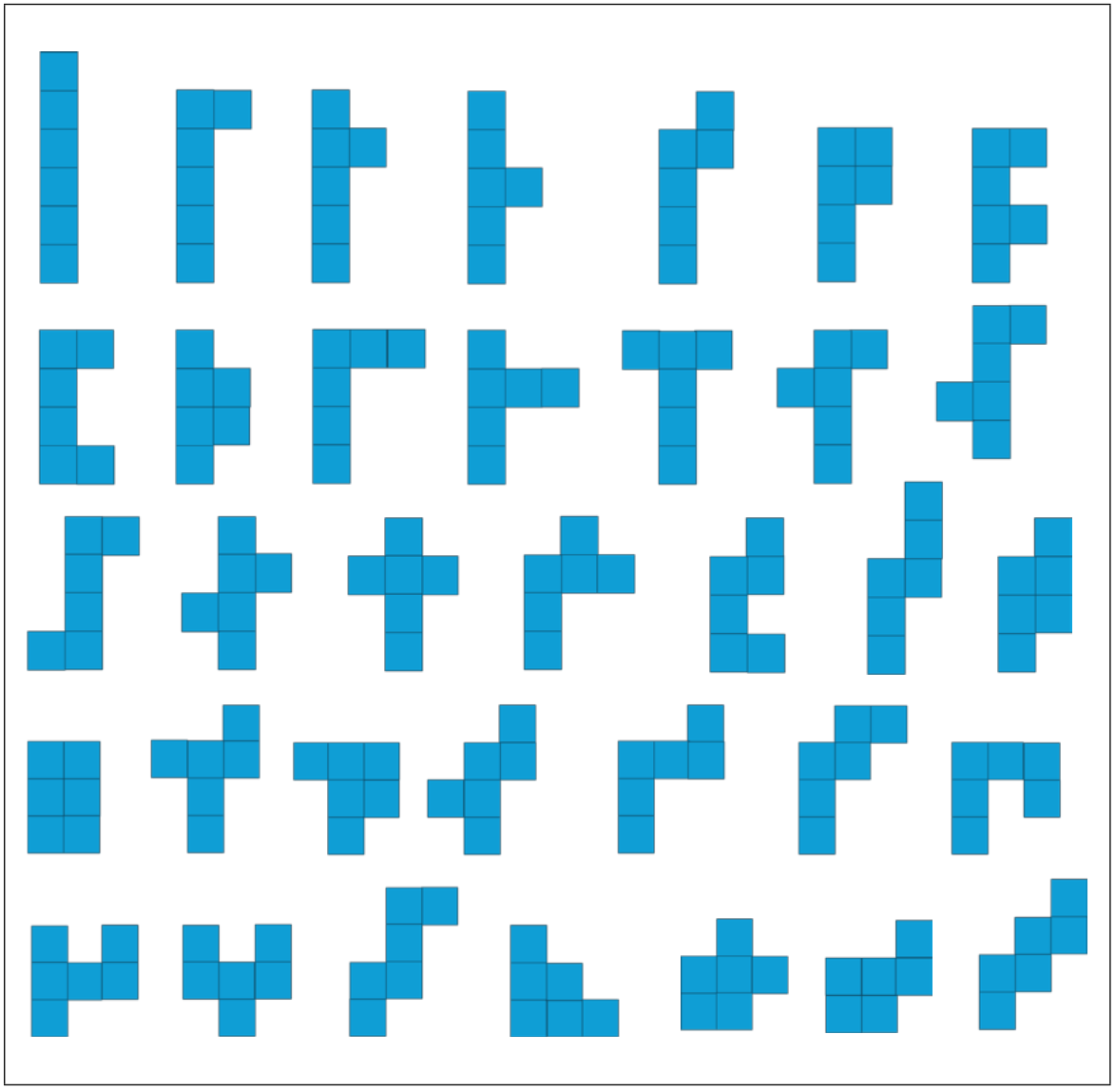
תשובות לפעילויות:

1. ניתן ליצור 35 מצולעים שונים מתוכם יש 11 מצולעים שהם פריסות של קובייה.

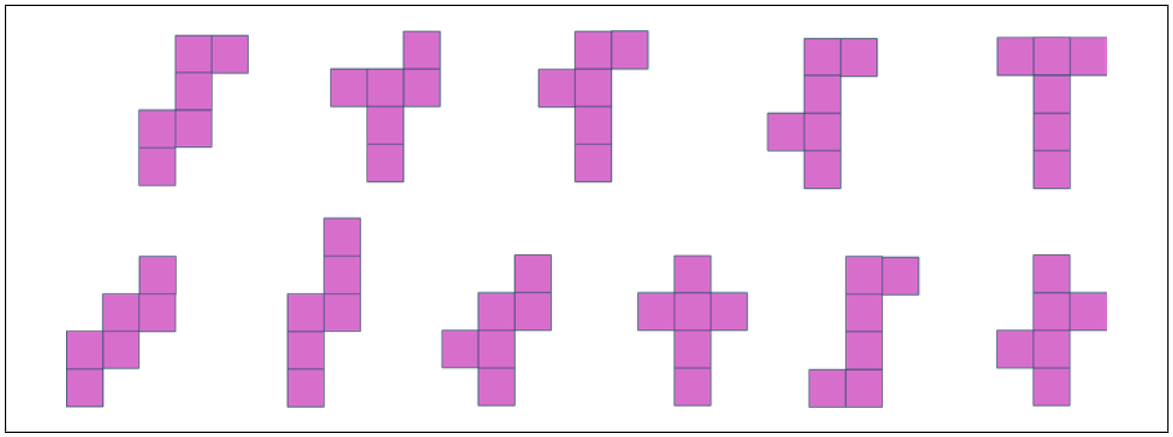
אפשר להציע לתלמידים להשתמש ביישומון הנמצא כאן.

להלן הפתרונות:

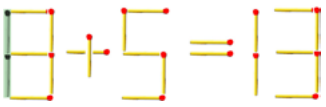
סעיף א



סעיף ב

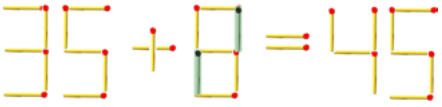


2. תשובות אפשריות:

א. 

ב. 

ג. 

ד. 

3. את המספר 35 ניתן לפרק לשני גורמים זרים: 5 ו־7. לכן כדי שהמספר יתחלק ב־35 עליו להתחלק ב־5 וב־7. משימה זו מתאימה לתלמידים מתקדמים לאחר שהכירו סימן התחלקות ב־6.

4. 35:7x100=500. בחרתי את המספר 500.



מחקר יישומי

הידע הנדרש למורי מתמטיקה המלמדים ארבע פעולות חשבון במספרים טבעיים בכיתות א'-ב'

ד"ר איריס שרייבר
אוניברסיטת בר אילן
ומכללת סמינר הקיבוצים

לובה ויסוצ'אנסקי
המכללה לחינוך האקדמית גורדון

פרופ' רותי ברקאי
מכללת סמינר הקיבוצים
ואוניברסיטת תל אביב

הידע הנדרש למורי מתמטיקה המלמדים ארבע פעולות חשבון במספרים טבעיים בכיתות א'-ב'

איריס שרייבר, לובה ויסוצ'אנסקי ורותי ברקאי

תקציר

מאמר זה מתאר את הידע הנדרש למורי מתמטיקה להוראת ארבע פעולות חשבון בכיתות א'-ב' ומציג ממצאי מחקר שבדק ידע זה בקרב 31 מורים. מרכיבי הידע השונים של המורים (ידע תוכן שגרתי, ידע תוכן ייחודי למורים, ידע של תוכן והוראה וידע של תוכן ותלמידים) נבדקו באופן שיטתי בהתייחס לכל אחת מארבע פעולות החשבון. ממצאי המחקר מעידים כי רמת הידע של המורים שהשתתפו במחקר זה משתנה בין הפעולות השונות: ידע המורים לגבי פעולת החיבור טוב יותר מידע המורים לגבי שאר פעולות החשבון, ובפרט ידיעתם לגבי פעולת החילוק שהייתה החלקית ביותר. רמת הידע של המורים משתנה בין מרכיבי הידע השונים: המורים הראו ידע בפתרון תרגילים ושאלות מילוליות. אשר למגוון דרכי פתרונות שהמורים מציגים והתייחסותם לשגיאות אופייניות של תלמידים נמצא כי ידע זה מצומצם.

ממצאי מחקר זה מצביעים על כך שיש לשים דגש רב על ביסוס ידע המורים ובפרט בפעולות חשבון שבהן נמצאו פערים. יש להדגיש זאת במסגרות של הכשרת סטודנטים להוראת המתמטיקה בכיתות היסוד (כיתות א'-ב'), בהשתלמויות ובליווי של מורים למתמטיקה.

מילות מפתח: ידע מורים למתמטיקה, ידע מתמטי תוכני, ידע מתמטי פדגוגי-תוכני, ארבע פעולות חשבון.

מבוא

ידע מורים למתמטיקה נמצא כאחד הגורמים העשויים להשפיע ביותר על תהליך הוראה-למידה ועל הישגי תלמידים בתחום זה (Tchoshanov, 2011). במחקר זה נבדק ידע מתמטי ופדגוגי תוכני של מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות א'-ב' בנושא ארבע פעולות חשבון, שהוא הנושא המרכזי בתוכנית הלימודים במתמטיקה בכיתות אלה. במחקר זה התייחסנו לידע מורים בהתאם למסגרת התיאורטית של בול ועמיתיה (Ball et al., 2008). בול ועמיתיה הגדירו שישה מרכיבי ידע שמהם בחרנו להתמקד בארבעה מרכיבי ידע הנדרשים להוראת מתמטיקה: שני מרכיבי ידע תוכן (ידע תוכן שגרתי וידע תוכן ייחודי למורים) ושני מרכיבי ידע פדגוגי-תוכני (ידע תוכן והוראה וידע תוכן ותלמידים).

רקע תאורטי

ידע מורים

מגוון מחקרים עסקו בהגדרת מרכיבי הידע הנדרשים להוראה בכלל ולהוראת מתמטיקה בפרט (Ball et al. 2008; Ball et al. 2005; NCTM, 2000; Shulman, 1986). אחד החוקרים המרכזיים שעסק בהגדרת הידע הנדרש להוראה הוא לי שולמן, אשר טען כי הידע הדרוש הוא שילוב של ידע תחום התוכן, ידע פדגוגי-תוכני וידע לגבי תוכנית הלימודים (Shulman, 1986). בהקשר להוראת המתמטיקה, **ידע של תחום התוכן** (Subject Matter Knowledge) כולל ידע של מושגים, הגדרות, חוקים, משפטים ואקסיומות. **ידע פדגוגי-תוכני** (Pedagogical Content Knowledge) כולל ייצוגים שונים לרעיון מתמטי, המחשות למושג, היכרות עם דוגמאות והדגמות מתמטיות, היכרות עם תפיסות נכונות ושגויות של תלמידים ועוד. במסמך סטנדרטים למורי מתמטיקה בארצות הברית חיזקו גישה זו, וציינו כי להוראה יעילה של מתמטיקה נדרש, בין היתר, ידע מעמיק של התוכן המתמטי, ידע של מטרות תוכנית הלימודים וידע הנוגע לתלמידים: מה יודע התלמיד, מה הוא צריך ללמוד, מהן תפיסותיו הנכונות והשגויות, ובאילו דרכים ניתן לגשר על פערי ידע של תלמידים (NCTM, 2000).

קבוצת חוקרים בראשות דבורה בּוֹל (Ball et al., 2008) עדכנה את מרכיבי הידע בהתייחס להוראת מתמטיקה. הם הסכימו עם הצורך של ידע תוכן, ידע פדגוגי-תוכני וידע לגבי תוכניות הלימודים, והציגו ארבעה מרכיבי ידע עיקריים: שני מרכיבים של ידע תוכני (ידע תוכן שגרתי וידע תוכן ייחודי) ושני מרכיבים של ידע פדגוגי-תוכני (ידע של תוכן ותלמידים וידע של תוכן והוראה).

- **ידע תוכן שגרתי** (Common Content Knowledge) הוא סוג ידע מתמטי הנדרש גם למי שאינם מורים. למשל, לדעת לחשב תרגילי חשבון, לדעת לפתור בעיות מתמטיות, לדעת הגדרת מושגים ולהשתמש בהם באופן נכון. לדוגמה, בהקשר של הוראת ארבע פעולות חשבון בכיתות א'-ב': לדעת לפתור תרגילים בתחום ה־100; להכיר את התכונות של ארבע פעולות החשבון (חיבור, חיסור כפל וחילוק); לדעת לפתור שאלה מילולית שפתרונה תרגיל חשבון בטבעיים בתחום ה־100.
- **ידע תוכן ייחודי** (Specialized Content Knowledge) הוא ידע ומיומנות מתמטית ייחודיים להוראה. למשל, לדעת לפתור בעיה במגוון דרכים, לדעת לקשר בין ייצוגים שונים לתרגיל או שאלה מילולית, ולהבין את העקרונות התאורטיים שמאחוריהם, לדעת לבחון דרך פתרון לא שגרתית של תלמיד, לברר אם היא נכונה ואם היא "תעבוד" במקרים אחרים ועוד. כמו בהקשר של הוראת ארבע פעולות חשבון בכיתות א'-ב': לדעת לפתור תרגיל כמו 19-45 ביותר מאסטרטגיית פתרון אחת; לדעת להציג המחשה מתאימה לתרגיל חשבון כמו 3×5.
- **ידע של תוכן והוראה** (Knowledge of Content and Teaching) הוא ידע פדגוגי-תוכני המהווה שילוב ידע של תחום תוכן עם הוראה. למשל, לדעת לבחור דוגמאות מתאימות להצגת נושא וכאלה המתאימות להעמקתו; לדעת באילו ייצוגים שונים ניתן להמחיש משימה מסוימת; לדעת להעריך את היתרונות והחסרונות של כל ייצוג. בהקשר של הוראת ארבע פעולות חשבון: לדעת להציג המחשה מתאימה לתרגיל כמו 3×5.
- **ידע של תוכן ותלמידים** (Knowledge of Content and Students) הוא ידע פדגוגי תוכני המהווה שילוב ידע של תחום תוכן והיכרות עם תלמידים. למשל, היכרות עם שגיאות אופייניות של תלמידים ועם סיבות אפשריות לשגיאות אלה; יכולת להעריך אם דוגמה נתונה תעניין ותעורר מוטיבציה בקרב תלמידים; לדעת לתת מענה לצורכי התלמידים בהתאם לרמות השונות. למשל, בהקשר של הוראת ארבע פעולות חשבון: לדעת במה ישגו תלמידים בפתרון תרגיל כמו 7-94 ומהן הסיבות האפשריות לשגיאות אלה.

ידע מורים הוא גורם משמעותי בתהליכי ההוראה-למידה. חוקרים שבדקו ידע של מורים (ידע תוכני וידע פדגוגי-תוכני) מצאו שככל שידע המורים היה רחב יותר, הם נתנו מענה טוב יותר לקשיי התלמידים, הכינו תוכניות התערבות טובות יותר ותלמידיהם הצליחו יותר (Tchoshanov, 2011; Van Inger et al., 2016).

הוראת ארבע פעולות החשבון במספרים טבעיים בתחום ה־100

ארבע פעולות החשבון במספרים טבעיים הן חלק מרכזי בתוכנית הלימודים למתמטיקה בבית הספר היסודי בכלל ובכיתות א'-ב' בפרט (משרד החינוך, 2006). היקפו של נושא זה בסל שעות תוכנית הלימודים במתמטיקה של כיתות א-ב הוא כ־60%. על פי דרישות משרד החינוך, הוראת ארבע פעולות חשבון מתמקדת בארבעה היבטים: עיסוק במשמעות הפעולות, שליטה בעובדות היסוד, שימוש בחוקים מתמטיים ולימוד אלגוריתמים חישוביים המבוססים על למידה משמעותית של האלגוריתמים. כמו כן בהמלצות ודרישות תוכנית הלימודים למתמטיקה לבית ספר יסודי, ניתן למצוא: שימוש בהמחשות ובייצוגים מתמטיים של מצבים מציאותיים; דגש על קשרים בין הפעולות; שימוש בשפה מתמטית; פיתוח תובנה מספרית; שימוש באסטרטגיות שונות לפתרון תרגילים. לכל אלה נדרשים המורים על פי תוכנית הלימודים של משרד החינוך, ולפיכך נדרש מהם ידע רחב, הן ידע תוכני והן ידע פדגוגי-תוכני.

מחקרים שונים שעסקו בהוראת ארבע פעולות החשבון ממליצים על דרכי הוראה הכוללות המחשות, שימוש בייצוגים ויזואליים ומשחקים. ההנחה היא שהיכרות עם מגוון אסטרטגיות מאפשרת ללומדים להחליט בעצמם בנוגע לאסטרטגיה הטובה ביותר לפתרון התרגיל. למשל, הצגת המספר כשלם וחלקיו, הבנת פעולות החיבור והחיסור והבנת הקשר ביניהן (כפעולות הפוכות) ולהמחיש זאת בעזרת חשבונייה (Zhou & Peverly, 2005). דוגמה נוספת היא שימוש בלבני עשר (Fuson & Briars, 1990) כאמצעי המחשה המשפר את הבנת המבנה העשרוני. נוסף לכך, חוקרים ממליצים על המחשה ויזואלית או באמצעות לוח המאה, אשר הסידור שלו מסייע להבנת הקשר בין ערך המקום לפעולות החיבור והחיסור (Bay-Williams & Fletcher, 2017), וכן באמצעות ישר המספרים אשר מאפשר להציג דרכי חשיבה ותהליכי חשיבה, ולגלות טעויות בתהליך הפתרון (Bobis, 2007).

מחקרים שונים עסקו בידע מורים בנוגע להוראת ארבע פעולות החשבון במספרים טבעיים. במחקר המתמקד בניתוח שגיאות של תלמידים שנעשה על ידי מורים צעירים בפתרון תרגילי חיבור וחיסור, נמצא כי המורים הצליחו לזהות את שגיאותיהם של התלמידים בפעולות החיבור והחיסור, ורובם אף זיהו את הסיבה לשגיאה, אך גילו קושי בהבנת שגיאות תלמידים במקרה שאלה השתמשו בדרכי פתרון נוספות (Hacıömeroğlu, 2013). הצלחתם של מורים צעירים לזהות את שגיאותיהם של תלמידים, כאשר מדובר בדרכי פתרון המוכרות להם, מעידה על ידע שגרתי רחב. אולם הקושי שמורים אלו גילו בנוגע לסיבותיהן של שגיאות התלמידים שנקטו דרכי פתרון נוספות (למשל על ידי עיגול מספרים), מעיד על ידע תוכן ותלמידים חלקי.

במחקרם של טאקר וסוברמניאם (Takker & Subramaniam, 2018) נמצא כי מורים בעלי ידע פדגוגי-תוכני רחב בהוראת הנושא משתמשים בשיטות הוראה מגוונות, ובתוך כך שימוש בייצוגים שונים לפעולות השונות, מציגים דוגמאות מגוונות ומשימות מאתגרות. כמו כן, נמצא כי מורה בעל ידע רחב מכיר פתרונות שונים לתרגילים, מעודד את מעורבות התלמידים בתהליך הפתרון, ומסוגל להבין ולהעריך דרכי פתרון לא שגרתיות של תלמידים. מחקרם מחזק את הצורך בהקניית ידע למורים על פי מרכיבי הידע של דבורה בול (Ball et al., 2008).

במחקרים שונים נמצא כי ידע המורים שונה בכל אחד מארבעת מרכיבי הידע ובכל אחת מארבע פעולות החשבון (פילו ושרייבר, 2020). למורים יש ידע רחב בכל הנוגע למרכיבי הידע המכונים 'ידע תוכן שגרתי' ו'ידע של תוכן והוראה'. לעומת זאת, נמצא כי למורים ידע חלקי בכל הנוגע למרכיבי הידע המכונים 'ידע תוכן ייחודי' ו'ידע תוכן ותלמידים'. בהתייחס לארבע פעולות החשבון, נמצא כי למורים ידע חלקי בכל הנוגע לפעולות החיסור והחילוק, הן ידע תוכני והן ידע פדגוגי-תוכני (Setoromo et al., 2018; Sitrava, 2018).

מן הספרות המחקרית עולה שמרכיבי הידע התוכני והפדגוגי-תוכני של מורים העוסקים בהוראת מתמטיקה בכיתות א'-ב', ובעיקר בכל הנוגע להוראת ארבע פעולות החשבון במספרים טבעיים בתחום ה־100, לא נחקרו בשיטתיות. מכך נגזרו מטרות ושאלות מחקר זה.

מטרות ושאלות המחקר

מטרת מחקר זה היא לבדוק ידע של מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות א'-ב' במרכיבי ידע שונים כפי שהוגדרו על ידי בול ועמיתיה (Ball et al., 2008), בהתייחס להוראה של ארבע פעולות החשבון (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) במספרים טבעיים בתחום ה־100. מכך נגזרו שאלות המחקר:

1. מהו ידע מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות א'-ב' בכל אחד מארבעת מרכיבי הידע השונים (ידע תוכן שגרתי, ידע תוכן ייחודי, ידע של תוכן והוראה, וידע של תוכן ותלמידים) בהתייחס לכל אחת מארבע פעולות החשבון?
2. האם יימצאו הבדלים בידע המורים בין ארבעת מרכיבי הידע השונים?
3. האם יימצאו הבדלים בידע המורים בין ארבע פעולות החשבון השונות?

מתודולוגיה

אוכלוסיית המחקר

משתתפי המחקר הם 31 מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות א'-ב' שהשתתפו בהשתלמות בהוראת המתמטיקה למורים המלמדים בכיתות א'-ב', וכולם בעלי תואר ראשון בחינוך (B.Ed.). אוכלוסיית המורים מגוונת מאוד (טבלה 1) והם נבדלים בהכשרתם להוראת המתמטיקה ובוותק שלהם בהוראת מתמטיקה.

טבלה 1:

פילוח אוכלוסיית משתתפי המחקר

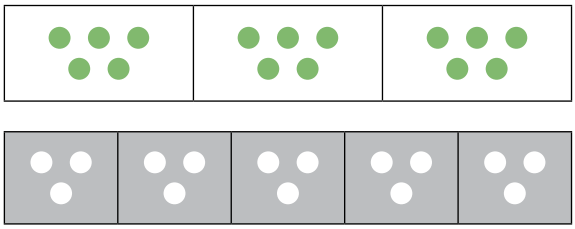
הכשרה/וותק	עד 7 שנים	מעל 10 שנים	סה"כ
התמחו במתמטיקה במסגרת לימודי התואר	6	2	8
השתתפו בכמה השתלמויות מקצועיות	4	3	7
השתתפו בהדרכות פנים בית־ספריות למורי מתמטיקה	1	5	6
למדו בקורסי התמקצעות למורי מתמטיקה	3	2	5
אין הכשרה כלל	2	3	5
סה"כ	16	15	31

כלי המחקר

במחקר זה נעשה שימוש בשאלון ידע אשר פותח לצורך המחקר, תוקף ונבדקה רמת המהימנות שלו. השאלון כלל מטלות פתוחות בהתייחס לארבע פעולות החשבון, הבודקות את ארבעת מרכיבי הידע שהגדירו בול ועמיתיה (Ball et al., 2008). חשוב לציין שבכל מרכיב ידע ניתנו תרגילים ושאלות לכל ארבע פעולות החשבון (חיבור, חיסור, כפל וחילוק).

להלן דוגמאות לחלק מהשאלות:

1. **ידע תוכן שגרתי** - לבדיקת ידע זה התבקשו המורים לפתור תרגיל או שאלה מילולית. למשל,
   - פתרו את התרגיל 19+25.
   - רונית גדולה מאחותה ב־6 שנים. רונית בת 14. בת כמה אחותה של רונית?
2. **ידע תוכן ייחודי** - לבדיקת ידע זה התבקשו המורים לפתור תרגילים נתונים ביותר מדרך אחת, להסביר את משמעות פעולת החשבון, או לקשר בין ייצוגים שונים לתרגיל או לשאלה. למשל,
   - פתרו את התרגיל 19-45 ביותר מדרך אחת.
   - על השולחן מונחות 5 קופסאות, בכל קופסה יש 3 כדורים. איזה מבין שני האיורים הבאים מתאים לייצג את הסיטואציה המתוארת באופן מילולי? הסבירו את בחירתכם.



3. **ידע תוכן והוראה** - לבדיקת ידע זה התבקשו המורים להציג דרך הוראה או המחשה לתרגילים נתונים תוך התייחסות לארבע פעולות החשבון. למשל,
   - כיצד תמחישו לתלמידים את התרגיל 3×4 וכיצד תמחישו את השוויון 3×4=4×3 ?
   - כיצד תסבירו לתלמידים את השוויון 26+8=28+6 ?
4. **ידע של תוכן ותלמידים** - לבדיקת ידע זה התבקשו המורים לציין שגיאות אופייניות של תלמידים בפתרון תרגילים נתונים ולציין סיבות אפשריות לשגיאות שציינו. למשל,
   - ציינו לפחות שתי שגיאות אופייניות שמבצעים תלמידים בפתרון התרגיל 7-94 וציינו מהן הסיבות האפשריות לכל אחת משגיאות אלו.

חשוב לציין כי במחקר נבדק ידע המורים בארבע פעולות חשבון בתחום ה־100. לכן רוב המשימות

שניתנו נלקחו מתוכנית הלימודים במתמטיקה מכיתות א'-ב', וכן נבדקו מעט תרגילים שאינם בתוכנית הלימודים לכיתות א'-ב', אבל הם תרגילי חשבון בתחום ה־100. למשל, נבדק כפל מספר דו־ספרתי בחד־ספרתי כמו 3×25 אשר נלמד בכיתה ג', אבל עדיין מתאים לבדיקת ידע של המורים בפעולות חשבון בתחום ה־100. זאת מתוך הבנה כי מצופה ממורה שמלמד בכיתה ב' שישלוט בארבע פעולות חשבון בתחום ה־100.

מהלך המחקר

המחקר נערך בקרב מורים שהשתתפו בהשתלמות לפני תחילת ההשתלמות. החוקרת הציגה למורים את מטרות המחקר ואת שאלות המחקר. לאחר הסכמת המשתתפים נשלח אליהם שאלון הידע בדוא"ל, והם ענו על השאלות בביתם ללא הגבלת זמן בכתב ידם, סרקו את תשובותיהם ושלחו אותן אל החוקרת. הנתונים עובדו ונותחו בעזרת מבחנים סטטיסטיים שונים.

ממצאים

בעיבוד הנתונים הכולל בוצעו השוואות בין הממצאים שהתקבלו לגבי סוגי הידע השונים, בין פעולות החשבון השונות, בין סוגי תרגילים שונים, ובין אוכלוסיות מורים מגוונות מבחינת הכשרתם להוראת המתמטיקה ובוותק שלהם בהוראת המתמטיקה. יצוין כי לא נמצאו קשרים מובהקים בין ידע מורים לבין מאפיינים כמו ותק בהוראת מתמטיקה או מאפייני הכשרה להוראת מתמטיקה. בהתאם לכך, מאמר זה מתמקד בממצאים שהתקבלו לגבי כל אחד מארבעת מרכיבי הידע בהתייחס לכל אחת מארבע פעולות החשבון.

ממצאי מרכיב הידע של תוכן שגרתי (CCK):
מניתוח תשובות המורים למטלות השונות שבדקו ידע זה נמצא, כי כל המורים פתרו נכון את כל התרגילים והשאלות המילוליות שהוצגו להם. כמו כן, לא נמצאו הבדלים בידע תוכן שגרתי בין ארבע פעולות החשבון.

ממצאי מרכיב הידע של תוכן ייחודי (SCK):
נזכיר כי בדיקת ידע זה נעשתה על ידי כך שהמורים התבקשו: (i) לפתור תרגילים נתונים ביותר מדרך פתרון אחת; (ii) לציין משמעות של פעולת חשבון בתרגילים נתונים ובשאלות מילוליות נתונות; (iii) לבחור ייצוגים שונים המתאימים לתרגיל או לשאלה מילולית.
בהתייחס למשמעות של פעולת החשבון ובהתייחס לבחירת ייצוגים מתאימים, נמצא שרוב המורים ענו נכון על מטלות אלו בכל אחת מארבע פעולות החשבון (בין 70% ל- 80% מהמורים).
בהתייחס לפתרון תרגילים ביותר מדרך פתרון אחת, נמצא הבדל משמעותי בין פעולות החשבון השונות.
למשל, אחת המטלות שהוצגה למורים, בהקשר לידע תוכן ייחודי, היא: "נתון התרגיל 15-33. פתרו את התרגיל ביותר מדרך פתרון אחת".
לתרגיל זה ישנן מגוון אסטרטגיות לפתרון מלבד ספירה לאחור וחיסור במאונך:

- הפחתה של 15 בשני שלבים:
  למשל, 18=20-2=33-13-2=33-15
  או 18=30-12=33-3-12=33-15
- הוספה/הפחתה של אותו מספר למחסר ולמחוסר:
  למשל, 18=38-20=(15+5)-(33+5)=33-15
  או 18=30-12=(15-3)-(33-3)=33-15
- דרכים נוספות לפתרון התרגיל: הצגת 33 כסכום של שני מחוברים אשר מאחד מהם קל יותר להפחית את 15:
  למשל, 18=3+15=3+30-15=3+30-15=33-15
  או 18=13+5=13+20-15=13+20-15=33-15

כאמור בממצאי ידע תוכן שגרתי, כל המורים פתרו נכון את התרגילים והציגו דרך פתרון אחת נכונה. מניתוח הממצאים של ארבע פעולות החשבון (טבלה 2) לגבי דרכי פתרון נוספות, עולה כי בפעולות חיבור, חיסור וכפל מרבית המורים הציגו פתרון אחד נוסף, ובפעולת החילוק האחוז נמוך יותר באופן ניכר.

טבלה 2:

ממצאי שאלות ידע תוכן ייחודי - אחוז המורים שהציגו לתרגיל יותר מדרך פתרון אחת

פעולה	תרגיל	הציגו פתרון אחד נוסף	הציגו יותר מפתרון אחד נוסף
חיבור	25+19	81%	51%
חיסור	33-15	81%	35%
כפל	5×15	90%	45%
חילוק	45:3	49%	19%

ההבדלים בין הפעולות נבדקו באופן סטטיסטי באמצעות מבחן t, ונמצא כי ידע המורים בהתייחס לפעולת החילוק מצומצם יותר, באופן מובהק, מידע המורים בפעולות החשבון האחרות.

נציג דוגמה נוספת לבדיקת ידע תוכן ייחודי לגבי אותו תרגיל שהצגנו קודם לכן, 15-33. המורים התבקשו לחבר שלוש שאלות מילוליות המתאימות לתרגיל הנתון, כאשר בכל שאלה הם מכוונים למשמעות אחרת של פעולת החיסור. כמו כן הם התבקשו לציין את המשמעות שאליה התייחסו בכל אחת מהשאלות המילוליות שחיברו. להלן משמעויות שונות של פעולת החיסור:

א. **גריעה:** שאלה דינמית שבה נתונה כמות התחלתית שממנה נלקחה כמות מסוימת. למשל, "באוטובוס היו 33 נוסעים, 15 נוסעים ירדו בתחנה. כמה נוסעים נותרו באוטובוס?".

ב. **הפרדה:** שאלה סטטית שבה יש כמות כוללת המופרדת לשתי תת־קבוצות. למשל, "בארון 33 ספרים. מספר הספרים באנגלית הוא 15, השאר בעברית. כמה ספרים בעברית יש בארון?".

ג. **השוואה:** שאלה שבה נתונות שתי כמויות ויש להשוות ביניהן. למשל, "לאסף יש 33 תמונות של כדורגלנים. מספר התמונות של רמי קטן ב־15 ממספר התמונות של אסף. כמה תמונות יש לרמי?".

מניתוח הממצאים עולה, כי 45% מהמורים חיברו בין שתיים לשלוש שאלות עם משמעויות שונות של הפעולה. יותר ממחצית המורים (55%) לא הציגו שאלות מילוליות עם משמעויות שונות: 20% מהמורים חיברו בעיות מילוליות שונות, אך עם משמעות זהה, כלומר הציגו משמעות אחת בלבד; 35% מהמורים ענו באופן חלקי או שגוי (חלקם הגדירו משמעות שאינה מתאימה לבעיה המילולית שחיברו, חלקם שגו בשימוש במושג 'הפרש', וחלקם כתבו בעיה מילולית שגויה לחלוטין או שחסר בה הסבר לגבי המשמעות של הפעולה בהקשר לאותה בעיה מילולית שהציגו). גם בסוג זה של ידע תוכן ייחודי, הבודק ידע לגבי משמעות הפעולה, נמצאו הבדלים בין הפעולות השונות. בפעולת החילוק, אחוז המורים שהכירו את משמעות פעולת החילוק היה נמוך משמעותית ביותר מ־10% מאשר בפעולות החשבון האחרות.

ממצאי מרכיב הידע של תוכן והוראה (KCT):

נזכיר כי בדיקת ידע זה נעשתה על ידי כך שהמורים התבקשו להציע דרכי הוראה או המחשה לתרגילים נתונים. מהממצאים עולה כי בהתייחס לפעולות החיבור והחיסור, כמחצית מהמורים הציעו דרכי הוראה/המחשה מתאימות. רוב המורים הציעו שימוש בעצמים קונקרטיים ומניית כמות. לעומת זאת, בפעולות הכפל כ־40% מהמורים ובפעולת החילוק כ־25% הציעו דרכי הוראה/המחשה מתאימות. בדומה לפעולות החיבור והחיסור, גם לפעולות אלה רוב המורים הציעו שימוש בקבוצות של פריטים (באיור או בעצמים קונקרטיים). חמישית מהמורים לא הציעו דרכי הוראה/המחשה כלל. נתייחס לתרגיל 8+26. לתרגיל זה התבקשו המורים לתאר דרכי הוראה/המחשה שניתן להציג לתלמידים. לתרגיל זה ניתן להציג סיפור מילולי מחיי היום יום, המחשה ויזואלית, שימוש בעצמים קונקרטיים או על ידי תמונה, והמחשות נוספות (ראו איור 1):

א. שימוש בחפצים שונים ומניית הכמות הכללית בדרכים שונות.

ב. חשבונייה המאפשרת מניית המשך והמרה.

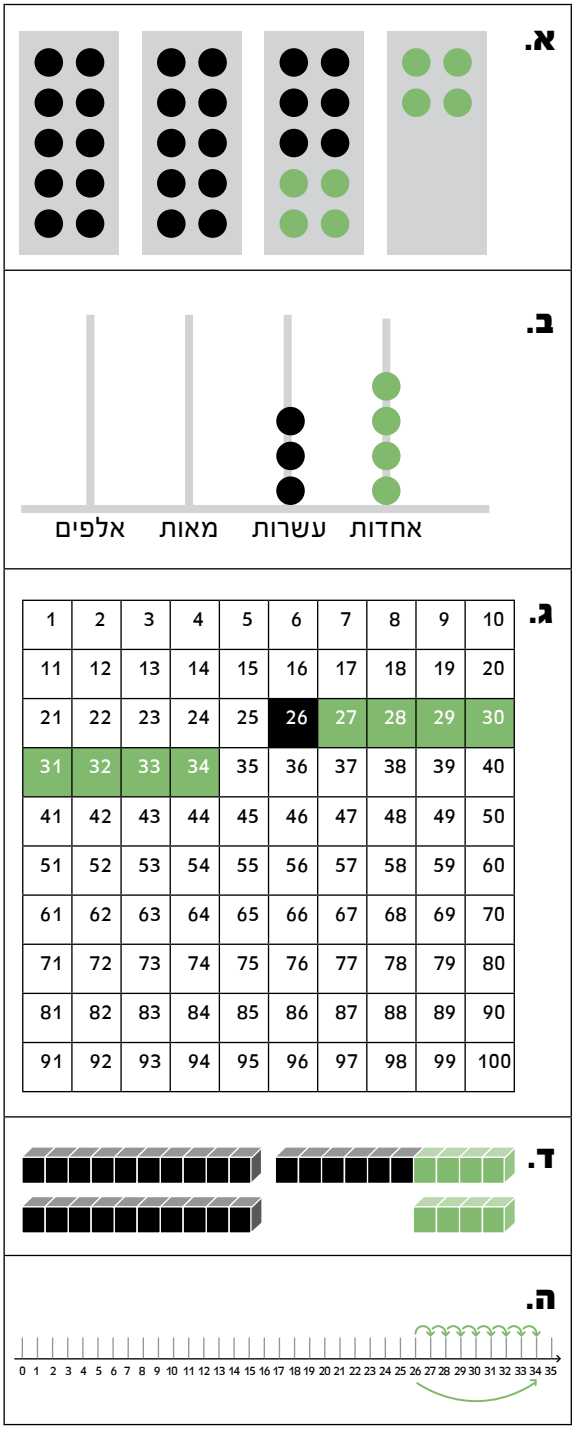
ג. שימוש בלוח ה־100: להתקדם מ־26 שמונה מספרים לפי הסדר, או לרדת מ־26 שורה (ל־36) ולחזור שני מספרים.

ד. שימוש בלבני "בסיס 10".

ה. ייצוג באמצעות ישר המספרים.

איור 1:

המחשות לתרגיל 26+8



טבלה 3 מציגה את אחוז המורים שהציגו כל אחד מאמצעי ההוראה/המחשה האלה.

טבלה 3:

שכיחות דרכי הוראה/המחשה שהציגו המורים לתרגיל החיבור

אמצעי הוראה/ המחשה	אחוז המורים שהציעו אמצעי זה	הערות
עצמים קונקרטיים	42%	האמצעי הנפוץ ביותר הוא לבני "בסיס 10".
מניית כמות	21%	שימוש בעצמים שונים המאפשר מנייה בדרכים שונות.
תרגיל עזר	14%	שימוש בתרגיל עזר מאפשר השלמה לעשרת שלמה, פירוק מספר ליחידות ולעשרות.
סיפור מילולי	6%	סיפור מילולי המקל את הבנת הפעולה עצמה, או מקל את הבנת משמעות הפעולה.
ישר המספרים	10%	הייצוג המקשר בין המחשה קונקרטית לשפה פורמלית.
טכנולוגי	2%	צִיינו יישומונים המשמשים להוראת הפעולה.
חסר	35%	לא ציינו אמצעי המחשה כלשהם.
לוח ה־100	0%	---
חשבונייה	0%	---

מטבלה 3 עולה שבפעולת החיבור, מרבית המורים ציינו אמצעים קונקרטיים המאפשרים אגירת כמויות לפי מבנה עשרוני, כגון: לבני "בסיס 10", לבני דיג'י או חפצים שונים הניתנים לאגירה. השימוש באמצעים טכנולוגיים נמצא בשכיחות הנמוכה ביותר (רק מורה אחד הציע שימוש בכלים טכנולוגיים).

דוגמה נוספת לבדיקת ידע תוכן והוראה היא מטלה

העוסקת בפעולת החילוק. התרגיל שהוצג למורים הוא 20:4. בדומה לתרגיל הקודם, גם לתרגיל זה התבקשו המורים להציע המחשות שונות שניתן להציג לתלמידים. בשאלה זו פחות ממחצית מהמורים הציגו שתי דרכים להמחשה: 23% מהמורים השתמשו בחילוק להכלה, ו־20% מהמורים לא הציעו דרך המחשה לתרגיל זה.

נציין כי תרגיל זה ניתן להמחיש בדרכים הבאות (ראו איור 2):

א. **חילוק לחלקים:** 20 פריטים לחלק לארבע קבוצות שוות בגודלן, והשאלה היא: כמה פריטים בכל קבוצה?

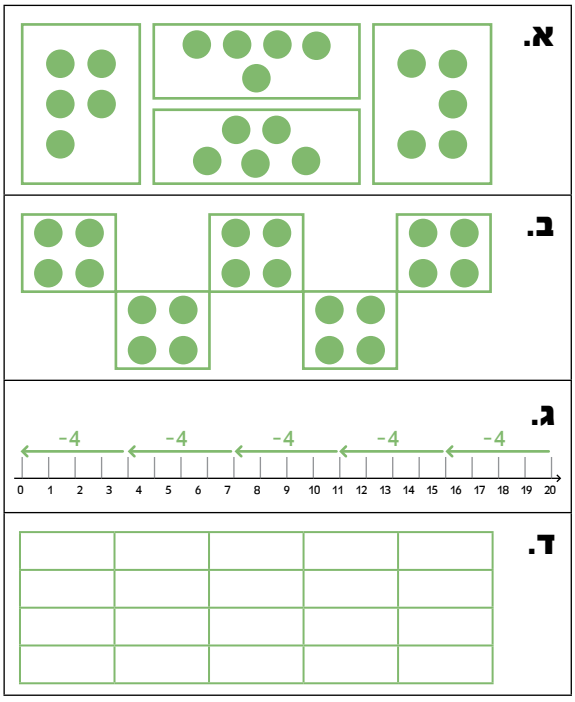
ב. **חילוק להכלה:** 20 פריטים חולקו לקבוצות כך שבכל קבוצה יש ארבע פריטים, והשאלה היא: כמה קבוצות נוצרו?

ג. **שימוש בחיסור חוזר** (של עצמים, באיור או על ישר המספרים): כמה פעמים יש לחסר ארבע מהמספר 20 על מנת להגיע לאפס?

ד. **שטח מלבן:** נתון מלבן ששטחו 20 יחידות שטח, אורך צלע אחת 4 יחידות אורך. מה אורכה של הצלע הסמוכה?

איור 2:

המחשות לתרגיל 20:4



טבלה 4 מציגה את ממצאי המחקר לגבי ידע תוכן והוראה, בכל אחת מפעולות החשבון השונות.

טבלה 4:

ממצאי שאלות ידע תוכן והוראה - אחוז המורים שהציגו דרכי המחשה והוראה

פעולה	תרגיל	לא ידעו להציג המחשה	הציגו המחשה אחת בלבד	הציגו יותר מהמחשה אחת
חיבור	26+8	3%	45%	52%
חיסור	23-8	12%	65%	23%
כפל	4×3	0%	55%	45%
חילוק	20:4	36%	51%	13%

מטבלה 4 ניתן לראות כי בדומה למרכיב ידע תוכן ייחודי, גם במקרה זה, קיימים הבדלים בין הפעולות השונות: כל המורים המחישו את תרגיל הכפל, וכל המורים פרט למורה אחת המחישו את תרגיל החיבור. לעומת זאת, ארבעה מורים לא המחישו את תרגיל החיסור ותשעה לא המחישו את תרגיל החילוק. בדיקת מובהקות סטטיסטית של הממצאים העלתה, כי ידע המורים לגבי פעולת החילוק מצומצם באופן ניכר מאשר בפעולות החשבון האחרות.

ממצאי מרכיב הידע של תוכן ותלמידים (KCS):

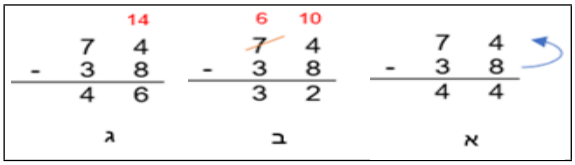
נזכיר כי בדיקת ידע זה נעשתה על ידי כך שהמורים התבקשו לאתר שגיאות בפתרון תרגילים שהוצגו להם, או לציין שגיאות אופייניות שתלמידים עלולים לשגות בתרגילים נתונים שהוצגו להם, ולציין סיבות אפשריות לשגיאות אלה.

הממצאים מעידים כי רוב המורים מזהים אם פתרון נתון הוא נכון או שגוי, ויודעים להצביע על השגיאה. חלק קטן מהמורים ידעו לצפות מראש שגיאות שתלמידים עלולים לשגות בפתרון תרגיל מסוים. כמו כן, חלק מהמורים לא ידעו להסביר ממה נובעות שגיאות אלו. למשל, הוצג למורים התרגיל 38-74. לתרגיל זה מספר שגיאות שניתן לצפות מראש כי חלק מהתלמידים ישגו. למשל:

- כתיבה של 38 כסכום של 30 ו־8 אבל חיסור שגוי של 30 בלבד: 74-38=74-30+8=44+8=52
- מגדילים מחוסר ב־6 כדי להגיע לעשרת שלמה, ובמקום להגדיל גם את המחסר - מקטינים אותו, וכך מקבלים את הפתרון השגוי:
74-38=(74+6)-(38-6)=80-32=48
- מגדילים מחסר ב־2 כדי להגיע לעשרת שלמה, ובמקום להגדיל גם את המחוסר - מקטינים אותו, וכך מקבלים את הפתרון השגוי:
74-38=(74-2)-(38+2)=72-40=32
- בחיסור במאונך מחסרים את המספר הקטן (4) מהמספר הגדול (ראה איור 3א)
- בחיסור במאונך פורטים עשרת, אך לא מוסיפים לה את היחידות (ראה איור 3ב)
- בחיסור במאונך מוסיפים 10 ל־4, אך לא מפחיתים את העשרת מה־7 (ראה איור 3ג)

איור 3:

שגיאות תלמידים בפתרון תרגיל החיסור 74-38



טבלה 5 מציגה את ממצאי ידע המורים לגבי שגיאות תלמידים בכל אחת מארבע פעולות החשבון.

טבלה 5:

ממצאי שאלות ידע תוכן ותלמידים - אחוז המורים שצפו מראש ואיתרו שגיאות בפתרון של תלמידים

פעולה	תרגיל	לא ידעו להציג שגיאות תלמידים	הציגו שגיאה אחת בלבד	הציגו יותר משגיאה אחת
חיבור	48+17	16%	19%	65%
חיסור	74-38	6%	23%	71%
כפל	25×3	3%	90%	7%
חילוק	32:4	3%	97%	0%

בטבלה 5 ניתן לראות כי בהתייחס לפעולות הכפל והחילוק, ידע המורים מצומצם יותר, באופן מובהק, מאשר בפעולות החיבור והחיסור.

לסיכום, ממצאי המחקר מעידים על הבדלים, הן בין ארבעת מרכיבי הידע השונים של המורים (הידע הטוב ביותר בידע תוכן שגרתי, והידע החלקי ביותר בידע לגבי שגיאות תלמידים), והן בין ארבע פעולות החשבון (הידע הטוב ביותר לגבי פעולת החיבור והידע החלקי ביותר לגבי פעולת החילוק).

דיון ומסקנות

במחקר זה נבדק אחד הגורמים המשפיעים על תהליך הוראת המתמטיקה בקרב מורים, והוא ידע של מורים. הממצאים מעידים כי קיימים הבדלים בידע המורים שהשתתפו במחקר זה, הן בין המרכיבים השונים, והן בין פעולות החשבון השונות.

בהתייחס לידע מורים במרכיבי הידע השונים (ידע תוכן שגרתי, ידע תוכן ייחודי, ידע תוכן ותלמידים וידע תוכן והוראה), נמצא כי למורים יש ידע תוכן שגרתי וכן ידע תוכן והוראה. כמו כן נמצא כי למורים ידע תוכן ייחודי וידע תוכן ותלמידים חסר.

במרכיב ידע תוכן ותלמידים נמצא כי חלק מהמורים התקשו לצפות מראש שגיאות שתלמידים עלולים לשגות בפתרון תרגילים. כמו כן, חלק מהמורים גילו ידע חלקי בזיהוי שגיאות, בתיאור מקור אפשרי לשגיאה ובדרכי הטיפול בה (בייחוד בהתייחס לפעולות הכפל והחילוק). ידע של מורה לגבי לומדים הוא בעל חשיבות רבה כיוון שהוא עשוי לסייע לו לכוון את ההוראה ללומדים מסוימים, לכוון את הסבריו לצורכי התלמידים ולקשייהם. פערים בידע זה עלולים לגרום לכך שהמורה בכיתה ייתן מענה פחות טוב לתלמידים. ניתן לשער כי ממצא זה של ידע חלקי בזיהוי שגיאות של תלמידים נובע מוותק נמוך בהוראה שמאפיין מחצית מהמשתתפים שחסרה להם היכרות עם תלמידים ודרכי חשיבה של תלמידים. אומנם לא נמצאו קשרים מובהקים בין ותק לידע, ובאופן כללי המורים המשתתפים הפגינו פחות ידע לגבי שגיאות

תלמידים, אך מורים עם ותק נמוך הכירו פחות שגיאות תלמידים ממורים ותיקים (גם אם לא במובהק), וייתכן כי זה השפיע על הממצאים לגבי ידע זה. כמו כן ייתכן כי ממצא זה נובע משילובם של כמה תרגילים שאינם בתוכנית הלימודים של כיתות א'-ב'. המורים ידעו לפתור תרגילים אלה, אך לא התנסו די הצורך בתגובות ושגיאות של תלמידים הפותרים תרגילים כאלה.

במרכיב ידע תוכן ייחודי נמצא כי חלק מהמורים לא הציגו אסטרטגיות פתרון שונות לתרגילים. ידע תוכן ייחודי הוא משמעותי להוראה כיוון שיכולת המורה לדעת מגוון של דרכי פתרון ומגוון ייצוגים עשויה לסייע לו לכוון את ההוראה שלו ולהתאימה ללומדים. הצגת מגוון הסברים והמחשות מספקת לתלמידים כלים טובים יותר לפתור תרגילים. ייתכן שממצא זה התקבל לנוכח כך שכמחצית מהמורים שהשתתפו במחקר זה לא התמחו בהוראת המתמטיקה במסגרת הכשרתם האקדמית להוראה.

בהתייחס לידע המורים בפעולות החשבון השונות (חיבור, חיסור, כפל וחילוק) נמצא, כי למורים ידע לוקה בחסר לגבי פעולת החילוק. המורים שהשתתפו במחקר זה התקשו להסביר את תכונותיה של פעולת החילוק, והיה חסר ידע לגבי השימוש במושגים הקשורים לפעולת החילוק. מחצית מהמורים לא הציגו דרך פתרון נוספת לתרגיל חילוק מלבד דרך הפתרון שהם עצמם פתרו. רובם פתרו תרגילי חילוק כפעולה הפוכה לכפל, או בעזרת חוק הפילוג. ייתכן שחוסר ידע בפעולת החילוק נובע מכך שידע המורים בפעולת החילוק נסמך על כך שזו פעולה הפוכה לכפל (Downton, 2013), ופחות על משמעויות החילוק הנוספות, וייצוגים שונים שלו. כמו כן, ייתכן שממצא זה נובע מכך שעל־פי תוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות א'-ב' מוקדשות הרבה יותר שעות עבור הוראת פעולות החיבור והחיסור מאשר עבור הוראת פעולות הכפל והחילוק.

ממצאי מחקר זה מחדשים על הקיים בספרות המחקרית בכך שנבדקו ארבעת מרכיבי הידע הנדרש להוראה (Ball et al., 2008) בארבע פעולות החשבון אצל מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות א'-ב'. הממצאים שהתקבלו במחקר זה מחזקים ממצאי מחקרים קודמים שבוצעו לגבי מורים לתלמידים לקויי למידה בפעולות כפל וחילוק (שרייבר ופילו, 2020), ולגבי מורים בבית הספר היסודי המלמדים בכיתות גבוהות יותר (Sitrava, 2018). במחקרים אלו, בדומה למחקר הנוכחי, נמצא כי רמת הידע הגבוהה ביותר של המורים היא במרכיב 'ידע תוכן שגרתי' ונמוכה יותר במרכיב 'ידע תוכן ותלמידים'. כמו כן, נמצא ידע פדגוגי חלקי בכל הנוגע לפעולת החילוק.

יצוין כי במסגרת מחקר זה, נבדקו הבדלים בין ידע מורים בעלי ותק שונה ובין ידע מורים בעלי הכשרה שונה. בניגוד למצופה לא נמצא קשר סטטיסטי מובהק בין גורמים דמוגרפיים של ותק וסוג הכשרה לבין ידע המורים. ממצא זה נוגד ממצאי מחקרים קודמים (שרייבר ופילו, 2020) ונובע, כפי הנראה מגודל הקבוצה. מההבדלים שנמצאו במחקר זה בידע המורים בהתייחס למרכיבי הידע השונים, נראה כי יש חשיבות להכשרה של מורים להוראת המתמטיקה בכיתות היסוד, וחשיבות של שימת דגש בהשתלמויות מורים על מרכיבי ידע שבהם נמצא למורים ידע חסר. תוכניות הכשרת מורים והשתלמויות לפיתוח מקצועי צריכות לכלול מרכיבי ידע אלה שבהם מספר מחקרים מראים, כי ידע המורים הוא לוקה בחסר. ראוי כי תוכניות לקידום ידע מקצועי של המורים להוראת המתמטיקה יתייחסו, בין השאר, לידע הפדגוגי הנדרש להוראה: הכרת דרכי חשיבה של תלמידים בהתייחס לארבע פעולות החשבון, היכרות עם נושאים קלים יותר ללמידה או קשים יותר ללמידה, שגיאות אופייניות של תלמידים וסיבות אפשריות לשגיאות אלו. כך תשתפר יכולת המורים לבחור משימה שיש בה כדי לעורר מוטיבציה אצל התלמידים, ויכולתם להשתמש באסטרטגיות מגוונות המותאמות ספציפית לתלמידים הזקוקים להן.

בעקבות מחקר זה נוכל להמליץ על מספר מחקרי המשך העשויים לתת תשובות לכל ההשערות המסבירות את הממצאים: (1) לחקור, באופן דומה למחקר זה, אוכלוסייה גדולה יותר של מורי כיתות א'-ב' שתאפשר בדיקת מובהקות הבדלים בין אוכלוסיות שונות של מורים; (2) לחקור תכנים נוספים מתוכנית הלימודים; (3) לחקור ידע של מורים המלמדים תלמידים בשכבות גיל נוספות.

מקורות

- משרד החינוך, התרבות והספורט (2006). *תוכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים*. ירושלים: ת"ל.
- פילו, ר' ושרייבר, א' (2020). כפל וחילוק של מספרים טבעיים ואפס בכיתות של תלמידים לקויי למידה: ידע מורים וחוללות עצמית שלהם. *עיון ומחקר בחינוך מתמטי*, 8, 51-42.
- שרייבר, א' ופילו, ר' (2020). ידע ותחושת מסוגלות של מורים למתמטיקה לתלמידים עם לקויות למידה: הבדלים בין כפל לבין חילוק. *החינוך וסביבו*, מ"ב, 71-91.
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bas, H. (2005). Knowing mathematics for teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(1), pp. 14–17, 20–22, 43–46.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59* (5), 389–407.
- Bay-Williams, J., & Fletcher, G. (2017). A bottom-up hundred chart? *Teaching Children Mathematics, 24*(3), e1–e7.
- Bobis, J. (2007). The empty number line: a useful tool or just another procedure? *Teaching Children Mathematics, 13*(8), 410–413.
- Downton, A. (2013). Making connections between multiplication and division. In V. Steinle, L. Ball & C. Bardini, (Eds.), *Mathematics education: Yesterday, today, and tomorrow: Proceedings of the 36th annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (pp. 242–249). VIC: MERGA.
- Fuson, K. C., & Briars, D. J. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first and second-grade place value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 180–206.
- Hacıömeroğlu, G. (2013). Elementary preservice teachers' mathematical knowledge for teaching: Analysis of student's solution to addition and subtraction operations. *Education and Science, 38*(168), 332–346.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, Virginia, USA: NCTM.
- Setoromo, M., Bansilal, S., & James, A. (2018). Lesotho grade R teachers' mathematical knowledge for teaching numeracy. *South African Journal of Childhood Education, 8*(2),1–9.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.
- Sitrava, T. R. (2018). An investigation of prospective mathematics teachers' knowledge of basic algorithms with whole numbers: A case of Turkey. *European Journal of Educational Research, 7*(3), 513–528.
- Takker, S., & Subramaniam, K. (2018). Teacher knowledge and learning "in-situ": A case study of the long division algorithm. *Australian Journal of Teacher Education, 43*(3), 1–20.
- Tchoshanov, M. A. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 76,* 141-164.
- Van Inger, S., Eskelson, S. L., & Allsopp, D. (2016). Evidence of the need to prepare prospective teachers to engage in mathematics consultations. *Mathematics Teacher Education and Development, 18*(2), 73-91.
- Zhou, Z., & Peverly, S. (2005). Teaching addition and subtraction to first graders: A Chinese perspective. *Psychology in the Schools, 42*(3), 259–272.

מחקר יישומי

האם הייצוג משנה?
חקר הכללת דפוסים מתמטיים בקרב תלמידי כיתות ה'-ו'

ד"ר עדי עראקי
המחלקה למתמטיקה
הפקולטה לחינוך ומנהיגות,
המכללה האקדמית אחוה



האם הייצוג משנה?
חקר הכללת דפוסים מתמטיים בקרב תלמידי כיתות ה'-ו'[1]

עדי עראקי

מבוא

הכללה היא מיומנות חיונית במתמטיקה, המאפשרת לתלמידים לזהות דפוסים ויחסים, לחזות ולפתור בעיות בצורה יעילה (Karsenty, 2020). מחקרים הראו שסוג הייצוג המשמש להצגת נתונים יכול להשפיע על יכולתם של התלמידים להכליל. בייצוגים מספריים משתמשים במספרים וסמלים כדי לייצג את התבנית, בעוד בייצוגים חזותיים-ציוריים משתמשים בתמונות או דיאגרמות כדי להראות את התבנית. לשני סוגי הייצוג יש יתרונות וחסרונות. ייצוגים מספריים הם מופשטים יותר מאשר ייצוגים חזותיים-ציוריים, והתלמידים נדרשים להבין סמלים ופעולות מתמטיות. לעומת זאת, ייצוגים חזותיים-ציוריים קונקרטיים יותר מאשר ייצוגים מספריים, ויכולים לעזור לתלמידים לדמיין את התבנית והמבנה הבסיסי שלה (Moyer-Packenham & Boyard, 2016).

בשנים האחרונות מתגבר דיון בחינוך המתמטי לגבי הכללת מושגים אלגבריים בשיעורי חשבון ברמת בית הספר היסודי. חוקרים בדקו את הגישה שמושגים אלגבריים יכולים להיות מושרשים כבר בדרגות כיתה נמוכות יותר כאשר ילדים מכירים בקביעות של התנהגות מספרית, במיוחד במספרים טבעיים. על פי גישה זו, התבוננות בדפוסים ובסדרות מאפשרת לתלמידים להכיר את המנגנונים המחברים בין מספרים ופעולות אריתמטיות (Cai & Knuth, 2011; Stacey & Chick, 2004). על ידי התבוננות בדפוסים ובסדרות הלומדים יכולים להכיר את המנגנונים המחברים בין מספרים ופעולות אריתמטיות.

רצפים של צורות המדגימים שינויים בסדרה מסוימת זוהו כמשימות מתאימות לחקירת סדרות, שכן הן מזמנות לכל תלמיד חוויות מתמטיות ברמות שונות (Smith, Hillen & Catania, 2007). משימות אלו יכולות לשמש "גשר" מהעולם הפיזי, כמו קוביות וקְסָמים, לאלגברה פורמלית. עם זאת, מעבר זה מקונקרטי למופשט חייב להיות מלווה בפיתוח יכולת ההכללה וההיגיון של תלמידים. בלנטון וקפוט מתארים תהליך זה כמקום שבו תלמידים מכלילים רעיונות מתמטיים ממופעים מסוימים, מבססים את ההכללות הללו באמצעות שיח וטיעון, ומבטאים אותן בדרכים פורמליות יותר ויותר מותאמות לגיל (Blanton & Kaput, 2005).

מחקרים הראו שעבודה עם דפוסים משפיעה על כמה היבטים של היכולות המתמטיות של תלמידים. היא מאפשרת לתלמידים לפתח שפה מתמטית, להניח השערות ולהצדיק או להפריך אותן (Moss & Beatty, 2006), תומכת בהבנת היחסים בין כמויות (Carraher, et.al., 2008), והיא דרך לבנות הכללות מתמטיות (Kieran, 1992; Carraher, et.al., 2008).

חוקרים זיהו דפוסים שונים, כולל דפוסים ליניאריים, דפוסים בהליכים חישוביים ודפוסים חוזרים (Zazkis & Liljedahl, 2002). המחקר הנוכחי מתמקד בדפוסים הניתנים לייצוג אריתמטי ולייצוג חזותי-ציורי. באמצעות ייצוג של דפוסים אלו נבקש מהתלמידים לנסח הכללות לגבי הופעת מספר או מספר עיגולים בסדרה (Moss & Beatty, 2006). בהתאם ליכולתם, התלמידים יכולים לבטא את ההכללות שלהם במילים או בסמלים.

הוצעו כמה מודלים תיאורטיים כדי להסביר כיצד תלמידים מכלילים דפוסים. אחד המודלים הוא מודל שלבי ההכללה. על פי מודל זה, התלמידים יעברו מספר שלבים לפני שהם מגיעים להכללה. השלב הראשון כולל זיהוי הדפוס וביצוע תצפיות פשוטות לגביו.

1. מאמר זה הוא חלק מעבודת תיזה שבוצעה במסגרת לימודי תואר שני במחלקה להוראת המדעים, אוניברסיטת בן-גוריון בהנחיית פרופ' מייקל פריד ופרופ' ראיסה גוברמן.



השלב השני כולל מציאת נוסחה או כלל המתארים את התבנית, בעוד השלב השלישי כולל בדיקת הכלל כדי לראות אם הוא "עובד" עבור דוגמאות אחרות (Wijns, et.al., 2019).

המחקר הנוכחי נועד לחקור את יכולת ההכללה של תלמידי כיתות ה'-ו' בדפוסים המיוצגים מספרית וחזותית-ציורית. המטרה הייתה לזהות הבדלים כלשהם ביכולתם של תלמידים להכליל מתוך ניתוח ההכללות שיוצרו על ידי התלמידים מהסוגים השונים הללו של ייצוגים. לממצאי המחקר יש השלכות על הוראה ולימוד מתמטיקה, במיוחד במונחים של האופן שבו מורים יכולים לתמוך ביכולת ההכללה של התלמידים כאשר עובדים עם סוגים שונים של דפוסים וייצוגים. הממצאים ממחקר זה יתרמו להבנתנו את הדרכים שבהן התלמידים מפתחים חשיבה אלגברית, ואת התפקיד שצורות ייצוג שונות ממלאות בתהליך זה.

מתודולוגיה

במחקר זה נעשה שימוש במחקר עיצוב ניסויי ובגישות מעורבות לבחינת יכולת ההכללה של תלמידי כיתות ה' ו'ו לתבניות מספריות וחזותיות-ציוריות. במחקר השתתפו 91 תלמידים מבתי ספר שונים במרכז הארץ שנבחרו באמצעות דגימת נוחות. התלמידים למדו שיעורי מתמטיקה קבועים, ובהם קיבלו דפי עבודה עם משימות שדרשו מהם להכיר ולהכליל את סדירותו של רצף. בכל דף עבודה נכללו שתי משימות, אחת לכל צורת ייצוג, והשלמת כל דף עבודה והדיון על אסטרטגיות פתרון ארכו שיעור שלם (45-50 דקות).

בין דפי העבודה נבחרו שניים לניתוח, שבהם הוצג אותו רצף בפורמטים מספריים וחזותיים-ציוריים כאחד (ראו איור 1). שני הרצפים בדפי העבודה היו שונים מבחינת האופי המתמטי שלהם: בדף עבודה 1 המשימה היא סדרה חשבונית (4n+1). המשימה הראשונה מוצגת בייצוג חזותי-ציורי והמשימה השנייה בייצוג מספרי. בדף עבודה 2 הרצף הוא של מספרים משולשיים. בדומה לדף עבודה 1, המשימה הראשונה מוצגת בייצוג חזותי-ציורי והמשימה השנייה בייצוג מספרי. הכלל שלפיו פעלה ההתקדמות האריתמטית היה שהמספרים מתחלקים ב־4 עם שארית של 1 (דף עבודה 1), בעוד שרצף המספרים המשולשיים ייצג כל איבר כקבוצת עצמים שניתן לסדר בצורת משולש שווה צלעות (דף עבודה 2).

איור 1:

דפי העבודה שקיבלו לתלמידים

דף עבודה 1

משימה 1:

התבוננו בסדרה הבאה:



א. כמה נקודות יהיו באיבר ה־6? הסבירו.

ב. הסבירו את חוקיות הסדרה בלשונכם.

משימה 2:

התבוננו בסדרה הבאה:

5; 9; 13; 17...

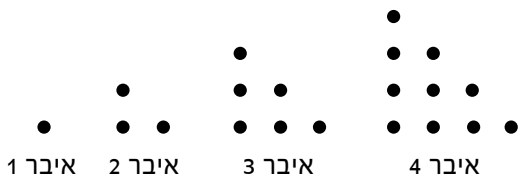
א. מה יהיה המספר במקום החמישי?

ב. הסבירו את חוקיות הסדרה בלשונכם.

דף עבודה 2

משימה 1:

התבוננו בסדרה הבאה:



א. כמה נקודות יהיו באיבר ה־6? הסבירו.

ב. הסבירו את חוקיות הסדרה בלשונכם.

משימה 2:

התבוננו בסדרה הבאה:

1; 3; 6; 10...

א. מה יהיה המספר במקום החמישי?

ב. הסבירו את חוקיות הסדרה בלשונכם.



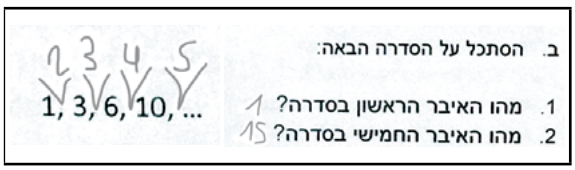
דפי העבודה שנאספו לאחר השלמתם מן התלמידים נותחו ניתוח תוכן ישיר, שבו סווגו השלבים שבהם התקדמו התלמידים במטרה להגיע להכללה לפי המסגרת שהציעה רדפורד (Radford, 2010). מסגרת זו כוללת קידוד של כל שלב בפתרון לפי טיפולוגיה של צורות חשיבה אלגברית בעקבות רמת ההכללה שמספקים התלמידים בעבודתם. הקטגוריות שנוצרו חולקו לשתי קטגוריות־על.

1. חשיבה אלגברית עובדתית:

א. זיהוי חוקיות (to objectify a regularity), כלומר התלמיד יכול להגיד מה האיבר הבא בסדרה בהמשך לאיברים הנתונים במשימה (איור 2). הפתרון מציג את היכולת של התלמיד להגיע לאובייקטיפיקציה של החוקיות, כלומר את היכולת לזהות את הקשר בין מספר הצורה בסדרה לבין, למשל, מספר העיגולים שבה. תלמידים אשר בחרו להתמודד עם המשימות בדרך זו היו מסוגלים לקבוע כיצד לקבל את האיבר הבא בסדרה, במקרה שכל המספרים שלפני איבר זה היו נתונים בפניהם. אם היו נתונים כמה מספרים והיה צורך לקבוע מה האיבר העשירי, התלמידים עבדו בקפדנות, וחישבו כל אחד מהאיברים של סדרה זו עד המקום המבוקש.

איור 2:

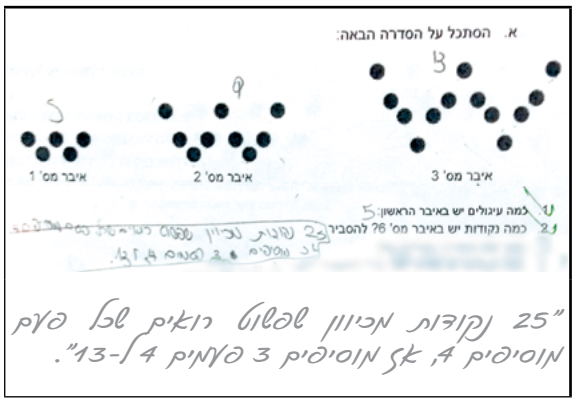
מתוך תשובות התלמיד - דף עבודה 2 משימה 2



ב. יצירת "נוסחה בפעולה" באמצעותה התלמיד יכול לגלות מה גודלו של איבר מסוים שלא נתון במשימה עצמה. איבר זה אינו האיבר הבא בהמשך לאיברים הנתונים. התלמידים ניסו ליצור מעין נוסחה שמטרתה לעזור להם להגיע לפתרון ולהבנת החוקיות בסדרה המתוארת בפניהם (איור 3).

איור 3:

מתוך תשובות התלמיד - דף עבודה 1 משימה 1

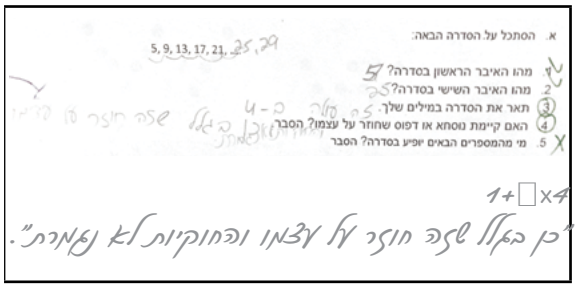


2. חשיבה אלגברית הקשרית:

א. הבאת דוגמה גנרית לצורך ניסוח כלל הסדרה (איור 4).

איור 4:

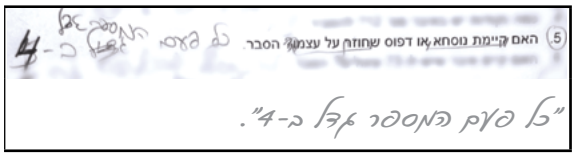
מתוך תשובות התלמיד - דף עבודה 1 משימה 2



ב. תיאור הכלל במילים באופן כללי ללא הסתמכות על דוגמה מסוימת (איור 5).

איור 5:

מתוך תשובות התלמיד - דף עבודה 1 משימה 2



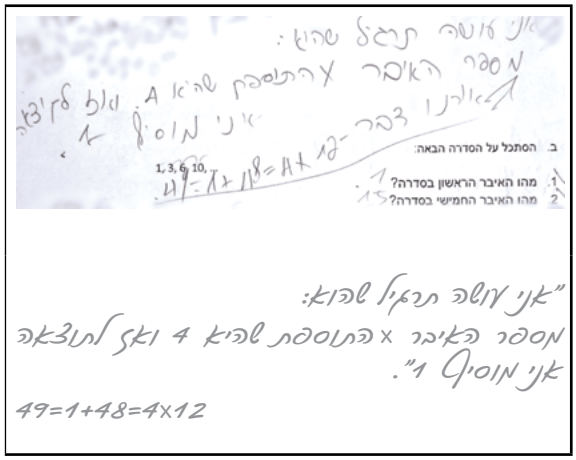


ג. חשיבה אלגברית סטנדרטית:

אינדוקציה אריתמטית נאיבית: התלמיד משתמש באינדוקציה באופן נאיבי, כלומר אינו מכיר את המושג ואת הכוונה, אך כדי להגיע להכללה הוא נותן דוגמה כללית, ממנה מסיק מה האיבר הבא, ומגיע לפתרון כללי של הסדרה ללא הסתמכות על דוגמה מסוימת (איור 6).

איור 6:

מתוך תשובות התלמיד - דף עבודה 1 משימה 1



בשלב השני של המחקר בוצע ניתוח סטטיסטי כדי להשוות את יכולת ההכללה של התלמידים בין ייצוג מספרי לבין ייצוג חזותי-ציורי באמצעות מבחני t. זה אפשר לנו לקבוע אם קיימים הבדלים משמעותיים בנכונות פתרונות המשימות בין שתי צורות הייצוג.

ממצאים

נתייחס לשיטת ההכללה עבור כל רצף על ידי הצגת דוגמאות מעבודת התלמידים. ניתוח ההכללות הראה שתלמידים השתמשו ביותר משלב אחד כדי להגיע להכללה. במילים אחרות, כדי לנסח את ההכללה, התלמידים עברו תהליך שמתחיל בחשיבה אלגברית עובדתית, וחלק מהם המשיכו לחשיבה אלגברית הקשרית.

בתחילה בחנו התלמידים את האלמנטים בכל רצף כדי להבין את אופי הבנייה שלהם, כלומר הם חיפשו תחילה קשר בין אלמנט אחד לזה שלפניו או אחריו. לעומת זאת, לניתוח הייצוג החזותי-ציורי, התייחסו התלמידים למבנה ה"ציורי" שלו (ראו טבלה 1).

טבלה 1:

חשיבה אלגברית עובדתית - זיהוי החוקיות

ייצוג מספרי	ייצוג חזותי-ציורי
יובל: כאן זה גדול ב־1, כאן ב־2, ואז 3 ואז 4. כך הגענו ל־10 (סדרת מספרים משולשיים).	**אלון:** קיים דפוס צורה, הכל כאן שווה וזה כמו האות W האנגלית, אז זה תמיד חוזר על עצמו (סדרה חשבונית).

במילים אחרות, בשלב הראשון התייחסו התלמידים לסדירות עבור שני הרצפים ושני הייצוגים. ההבדל הוא באופן שבו האובייקטים היו קשורים בכל מקרה: לגבי הייצוג המספרי התייחסו התלמידים להבדל בין שני אלמנטים סמוכים, ואילו לגבי הייצוג החזותי-ציורי הם התייחסו למראה החיצוני של כל איבר (האות W, ה־משולשים) ולא תרגמו זאת לייצוג מספרי. חלק מהתלמידים נשארו ברמת הכללה זו, עם מספרים דומים עבור כל רצף אך מספרים שונים עבור כל ייצוג: עבור ייצוג מספרי, כשני שלישים מהתלמידים המשיכו לבנות "נוסחה בפעולה", לעומת כמחצית שהמשיכה לשלב הבא עם הייצוג החזותי-ציורי.

השלב השני של בניית ההכללה הוא יצירת "נוסחה בפעולה". במקרה זה הציעו התלמידים תיאור אופרטיבי כיצד לבנות את האלמנט הבא מקודמו, מעין תיאור 'רקורסיבי' של הרצף, ובתוך כך שימוש במילים ולא באותיות (ראו טבלה 2).



טבלה 2:

חשיבה אלגברית עובדתית - יצירת "נוסחה בפעולה"

ייצוג מספרי	ייצוג חזותי-ציורי
דניאל: כל פעם מוסיפים למספר עוד אחד, עכשיו סתם דוגמה 1 ועוד 2 זה שלוש ולזה נוסיף עוד 3 ואז עוד ארבע ועוד חמש ועוד שש ועוד שבע וככה זה הכפולות (סדרת מספרים משולשיים).	**חן:** קודם מוסיפים 1 למספר ואז 2, 3 ועד אין סוף (סדרת מספרים משולשיים).

כשני שלישים מהתלמידים בכל מקרה (סוג סדרה וסוג ייצוג) נשארו ברמת הכללה זו, ורק שליש התקדמו ליצירת נוסחה עם דוגמה גנרית - בניית נוסחה המבוססת על דוגמה ספציפית שיכולה להיחשב כמקרה כללי (ראו טבלה 3).

טבלה 3:

חשיבה אלגברית הקשרית - יצירת נוסחה עם דוגמה גנרית

ייצוג מספרי	ייצוג חזותי-ציורי
יובל: המספר 73, למשל, אינו שייך לרצף הזה כי הוא מתחלק ב-1 ובעצמו ואי אפשר לקחת אותו כמשהו כפול 4 ועוד 1 (סדרה חשבונית).	**דניאל:** אם אני צריך לדעת את המספר במקום ה־12, אני אכפול 12 ב־4 ואוסיף 1, כי זה בעצם מספרים עם שארית של 1 (סדרה חשבונית).

רמת ההכללה הגבוהה ביותר שנצפתה הייתה תיאור במונחים כלליים, שאליה הגיעו כ־12% מן התלמידים כאשר עבדו על משימה עם סדרה חשבונית בייצוג מספרי. שום תלמיד לא הגיע לרמה זו של הכללה עבור רצף המספרים המשולשיים בייצוג מספרי. אף לא אחד מהם גם הגיע לרמה זו של הכללה עבור שום רצף משני הרצפים בייצוג חזותי-ציורי (ראו טבלה 4).

טבלה 4:

חשיבה אלגברית סטנדרטית - אינדוקציה אריתמטית נאיבית

ייצוג מספרי	ייצוג חזותי-ציורי
נועה: 1 + □ × 4 (סדרה חשבונית). **דניאל:** המקום של המספר 4 ולאחר מכן להוסיף 1 (סדרה חשבונית).	שום תלמיד לא הגיע לרמה זו של הכללה לייצוג זה.

טבלה 5 משקפת את כמויות תשובות התלמידים בנוגע לכל אחת מרמות ההכללה כפי שזוהתה בקרב התלמידים אשר השתתפו במחקר. ניתן לראות כי ברמת ההכללה חשיבה אלגברית עובדתית, בדגש על זיהוי החוקיות, רוב התלמידים הצליחו במשימה אשר יוצגה באופן חזותי-ציורי. בנוגע לרמת ההכללה של יצירת "נוסחה בפעולה" נמצאה תלות במורכבות הסדרה החשבונית, זאת בדומה לרמת ההכללה חשיבה אלגברית הקשרית ברמת דוגמה כללית. נוסף לכך, ברמת ההכללה העוסקת בתיאור במונחים כלליים, ניתן לראות כי רק 11% מהתלמידים הגיעו לרמת הכללה זו, וזאת רק במשימה אחת מבין המשימות ורק בייצוג מספרי.

זאת ועוד, בדיקה סטטיסטית של התוצאות שהתקבלו מלמדת כי לגבי ההתקדמות האריתמטית (סדרה חשבונית) אין הבדלים ניכרים בתהליך יישום החשיבה האלגברית בין שני הייצוגים. במילים אחרות, תהליך הפתרון עובר את אותם השלבים, באותה מידה של הצלחה בקרב התלמידים. לעומת זאת, הבדיקה הסטטיסטית של הרצף האחר (מספרים משולשיים) מראה הבדלים ניכרים: נכונות ההכללה גבוהה יותר לייצוג מספרי ($t(91) = 2.12, p < .05$); זיהוי החוקיות קל יותר לייצוג מספרי ($t(91)=2.24, p < .05$); כתיבת "נוסחה בפעולה" קלה יותר לייצוג מספרי ($t(91) = 4.03, p < .001$). אפשר לראות את רמת ההכללה של התלמידים בטבלה 5.



טבלה 5:
רמת הכללה שזוהתה בקרב התלמידים המשתתפים במחקר

	רמת ההכללה	אחוז התלמידים אשר הגיעו לרמת הכללה של הרצף ... 1; 3; 6; 10		אחוז התלמידים אשר הגיעו לרמת הכללה של הרצף ... 5; 9; 13; 17	
		מספרי	חזותי-ציורי	מספרי	חזותי-ציורי
חשיבה אלגברית עובדתית	**זיהוי חוקיות:** התלמיד יכול להגיד מה האיבר הבא בסדרה בהמשך לאיברים הנתונים במשימה.	86%	91%	93%	100%
	יצירת "נוסחה בפעולה": התלמיד יכול לגלות מה גודלו של איבר מסוים שלא נתון במשימה עצמה.	62%	73%	67%	47%
חשיבה אלגברית הקשרית	**דוגמה כללית:** הנוסחה של התלמיד מבוססת על מקרה מסוים שיכול להיות קשור למקרה כללי.	37%	41%	40%	32%
	תיאור במונחים כלליים: תיאור סדירות בניית סדרה במילים או בסמלים מבלי להסתמך על דוגמה ספציפית.	0	0	11%	0

מסקנות

מחקר זה בדק כיצד מתמודדים תלמידים עם משימות הדורשות הכללה של סדרות חשבוניות המוצגות כדפוסים מספריים וחזותיים-ציוריים. המחקר מצא שתלמידים מסוגלים להתמודד עם משימות מהסוג הזה כבר ברמת בית הספר היסודי. יתרה מכך, המחקר מצא כי ייצוג מספרי יעיל יותר מאשר ייצוג חזותי-ציורי בפתרון משימות, וייתכן שהמורים יצטרכו לספק לתלמידים יותר הדרכה כאשר משימות מוצגות באופן ציורי.

בהתבסס על ממצאי מחקר זה ניתן להציע מספר המלצות מעשיות ודידקטיות למורים בכיתה. האחת, על המורים לחשוף את תלמידיהם לסוגים שונים של סדרות המוצגות בדפוסים ותבניות, הן מספריות והן חזותיות-ציוריות, כדי לפתח את יכולתם לזהות ולהכליל דפוסים. המחקר הראה שתלמידי בית הספר היסודי יכלו להתמודד בהצלחה עם משימות העוסקות בדפוסים. לכן מורים יכולים לשלב משימות מבוססות דפוס בהוראה בכיתה של תלמידים כבר בגיל צעיר. משימות כאלה יכולות להיות מוצגות ברצפים, צורות או מספרים, ויכולות לעזור לתלמידים לפתח את השפה המתמטית ואת יכולות החשיבה שלהם. עם זאת, חשוב לציין שתלמידים עשויים להיות מסוגלים להגיע לרמה גבוהה יותר של הכללה כאשר הם עוסקים ברצפים שהם מכירים. לכן, על המורים לשקול להתחיל ברצפים פשוטים ומוכרים יותר לפני שהם מתקדמים לרצפים מורכבים מאלה. כאשר מלמדים תלמידים על הכללה, התחלה מדפוסים שהם כבר מכירים עשויה להועיל, כמו רצפי מספרים שנותנים את אותה השארית כאשר מחלקים במספר מסוים. זה יכול לעזור לתלמידים להגיע לרמה גבוהה יותר של הכללה ולחבר את הרצף עם תכונות אריתמטיות.

שנית, המורים צריכים להיות מודעים לצורת הייצוג המועדפת על תלמידיהם, בין אם היא מספרית או חזותית-ציורית ולהתאים לכך את שיטת ההוראה שלהם. בדרך כלל קל יותר לתלמידים לפתור משימות המוצגות מספרית ושיעורי ההצלחה בפתרונן גבוהים יותר. ובכל זאת, משימות המוצגות באופן חזותי-ציורי עשויות לדרוש התערבות רבה יותר מצד המורה כדי לעזור לתלמידים להבין ולנתח את הרצף.

שלישית, מורים צריכים להתמקד בטיפוח חוש



למספרים בקרב תלמידיהם. זה כרוך בסיוע לתלמידים להבין את הקשרים בין האיברים ברצף, ואת היכולת להכליל וליצור נוסחאות כדי למצוא איברים במיקומים גבוהים יותר. על ידי ניתוח ההכללות שהתקבלו יחד עם התלמידים, ודיון ביעילות של כל אחת מהן, מורים יכולים להעמיק את הבנתם של תלמידיהם לגבי הקשר בין המספרים ואת הגמישות בעבודה איתם.

המחקר תומך ברעיון שחשיבה אלגברית מתפתחת בשלבים. לכן, על המורים להתייחס לטיפוח החשיבה האלגברית כתהליך הדרגתי, המתבסס על הידע והכישורים הקיימים של התלמיד. זה כרוך בסיוע לתלמידים להכליל רעיונות מתמטיים, לבסס את ההכללות הללו באמצעות טיעונים, ולבטא אותן בדרכים פורמליות יותר ויותר המותאמות לגיל.

לבסוף, מורים צריכים להיות מודעים לשלבי ההתפתחות של החשיבה האלגברית, כפי שהוצע על ידי רדפורד (Radford, 2010). הבנת השלבים השונים תעזור למורים להתאים את ההוראה שלהם במטרה לענות על הצרכים של תלמידיהם ולעזור להם לפתח את החשיבה האלגברית.

ביבליוגרפיה

- Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2005). Helping elementary teachers build mathematical generality into curriculum and instruction. *ZDM*, *37*(1), 34-42.
- Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer Science & Business Media.
- Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*, 3-22.
- Karsenty, R. (2020). Mathematical ability. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 494-497.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 390–419). New York, NY: Macmillan.
- Moss, J., & Beatty, R. (2006). Knowledge building in mathematics: Supporting collaborative learning in pattern problems. *International Journal of Computer-Supported Collaborative Learning*, *1*, 441-465.
- Moyer-Packenham, P. S., & Bolyard, J. J. (2016). Revisiting the definition of a virtual manipulative. *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulative*, 3-23.
- Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.
- Smith, M. S., Hillen, A. F., & Catania, C. L. (2007). Using pattern tasks to develop mathematical understandings and set classroom norms. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *13*(1), 38-44.
- Stacey, K., & Chick, H. (2004). Solving the problem with algebra. *The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study*, 1-20.
- Wijns, N., Torbeyns, J., Bakker, M., De Smedt, B., & Verschaffel, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, *49*, 152-163.
- Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379-402.



מחקר יישומי

פירוק והרכבה בפתרון בעיות גאומטריות במבחני מיצ"ב במתמטיקה

ד"ר ברוריה צובריי-פורת
חוקרת ומרצה
מכללת בית ברל ומכללת לוינסקי



פירוק והרכבה בפתרון בעיות גאומטריות במבחני מיצ"ב במתמטיקה

ברוריה צוברי-פורת

מבוא

פתרון בעיות הוא אחד מהמרכיבים המרכזיים בהוראת המתמטיקה, ומיומנות חיונית לפיתוח חשיבה מתמטית אצל תלמידים. בהקשר של לימודי הגאומטרייה, יכולת פתרון בעיות תורמת להבנת מושגים גאומטריים מורכבים ולפיתוח כלים לניתוח ופתרון בעיות חדשות. מחקרים רבים מצביעים על כך שתלמידים רבים מתקשים בפתרון בעיות גאומטריות, במיוחד כשמדובר בבעיות המחייבות שילוב של ידע מופשט וחשיבה אנליטית (למשל, שפיגל, 2018; Paraskevi & Gagatsis, 2013).

בסוף שנת הלימודים נבחנים תלמידי כיתה ה' בבחינת מיצ"ב במתמטיקה (מיצ"ב - מדדי יעילות וצמיחה בית ספרית). מבחני המיצ"ב במתמטיקה הם מבחני הישגים הבודקים בין היתר, כיצד באים לידי ביטוי התכנים המרכזיים והמיומנויות השונות על פי תוכנית הלימודים והמדיניות של משרד החינוך. המיומנויות הן מגוונות וכוללות, בין השאר, "שימוש באסטרטגיות חשיבה גבוהות" כמו הבנת תהליכים, מעבר בין ייצוגים שונים, יישום ידע נלמד בהקשרים חדשים ועוד (רקע כללי - מיצ"ב חיצוני ופנימי, אתר ראמ"ה, 2024). מיומנויות אלה הן חלק ממיומנויות הלומד במאה ה־21 המקדמות למידה מעמיקה ומשמעותית (The National Academic of Sciences Engineering Medicine, 2015).

מבחני המיצ"ב כוללים בין היתר שאלות בתחום הגאומטרייה. תוצאותיהם מראות כי תלמידים בכיתות ה' נתקלים בקשיים ניכרים בפתרון בעיות גאומטריות, והקשיים הללו לא תמיד קשורים לידע המתמטי, אלא ליכולת ליישם את הידע הזה בפתרון בעיות. מחקר זה מתמקד בניתוח קשיים של תלמידי כיתה ה' בפתרון בעיות גאומטריות מתוך מבחני המיצ"ב, ובתוך כך התמקדות בהבנה ויישום של היוריסטיקות כמו "פירוק והרכבה". מטרת המחקר היא לחשוף את הגורמים המרכזיים לקשיים אלו, ולהציע דרכים לשיפור הוראת הגאומטרייה לשם קידום מיומנויות של פתרון בעיות.

1. רקע תיאורטי למחקר

אחת המיומנויות הנדרשות במבחן מיצ"ב היא **פתרון בעיות** בנושאים שנלמדו (אתר ראמ"ה, 2024). בפתרון חלק מהבעיות במיצ"ב נדרשת פנייה להיוריסטיקות[1] שונות תוך כדי ביצוע בקרה על תהליך פתרונן. המודעות לחשיבות פתרון בעיות במתמטיקה והפיכתה לנושא מרכזי בחינוך מתמטי החלה בשנות השמונים של המאה ה־20 בארה"ב (Schoenfeld, 1985, 1992). בעקבות זאת נערכה רפורמה שכללה שינויים בדרכי הוראת מתמטיקה, והמתמטיקה הפכה ממקצוע שעיקרו שינון פרוצדורות ותרגול למקצוע המתמקד בבניית השערות, חקירת תבניות ובחיפוש אחר פתרונות שונים (NCTM, 1980; Schoenfeld, 1985, 1992).

1.1. פתרון בעיות (Problem solving)

בעשורים האחרונים תופסים אנשי חינוך מתמטי בעולם (CCSSI, 2010 - Common Core State Standards Initiative) **פתרון בעיות** כאחת מן המיומנויות הבסיסיות של המאה ה־21 וכמיומנות חיונית לתפקוד מוצלח בעידן המידע והתקשורת שאנו חיים בו. קוקרופט (Cockroft, 1982) טען ששימוש בפתרון בעיות הוא אמצעי לפיתוח חשיבה מתמטית המשמשת ככלי מעשי בחיי היום־יום ואשר מסייעת במגוון סיטואציות חדשות ובלתי מוכרות.

1. הקריאה "אאוריקה!" שייכת למתמטיקאי יווני מפורסם ארכימדס (287-212 לפנה"ס) ומזוהה עם גילויו של אחד החוקים הפיזיקליים. "אאוריקה!" הוא ביטוי לשמחה כאשר עולה רעיון חדש או נפתרת בעיה מורכבת. לכן אסטרטגיות כלליות לפתרון בעיות נקראות היוריסטיקות.



בפתרון בעיות ישנה חשיבות רבה לתהליכים קוגניטיביים המתרחשים אצל הפותר ולפיתוח כלים ואסטרטגיות.

הואיל וכך, מחקרים בחינוך המתמטי מצאו שיש להתמקד בתהליך פתרון בעיה יותר מאשר בפתרונות עצמם (גירון, 1999; Chung & Krawec, 2014; Tam, 2005). ג'ורג' פויה הציע תהליך לפתרון בעיות מתמטיות הכולל ארבעה שלבים: 1. הבנת הבעיה; 2. תכנון; 3. יישום התוכנית; 4. סקירה אחורנית - אימות, הערכה ובדיקת הפתרון (Polya, 1945, 1957).

שוינפלד (Schoenfeld, 1985, 1992), חוקר בולט בתחום פתרון בעיות, הציע מודל קוגניטיבי לפתרון בעיות מתמטיות. באמצעות המודל ניתן לנתח קשיים של תלמידים על פי ארבעה רכיבים:

1. **משאבים** (Resources) - הידע הנדרש (ידע קודם) המושגי, העובדתי, האלגוריתמי, האינטואיטיבי, הפורמלי והפרוצדורלי שיש לפותר בתחום שבו עוסקת בעיה, והקשרים בין רכיבי ידע בתוך תחום תוכן ובין תחומי תוכן שונים.
2. **היוריסטיקות** (Heuristics) - אסטרטגיות וטכניקות לחיפוש פתרון לבעיה לא מוכרת או מורכבת, לדוגמה: אנלוגיה לפתרון ידוע, בחינת מקרים פרטיים והכללה, "הליכה לאחור", פירוק בעיה לתת־בעיות, מעבר בין ייצוגים שונים, בניית עזר לבעיה נתונה, ועוד.
3. **בקרה** (Control) - מודעות הפותר לתהליך הפתרון של עצמו, פעולות כגון: תכנון, קבלת החלטות, הערכה, פירוט של נכונות הפתרון ויעילותו.
4. **אמונות** (Beliefs) - אמונות של הפותר על אודות המתמטיקה ועל יכולותיו: כיצד לגשת לבעיה, כיצד להוכיח, כיצד יש לבצע בקרה ועוד.

במחקר זה בחרנו להתרכז ברכיב "היוריסטיקות".

1.2. היוריסטיקות בפתרון בעיות

חקר ההיוריסטיקות שואף להבין את תהליך פתרון הבעיות, ובייחוד את האופרציות המנטליות אשר טיפוסיות בתהליך זה, במטרה ללמוד על תהליכים אשר אינם תלויים בתחום התוכן, וניתנים ליישום בכל סוגי הבעיות (Polya, 1945). זיהוי התנהגויות היוריסטיות אפקטיביות של תלמידים ואיתור קשיים ביכולת יישום היוריסטיקות עשויים לתרום באופן משמעותי לתהליך ההוראה ולפיתוח תוכניות לימודים מתאימות.

היוריסטיקות הן אסטרטגיות כלליות המתאימות למגוון בעיות ואינן תלויות בנושא מסוים (Anderson, 1985; Schoenfeld, 1985, 1992). פויה מונה מספר היוריסטיקות שבאמצעותן חקר את תהליך פתרון בעיות, ובמיוחד את האופרציות המנטליות המאפיינות תהליך זה (Polya, 1945, 1957). מטרתו ככלל, ללמד על תהליכים שאינם תלויים בתחום התוכן ושניתן ליישמם בכל סוגי הבעיות. ההיוריסטיקות העיקריות הן: חיפוש אינדוקטיבי; הכללה; אנלוגיה; רדוקציה; פירוק והרכבה; מעבר בין ייצוגים שונים/המחשה; הליכה לאחור; בניית עזר. נתייחס בהרחבה לשתיים מההיוריסטיקות: פירוק והרכבה והליכה לאחור, אשר את השימוש בהן בפתרון בעיות גאומטריות בחנו במסגרת המחקר.

מחקרים קודמים על אודות היוריסטיקות חקרו קשיי תלמידים בשימוש בהיוריסטיקות בנושאים מתמטיים שונים בקרב תלמידי חטיבות ביניים, תיכון, סטודנטים ופרחי הוראה. נחקרו קשיי תלמידים בשימוש בהיוריסטיקה "פירוק והרכבה" בפתרון בעיות גאומטריות (לחמי, 2009; שפיגל, 2018); קשיים בשימוש בהיוריסטיקה "היסק לאחור" בפתרון בעיות שגרתיות פחות במתמטיקה בקרב פרחי הוראה (וולפוביץ, 2004; שפיגל, 2006). לא נערך מחקר שבחן קשיי תלמידים בפתרון בעיות מיצ"ב בבחינת השימוש בהיוריסטיקות "פירוק והרכבה" ו-"הליכה לאחור" בקרב תלמידי כיתה ה' (כיתות היסוד). מחקר זה בוחן קשיים אלו.

שוינפלד ציין שהוראה המבוססת על תיאור דרכים שונות ליישום אסטרטגיות והמאמנת תלמידים לבחור אסטרטגיה מתאימה מבין אוסף אסטרטגיות, מאפשרת להטמיע שימוש באסטרטגיות שנלמדו על מגוון בעיות ותחומי תוכן (Schoenfeld, 1985). שתי

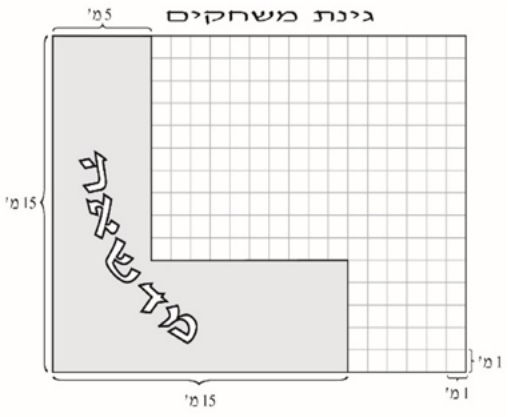
היוריסטיקות מרכזיות בפתרון בעיות גאומטריות הן: פירוק והרכבה והליכה לאחור.

אחד הנושאים המרכזיים בתוכנית הלימודים במתמטיקה בבית הספר היסודי הוא גאומטרייה, והוא נתפס כאחד החשובים והמורכבים ביותר מבין התחומים המתמטיים השונים (Hoffer, 1981, 1983; Arcavi, 2003; Zhang, Ding, Stegall, & Mo, 2012 אצל Rivella et al., 2021).

1.2.1. היוריסטיקה "פירוק והרכבה" בפתרון בעיות גאומטריות

ההיוריסטיקה **פירוק והרכבה** היא אסטרטגיה לפתרון בעיות שבה מפרקים את הצורה לחלקים קטנים יותר (פירוק), ובמידת הצורך מרכיבים את פתרונה מן החלקים המצומצמים (הרכבה). להלן דוגמה לבעיה גאומטרית מתוך שאלון מיצ"ב תשע"ז (נוסח א') של כיתה ה', ואשר בפתרונה מתאים להשתמש בהיוריסטיקה פירוק ו/או הרכבה (איור 1). הבעיה עוסקת בחישוב שטח של מצולע כללי:

איור 1:



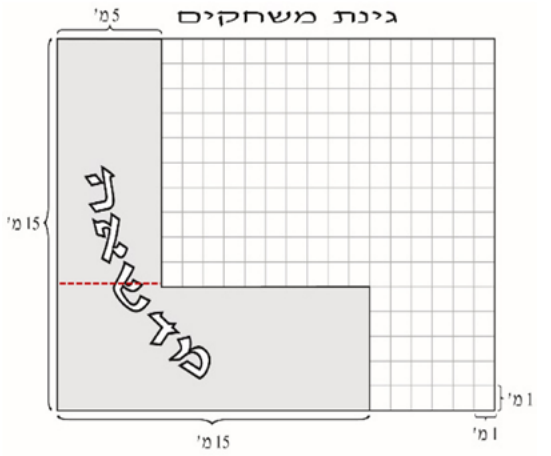
לפניכם סרטוט מוקטן של גינת משחקים בצורת מלבן ובתוכה מִדשאה.

א. מה השטח של המדשאה? הַציגו את דרך הפתרון.

תשובה: _____ מ"ר.

אחת הדרכים לפתרון בעיה זו היא באמצעות היוריסטיקה **פירוק והרכבה**.

איור 2:



נדגים את אחד הפירוקים האפשריים:

שלב I - פירוק המשושה לשני מלבנים באמצעות בניית עזר (איור 2).

שלב II - חישוב השטח של כל אחד מהמלבנים.

שלב III - הרכבה מחדש על ידי חישוב סכום שטחי המלבנים שחושבו בשלב II.

בפתרון הבעיה ישנו **פירוק** נוסף של צלע שאורכה 15 מ' לשני קטעים של 5 מ' ו־10 מ' אשר כל אחד מהם הוא צלע באחד מהמלבנים. נוסף לכך, הבעיה מזמנת שילוב היוריסטיקה נוספת: **בניית עזר** של סרטוט קטע לצורך **פירוק** המשושה הנתון (הקטע האדום באיור 2).

על פי נתוני ראמ"ה, 43.9% מהתלמידים בשנת תשע"ז **שגו** בפתרון הבעיה, 2.9% לא השיבו עליה, 7.2% ענו חלקית ו־46% השיבו נכונה (ראמ"ה, 2024).

היוריסטיקה נוספת שבאה לידי ביטוי בפתרון בעיות גאומטריות בשאלוני מיצ"ב של כיתה ה' היא ההיוריסטיקה **הליכה לאחור**. בהיוריסטיקה זו מתחילים לפתור את הבעיה מן הסוף (מן המטרה, ממה שצריך לחשב/לבנות) אל ההתחלה (נקודת המוצא).

ההיוריסטיקה הליכה לאחור כוללת מספר רכיבים:

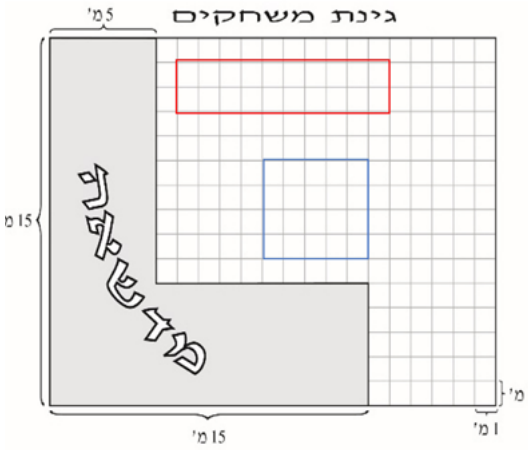
1. יכולת לחשוב על המטרה כנקודת מוצא.
2. יכולת להכיר ברלוונטיות שבהפיכת פעולות אריתמטיות בסיסיות לפעולות ההפוכות להן.



3. היכולת לקשר את המצב הסופי של מערכת נתונה למצבים הקודמים לו.
4. היכולת לבצע היקש לאחור בצעדים.
5. היכולת לבצע הכללה של תהליך ההליכה לאחור (וולפוביץ, 2004; שפיגל, 2006).

גול טען כי יכולת החשיבה לאחור אינה מולדת ולכן חשוב להקנותה (Gole, 2003). שליטה בשיטה תהווה כלי נוסף לפתרון בעיות ותתרום לביטחון עצמי ולחשיבה יצירתית בעת חיפוש פתרונות לבעיות שאינן מוכרות. בפתרון בעיות גאומטריות בשאלוני מיצ"ב לרוב נדרש שימוש בהיוריסטיקה הליכה לאחור בשילוב עם פירוק ו/או הרכבה. נדגים את השימוש בהיוריסטיקה הליכה לאחור בפתרון סעיף ב'1 והרכבה בסעיף ב'2 לבעיה שהוצגה לעיל. סעיף ב' עוסק בתכונות מלבן וחישוב שטח (איור 3):

איור 3:



ב. באזור שאין בו מדשאה מתכננים להקים בריכת דגים בצורת **מלבן בשטח של 20 מ"ר**.

1. כִּתבו הצעה לאורכי הצלעות של בריכת הדגים, כך שיתאימו למידות שבסרטוט.
   אורך צלע אחת _____ מ',
   ואורך הצלע הסמוכה לה _____ מ'.
2. **סַרטטו** בתוך הסרטוט של גינת המשחקים את בריכת הדגים לפי המידות שהצעתם.
3. מה היקף בריכת הדגים שהצעתם?

תיאור תהליך פתרון לסעיף ב'1:

שלב I - התלמיד נדרש לחפש שני מספרים שמכפלתם 20. כל אחד מהם מייצג צלע במלבן (שתי צלעות סמוכות). שימוש בהיוריסטיקה **הליכה לאחור** מתבטא בבניית מלבן על פי "מספר מטרה" - שטח של 20 מ"ר;

שלב II - הרכבה של מלבן באמצעות סרטוט שתי צלעות סמוכות. באיור 3 מוצגות שתי האפשרויות: מלבן אדום 2×10 ומלבן כחול 4×5.

על פי נתוני ראמ"ה, 24.4% מהתלמידים בשנת תשע"ז **שגו** בפתרון סעיף ב'1 של הבעיה, 4.1% לא השיבו עליה, ו־71.5% השיבו נכונה (ראמ"ה, 2024).

1.3. קשיי תלמידים בפתרון בעיות גאומטריות בבחינות מיצ"ב

שליש מהבעיות המוצגות במבחנים ארציים (מבחני מיצ"ב ומבחני מפמ"ר) ובין־לאומיים (מבחני PISA ומבחני TIMSS) הן בעיות גאומטריות. ממצאי מבחנים אלה חושפים אחוזי הצלחה נמוכים יחסית בתחומים אלו (ראמ"ה, 2024) לעומת תחומים אחרים (למשל, פעולות במספרים טבעיים).

1.3.1. קשיים במשאבים

מחקרים שעסקו בפתרון בעיות בגאומטרייה ובמדידות (למשל: כהן, 2007; Deliyianni et al., 2010; Huang, 2015; Tan Sisman & Aksu, 2016), בקרב תלמידי בית הספר היסודי, תלמידי חטיבות הביניים (למשל: לחמי, 2009; שפיגל, 2018; Chappell & Thompson, 1999) ותלמידי התיכון (למשל: Chinnappan, 1998; Machaba, 2016) חשפו קטגוריות שונות של יכולות של תלמידים בניווט, בהפקת מידע ובניצול יעיל של **משאבים**. הם הצביעו על תפיסה מצומצמת של סכֵמות גאומטריות (למשל, זיהוי צורות גאומטריות, טרנספורמציה של צורות), שימוש חלקי **במשאבים** (למשל, תפיסת המושגים אורך ושטח) וידע קונספטואלי חסר או חלקי בתהליך פתרון בעיות (למשל, קשר בין גובה משולש לשטחו).



כידוע, ישנן בעיות גאומטריות משני סוגים: בעיות חישוב ובעיות הוכחה. נתמקד בקשיים הנובעים מתכונות מרחביות של גאומטרייה בבעיות חישוב. לצורות גאומטריות יש בו זמנית שני היבטים: היבט מושגי והיבט צורני. ההיבט המושגי של צורות נובע מכך שהן מבטאות רעיון כללי, מופשט, שמשמעותו נקבעת על פי ההגדרה. ההיבט הצורני נובע מהתכונות המרחביות שהצורות מייצגות (Fischbein, 1993). שילוב בין הפן המושגי לפן הצורני בתהליך פתרון בעיות גאומטריות מבטא מצב אידיאלי.

הקושי **בהיבט המושגי** משתקף בתופעת ה"אב טיפוס" (Prototype). רכישת המושג תלויה בהיווצרות דימוי מושג (Concept Image). דימוי מושג הוא קבוצה של תכונות, קשרים ותמונות המייצגים את המושג במוחו של הפרט. הוא נרכש בהתנסויות, ויכול להתאים להגדרת המושג באופן מלא, חלקי או מנוגד לה (Hershkowitz & Vinner, 1983). בגאומטרייה יש לכל מושג לפחות דוגמה טיפוסית אחת הנרכשת ראשונה בלימוד המושג, ולכן קיימת לרוב בדימוי המושג. הדוגמאות הטיפוסיות הן, בדרך כלל, תת־קבוצה בקבוצת הדוגמאות של המושג. קשיים נוצרים כאשר משתמשים באב טיפוס לצורך בחינת הדוגמאות האחרות תחת להשתמש בהגדרת המושג (Bishop, 1986).

דוגמאות לקושי **בהיבט הצורני** ניתן לראות במחקריו של דובל (Duval, 1995, 1998, 1999) שבחן, בין השאר, את השימוש בפירוק ויזואלי של צורות. הוא מתייחס לגורמים מסייעים ומעכבים את זיהוי התת־צורות. למשל, קשה יותר לאתר פירוק של צורה גאומטרית לתת־צורות כאשר התת־צורות אינן משלימות לצורה מוכרת. חוקרים נוספים (דבורה, 2003; לחמי, 2009) שבחנו קושי זה - יכולת התלמידים להבחין ב"חלקים מול השלם", מצאו כי הקושי העיקרי בפירוק רלוונטי של סרטוט טמון באי־זיהוי הפוטנציאל שבפירוק צורה או מבנה לתת־צורות או מבנים מוכרים (צורות המרכיבות אותה), גם כאשר ישנם גורמים המסייעים לזהות את הפירוק הנדרש.

הקשיים שתוארו בהיבט הצורני ובהיבט המושגי בגאומטרייה וקשיים בהבנת מושגים גאומטריים כפי שהתבטאו במחקרים קודמים מתייחסים לקשיים ב"משאבים" של תלמידים בתהליך פתרון בעיות (רכיב ראשון בפתרון בעיות על פי המודל הקוגניטיבי של שוינפלד). קשיים בשימוש בהיוריסטיקות בתהליך פתרון בעיות (רכיב שני בפתרון בעיות על פי המודל הקוגניטיבי של שוינפלד) לא נבחנו בגאומטרייה בקרב תלמידי בית ספר יסודי.

ממצאים מתוך מבחני המיצ"ב ב־13 השנים האחרונות (תשס"ב - תשע"ד) מעידים על אחוז שגיאות הנע בין 20% ל־70% בפתרון בעיות גאומטריות שבהן נדרשת פנייה להיוריסטיקה פירוק והרכבה. אחוזי ההצלחה הנמוכים בפתרון בעיות אלו מעידים על מיומנות חלקית של התלמידים בשימוש בהיוריסטיקות. שליטה במגוון רחב של היוריסטיקות היא אחד הרכיבים המהותיים המובילים להצלחה בפתרון בעיות (למשל: עובדיה, 2017; רייזמן־דן, 2023; Koichu, Berman & Moore, 2004; Martinez, 1998; Schoenfeld, 1985, 1992).

1.3.2. קשיים בהיוריסטיקות

חוקרים הצביעו על קשיי תלמידים בשימוש בהיוריסטיקה **פירוק והרכבה** בפתרון בעיות בגאומטרייה ובמדידות (למשל: לחמי, 2009; שפיגל, 2018; Paraskevi & Gagatsis, 2013). הקשיים במחקרים אלה הוסברו בהתייחס לתאוריה של דובל (Duval, 1995, 1998, 1999) בנוגע לתפיסות ויזואליות של צורה - קושי בהיבט צורני וביכולת תפיסה אופרטיבית.

2. מערך המחקר

מטרת המחקר הייתה לאפיין את הקשיים של תלמידי כיתה ה' בפתרון בעיות גאומטריות מתוך שאלון מיצ"ב, לנתח אותם על פי שלושה מודלים: המודל הקוגניטיבי של שוינפלד (Schoenfeld, 1985, 1992), מודל הידע הפרוצדורלי והקונספטואלי של היברט ולפבר (Hiebert & Lefevre, 1986) ומודל התפיסה הוויזואלית של דובל (Duval, 1998), ולבחון את



הסיבות האפשריות להם.

אוכלוסיית המחקר: 90 תלמידי כיתה ה' משני בתי ספר יסודיים ממרכז הארץ. התלמידים למדו עם מורים שונים והיו בעלי הישגים לימודיים שונים (אוכלוסיית המחקר לא כללה תלמידים משולבים או לקויי למידה).

כלי המחקר: כלי המחקר הוא מבחן מיצ"ב נוסח א' תשע"ב שכלל 37 בעיות: 15 מתוכן (כ־40%) הן בעיות אשר בפתרונן מתאים לפנות להיוריסטיקה פירוק והרכבה לעיתים בשילוב היוריסטיקה נוספת (הליכה לאחור או מעבר בין ייצוגים). בעיות אלה נותחו וחולקו לשלושה נושאים מתמטיים על פי המשאבים הנדרשים בפתרונן: חמש בעיות בגאומטרייה, ארבעה ביטויים אריתמטיים ושש בעיות בצורות ייצוג שונות. בכל הבעיות פרט לאחת משולבת היוריסטיקה נוספת של הליכה לאחור או מעבר בין ייצוגים, או שתיהן.

נוסף לשאלון המחקר נערכו ראיונות אישיים עם 15 תלמידים.

מהלך המחקר: התלמידים התבקשו לענות על שאלון מיצ"ב תשע"ב בפרק זמן של כ־90 דקות. פתרונות התלמידים נותחו, מהם מופו הפתרונות השגויים.

בעקבות ניתוח הפתרונות השגויים התקיימו ראיונות אישיים עם 15 תלמידים שביטאו קושי בפתרון הבעיות. הקשיים שנחשפו בתחום הגאומטרי נותחו על פי שלושת המודלים, כאמור לעיל.

במאמר זה נדון בממצאים ובקשיים שבאו לידי ביטוי בפתרון חמש הבעיות הגאומטריות. חמש הבעיות מאופיינות בהיותן מזמנות פתרון באמצעות ההיוריסטיקה פירוק והרכבה, ובחלקן נדרש שילוב של היוריסטיקה נוספת (הליכה לאחור, בניית עזר).

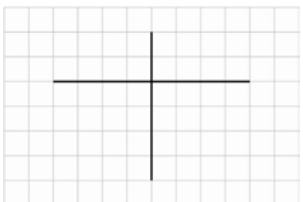
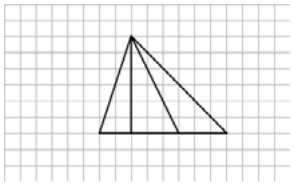
3. ממצאים

ניתוח השגיאות הראה כי מרבית הקשיים נבעו ממיומנות מצומצמת או חסרה בשימוש בהיוריסטיקות פירוק או הרכבה והליכה לאחור או שתיהן ובהבנה קונספטואלית חלקית של מושגים גאומטריים ותכונות של צורות.

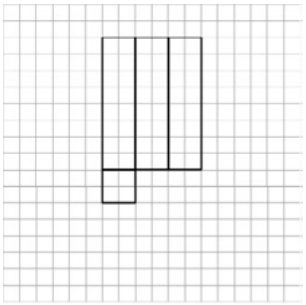
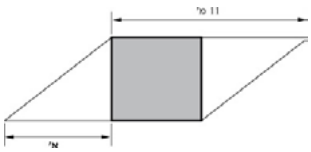
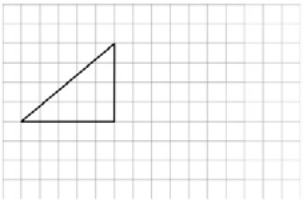
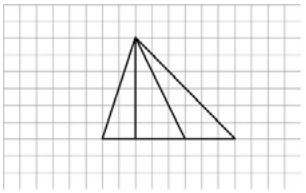
בטבלה 1 מוצגות חמש הבעיות הגאומטריות שפתרו התלמידים ואשר פתרונותיהן נותחו, אחת מהן כוללת שני סעיפים (23א', 23ב'). הבעיות מוצגות בטבלה על פי סדר - מאחוז ההצלחה הגבוה ביותר בפתרון הבעיה לאחוז ההצלחה הנמוך ביותר.

טבלה 1:

הצגת הבעיה, תיאורה ומאפייניה ואחוז ההצלחה בפתרון הבעיה

מספר בעיה במבחן מיצ"ב	תיאור הבעיה	מאפייני הבעיה		אחוז הצלחה
		משאבים (מושגים)	היוריסטיקות	
בעיה 1 (בעיה מס' 4 במיצ"ב)	הקטעים המסורטטים לפניכם הם אלכסוני מרובע. סרטטו את צלעות המרובע. 	אלכסון במרובע	הרכבה והליכה לאחור	92%
בעיה 2 (בעיה מס' 23א' במיצ"ב)	צִבעו בסרטוט משולש קהה זווית. 	תכונות משולשים	פירוק	89%



בעיה 3 (בעיה מס' 21 במיצ"ב)	לפניכם חלק מפריסה של תיבה שחסרות בה שתי פאות. הוסיפו את הפאות החסרות כך שתתקבל פריסה של תיבה.		פריסת תיבה	פירוק והרכבה	64%
בעיה 4 (בעיה מס' 26 במיצ"ב)	לפניכם סרטוט מוקטן של מקבילית ובתוכה ריבוע. שטח הריבוע 25 מ"ר (מטר רבוע). מה אורך הקטע המסומן באות א'?		תכונות מקבילית וריבוע, מדידות אורך	פירוק והליכה לאחור	53%
בעיה 5 (בעיה מס' 25 במיצ"ב)	סרטטו משולש חד־זוויות ששטחו שווה לשטח המשולש שבסרטוט.		גובה במשולש ושטח משולש	פירוק והרכבה הליכה לאחור	43%
בעיה 6 (בעיה מס' 23ב' במיצ"ב)	ב. צִבעו בסרטוט משולש ישר זווית שהוא גם שווה שוקיים.		תכונות משולשים	פירוק והרכבה	19%

שתי הבעיות הראשונות שיוצגו מתוך חמש הבעיות הגאומטריות מאופיינות בשלב אחד של פתרון. אחריהן יוצגו שלוש בעיות שהתאפיינו בשני שלבים של פתרון, ושמשלבות היוריסטיקה הליכה לאחור עם פירוק והרכבה. פתרונות התלמידים ששגו דורגו על פי שתי רמות:

רמה א' - הרמה הנמוכה ביותר שאליה שויכו תלמידים אשר ביטאו קושי בשלב הראשון של פתרון הבעיה - שימוש בפירוק ו/או הרכבה.

רמה ב' - שאליה שויכו תלמידים אשר ביטאו יכולת חלקית בשימוש בהיוריסטיקה פירוק ו/או הרכבה, וביטאו קושי בתמרון עם היוריסטיקה הליכה לאחור.

ממצאי המחקר חשפו קשיים של תלמידים שהתבטאו בשלושה מרכיבים קוגניטיביים:

1. קושי בפירוק של צורה לתת־צורות.
2. קושי בהרכבה של צורה מתת־צורות או מרכיב נתון שהוא חלק ממנה בשילוב עם היוריסטיקה הליכה לאחור.
3. קושי ביכולת לבצע ויזואליזציה לצורות במישור או לגופים במרחב.

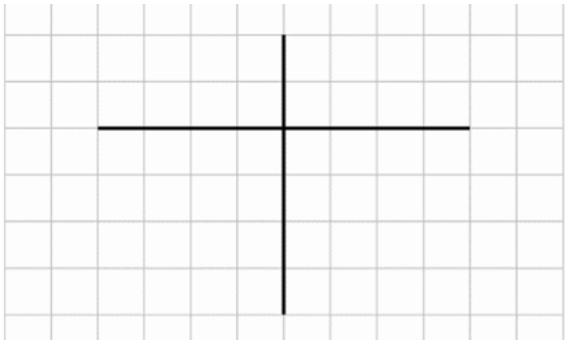
הממצאים שעלו לגבי כל אחת מהבעיות יוצגו על פי סדר הצגתן בטבלה 1 מהבעיה הפשוטה ביותר למורכבת יותר - מהבעיות שאחוז השגיאות בפתרונן היה הנמוך ביותר לבעיות שאחוז השגיאות בפתרונן היה הגבוה ביותר.



3.1. בעיה מס' 1

(בעיה 4 מתוך מבחן המיצ"ב תשע"ב):

איור 4:

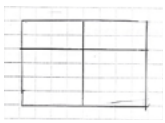


הבעיה: הקטעים המסורטטים לפניכם הם **אלכסוני מרובע.** סרטטו את צלעות המרובע (איור 4).
פתרון הבעיה מְזַמֵּן פנייה להיוריסטיקה **הרכבה** בשילוב **הליכה לאחור**.
מאפיין ההרכבה: סרטוט ארבעה קטעים שיהוו צלעות מרובע ששני הקטעים הנתונים יהוו את אלכסוניו (איור 4א'). 8% מהתלמידים שגו בפתרון הבעיה. **האתגר** בפתרון הבעיה הוא במוטיב ההליכה לאחור: בדרך כלל נתון מרובע, ויש לסרטט את שני אלכסוניו. בבעיה זו נתונים שני אלכסונים ויש לסרטט את צלעותיו. התלמידים ששגו ביטאו קושי בהבנה קונספטואלית של המושג אלכסון (משאבים) ובשילוב היוריסטיקות הליכה לאחור עם הרכבה. באיורים 5 ו־6 דוגמאות לפתרונות שגויים של תלמידים.

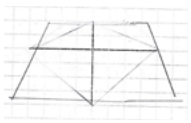
איור 4א':

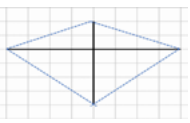
פתרון הבעיה

איור 5:



איור 6:



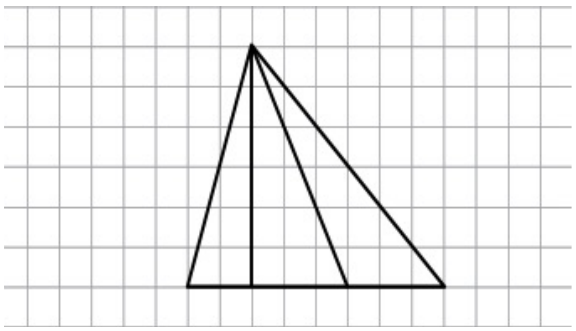


עדות לקושי בקטע מריאיון עם תלמיד ששגה: "*אני יודע מה זה אלכסון אבל לא ידעתי איך לסרטט את המרובע שהקווים האלו יהיו האלכסונים שלו*" (איור 6). עדות זו מבטאת קושי בהיבט המושגי - הבנה קונספטואלית חלקית של מושג האלכסון.

3.2. בעיה 2

(בעיה מס' 23 סעיף א' מתוך מבחן המיצ"ב תשע"ב):

איור 7:



בעיה: צְבעו בסרטוט משולש קהה זווית.
פתרון הבעיה מְזַמֵּן זיהוי משולשים על פי תכונותיהם מבין משולשים שונים שבסרטוט (איור 7).
המאפיין את פתרון סעיף א' של הבעיה (איור 8) הוא **פירוק**: פירוק של המשולש הנתון לשלושה משולשים אשר אחד מהם (משולש ימני (כחול) באיור 8) עונה על דרישות הבעיה. בפתרון זה שגו 11% מהתלמידים. תלמידים אלה ביטאו קושי בפירוק צורה (משולש) לתת־צורות (שלושה משולשים המרכיבים את המשולש "הגדול"). קושי זה נבע מיכולת חלקית לזהות משולש קהה זווית כחלק ממבנה/סרטוט (זיהוי חלק ממבנה 'שלם').

איור 8:

פירוק משולש לשלושה משולשים - פתרון סעיף א'



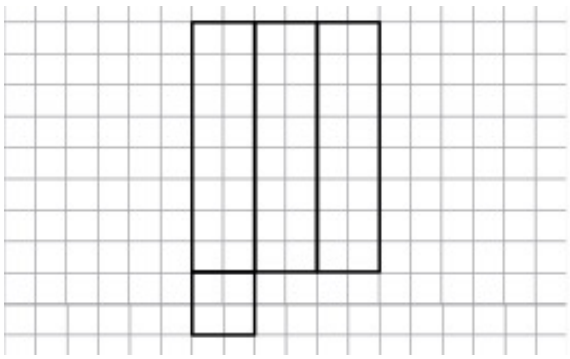
שלוש הבעיות הבאות מאופיינות בשימוש בהיוריסטיקה פירוק והרכבה בשילוב עם היוריסטיקה הליכה לאחור. פתרון בעיות אלה כולל שני שלבים.



3.3. בעיה 3

(בעיה מס' 21 מתוך מבחן המיצ"ב תשע"ב):

איור 9:

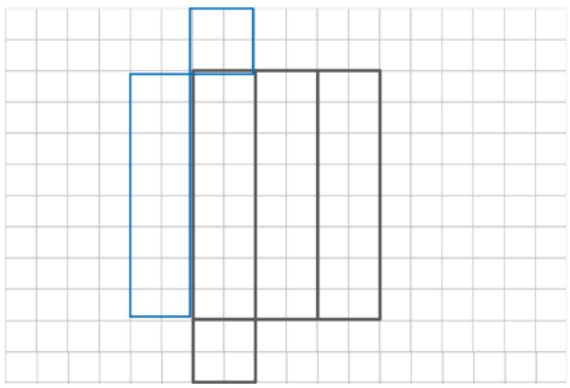


הבעיה: לפניכם חלק מפריסה של תיבה שחסרות בה שתי פאות. הוסיפו את הפאות החסרות כך שתתקבל פריסה של תיבה.

פתרון הבעיה מְזַמֵּן פנייה להיוריסטיקה **פירוק והרכבה** בשילוב היוריסטיקה **הליכה לאחור** (איור 9).

איור 9א':

דוגמה לפתרון הבעיה



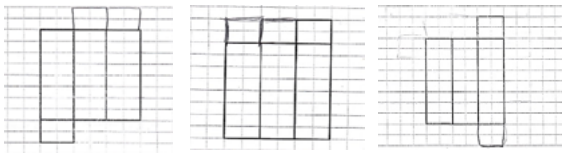
מאפיין הפירוק: ביצוע ויזואליזציה לגוף תלת־ממד (תיבה) לשש פאותיו באופן שתתקבל פריסתו. לאחר מכן הרכבת הפאות החסרות בסרטוט המוצג בדו־ממד. בהשלמת הפאות החסרות על התלמיד להקפיד על גודלן ומיקומן הנכון בסרטוט הקיים (איור 9א').

36% מהתלמידים שגו בפתרון הבעיה. **האתגר** בפתרון הבעיה מורכב משני מרכיבים:

1. **פירוק** תיבה לשש פאות הטומן בחובו יכולת ביצוע ויזואליזציה, כלומר מעבר מגוף תלת־ממד לצורה בדו־ממד.
2. **הרכבת** החלקים המפורקים במיקום ובגודל הנכונים כך שתתקבל פריסת נכונה של תיבה.

קושי בפירוק תיבה (גוף תלת־ממד) לחלקיה, ולאחר מכן בהרכבה של החלקים החסרים בגודל ובמיקום הנכונים כך שתתקבל צורה דו־ממדית (פריסה של התיבה) נובע מקושי בוויזואליזציה. עדויות לקשיי התלמידים באיורים 10-12:

איור 10: **איור 11:** **איור 12:**



באיור 10 מתוארת השלמה חלקית של חלקי התיבה. עדויות נוספות בקטעי ראיונות שהתקיימו עם שניים מהתלמידים ששגו:

תלמיד א': *"לא הצלחתי לדמיין את התיבה כשאני פותח אותה... לא הצלחתי לראות את החלקים שלה בדמיון ולסרטט את זה... לא יודע למה.. היה לי קשה".*

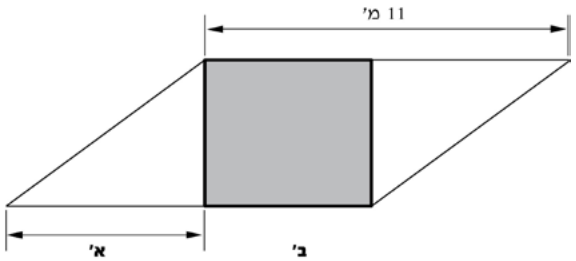
תלמידה ב': *"ניסיתי לדמיין את התיבה נפתחת וככה סרטטתי. היה לי קשה להחליט איפה לשים כל חלק בסרטוט".*

באיורים 11 ו־12 מתוארות השלמות של חלקים "עודפים" ומיקומם בסרטוט אינו נכון.

3.4. בעיה 4

(בעיה מס' 21 מתוך מבחן המיצ"ב תשע"ב):

איור 13:





הבעיה: לפניכם סרטוט מוקטן של מקבילית ובתוכה ריבוע. שטח הריבוע 25 מ"ר.
מה אורך הקטע המסומן באות א'?

פתרון הבעיה מְזַמֵּן פנייה להיוריסטיקה **פירוק והרכבה** ותמרון באמצעות **הליכה לאחור** (איור 13). בבעיה התלמיד מתבקש למצוא את קטע א' במקבילית הנתונה. ניתן לחלק את תהליך הפתרון לשני שלבים:

1. **שלב I:** למציאת אורך צלע ריבוע יש לבצע **פירוק** של השטח השווה ל־25 מ"ר ל־5 מ' × 5 מ'. **האתגר** בשלב זה הוא בפנייה להיוריסטיקה **הליכה לאחור**: 25 = __ × __. תלמיד שמבטא יכולת לפנות להיוריסטיקה הליכה לאחור ימצא שאורך קטע ב' שווה ל־5 מ'.
2. **שלב II:** בשלב זה יש לבצע **פירוק** נוסף של צלע המקבילית שאורכה הנתון 11 מ'. אחת מתכונותיה של מקבילית היא שכל שני זוגות של צלעות נגדיות שוות זו לזו, מכאן שסכום הקטעים א' ו־ב' הוא 11 מ' (איור 13). קטע ב' הוא צלע הריבוע ששווה 5 מ' (התקבל בשלב I). **האתגר** הוא בפנייה להיוריסטיקה **הליכה לאחור** במציאת ההפרש בין צלע המקבילית לקטע ב' המהווה חלק ממנה: 6 = 5 - 11.

כמחצית מהתלמידים (47% מהתלמידים) שגו בפתרון הבעיה. קבוצה זו מתחלקת לשתי רמות:

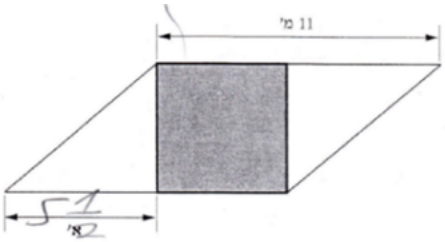
רמה א' - הרמה הנמוכה יותר, שאליה שויכו תלמידים ששגו בשלב הראשון בתהליך הפתרון.

רמה ב' - תלמידים ששגו בשלב השני בתהליך הפתרון.

רמה א' - כ־34% מהתלמידים ששויכו לרמה זו ביטאו קושי בפנייה להיוריסטיקה פירוק והרכבה. תלמידים אלה ביססו את פתרונם על מדידה עם סרגל, ניחוש או מראית עין. באיור 14 מתואר שהתלמיד חישב את אורך קטע א' כמחצית מצלע המקבילית אשר אורכה הנתון הוא 11 מ'. התייחסותו של התלמיד למחצית מהצלע התבססה על ויזואליות ולא על חישוב אריתמטי המתבקש מתהליך פתרון הבעיה.

איור 14:

פתרון הבעיה של תלמיד ברמה א'



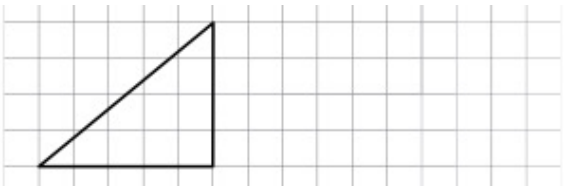
עדויות נוספות בקטעי ראיונות עם שלושה תלמידים: **תלמיד (א')** - *"ניחשתי"*; **תלמיד (ב')** - *"עשיתי לפי העין"*; **תלמיד (ג')** - *"נראה לי שזה חצי מה-11 אז כתבתי 5.5 מטר"* (איור 14).

רמה ב' - כ־13% מהתלמידים ששויכו לרמה זו ביטאו יכולת לבצע פירוק של שטח הריבוע ומציאת אורך צלעו (שלב I בתהליך הפתרון). עם זאת, תלמידים אלה ביטאו קושי בפירוק צלע המקבילית בשילוב הליכה לאחור (שלב II בתהליך הפתרון). תהליך פתרונם היה חלקי, והם רשמו את צלע הריבוע כתשובה לבעיה.
עדות לכך בקטע ריאיון עם תלמיד: *"ראיתי ששטח הריבוע הוא 25, אז שאלתי את עצמי, מה כפול מה שווה 25, כדי לדעת מה הצלעות של הריבוע. זה חמש. אז כתבתי שזה חמש"*.
תלמידים ברמה זו ביטאו מיומנות חלקית בשימוש בהיוריסטיקה פירוק והרכבה. הם התעלמו מנתון צלע המקבילית (11 מ') כנתון הכרחי לפתרון הבעיה, והסתפקו בפירוק שטח הריבוע בלבד. הם לא פירקו את צלע המקבילית בשילוב עם הליכה לאחור (11 = __ + 5).

3.5. בעיה 5

(בעיה מס' 25 מתוך מבחן המיצ"ב תשע"ב)

איור 15:





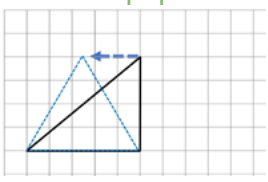
הבעיה: סרטטו משולש חד־זוויות ששטחו שווה לשטח המשולש שבסרטוט.

פתרון הבעיה מְזַמֵּן פנייה להיוריסטיקה **פירוק והרכבה:** בפתרון הבעיה מתאים לבצע **פירוק** של המשולש הנתון לגובה ובסיס, ומשני מרכיבים אלו **להרכיב** משולש אחר: חד־זוויות (איור 15). **האתגר** בבעיה הוא בבחינת יכולת ההבנה הקונספטואלית של התלמידים את המושג "שטח משולש". לָרוב התלמידים רגילים לחשב שטחי משולשים שונים בהינתן גובה ובסיס. בבעיה זו נדרשים התלמידים לסרטט על רשת משבצות משולש אחר תוך כדי שימוש בגובה ובבסיס הידועים על פי המשולש הנתון.

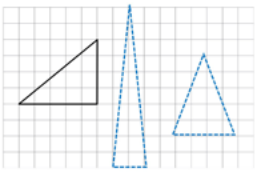
בפתרון בעיה זו תיתכנה שתי דרכים:

1. דרך פתרון אלגנטית שעל פיה התלמיד "מזיז"/"מחליק" ויזואלית את גובה המשולש הנתון לכיוון שמאל עד ארבע משבצות, ומחבר את קצה הגובה לשני קצוות הבסיס, כך שיתקבל משולש חד־זוויות (איור 15א'). דרך זו מעידה על הבנה קונספטואלית של הקשר בין שטח המשולש לגובה ולבסיס ולהבנה קונספטואלית של המושג גובה ותכונות של מַקְבִּילוּת (איור 15א'). דרך זו **לא נקט שום תלמיד**.
2. דרך פתרון שנייה היא באמצעות חישוב והיא כוללת שלושה שלבים: פירוק שטח המשולש לגובה ובסיס; חישוב שטח המשולש הנתון; הרכבה של משולש חד־זוויות תוך כדי שימוש בהליכה לאחור. דרך זו מורכבת יותר כיוון שהיא מחייבת מספר שלבים, ובשילוב היוריסטיקה הליכה לאחור, מרכיב קוגניטיבי מורכב יותר מאשר חשיבה קדימה (איור 15ב').

איור 15א':
דרך פתרון אחת - "הזזת" קדקוד המשולש



איור 15ב':
סרטוט משולשים שווי שטח על פי חישוב

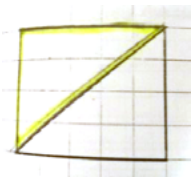


כ־57% מהתלמידים שגו בפתרון הבעיה. הם חולקו לשתי קבוצות על פי מאפייני הקשיים שנחשפו:

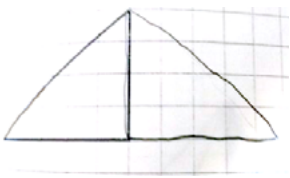
רמה א' - כ־40% מהתלמידים ביטאו קושי בשימוש בהיוריסטיקה פירוק והרכבה. תלמידים אלו ביטאו קושי לפרק את שטח המשולש לשני מרכיבים: גובה ובסיס. נוסף לכך ביטאו קושי במשאבי ידע מאחר שלא ידעו כיצד לחשב את שטח המשולש הנתון. ברמה זו אופיינו 40% מהתלמידים ששגו.

באיורים 16 ו־17 מוצגות דוגמאות לפתרונות שגויים של תלמידים המאופיינים ברמה א'. התלמידים "שכפלו" את המשולש הנתון במנח אחר (סימטריה שקופית), ולא ענו על דרישות הבעיה.

איור 16:



איור 17:



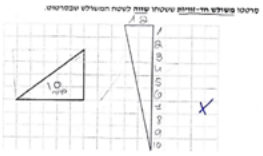
עדות נוספת בקטע ריאיון עם תלמיד: *"ניסיתי לספור משבצות שבתוך המשולש, אבל אז היו לי משבצות חלקיות, לא שלמות, ולא ידעתי מה לעשות איתן".*

עדויות אלה מבטאות הבנה קונספטואלית לקויה של המושג שטח משולש ומשמעות מרכיביו (גובה ובסיס), מיומנות חסרה בפירוק שטח משולש לרכיביו (גובה וצלע) והרכבת משולש בעל מאפיינים שונים (חד־זוויות) באמצעות רכיבים אלה.

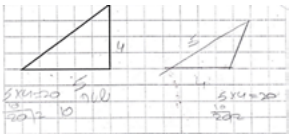
רמה ב' - לרמה זו שויכו כ־17% מהתלמידים ששגו. תלמידים אלה ביטאו יכולת לבצע פירוק של המשולש הנתון לשני המרכיבים: גובה ובסיס, אך ביטאו קושי בתהליך ההרכבה - סרטוט משולש חד־זוויות. בהרכבת משולש בעל תכונות אחרות מהמשולש הנתון קיים מוטיב של הליכה לאחור: משטח משולש אחד לסרטט משולש אחר, ובתוך כך שימוש במרכיביו (גובה ובסיס). למרות שתלמידים ברמה זו ביטאו שליטה מלאה בידע פרוצדורלי בחישוב שטח משולש, ידע זה לא סייע בידם בפתרון הבעיה. הקושי של תלמידים אלה נבע מהבנה קונספטואלית חלקית של המושג שטח משולש. באיורים 18 ו־19 דוגמאות לפתרונות שגויים של תלמידים שאופיינו ברמה זו:



איור 18:



איור 19:



באיורים 18 ו־19 מוצגים משולשים ששטחם שווה לשטח המשולש הנתון כנדרש בבעיה. עם זאת, סוג המשולש אינו תואם את דרישות הבעיה.

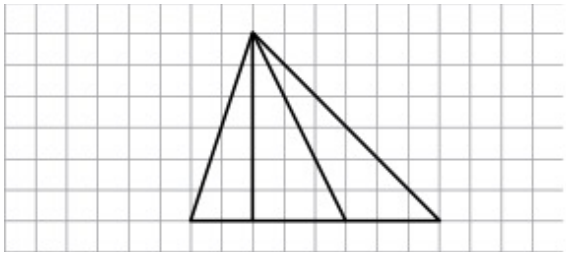
עדות לכך בקטע ריאיון עם תלמיד ג': *"חישבתי את שטח המשולש שבסרטוט, הנה פה... אבל לא הצלחתי לסרטט משולש חד זוויות ושווה שוקיים... אני לא יודע... לא הצלחתי... ישבתי על הבעיה הזאת הרבה זמן במבחן... זה היה לי קשה".*

ממצאים אלה מעידים על קשיי התלמידים במעבר מעיבוד אנליטי (נוסחת שטח משולש) לדימוי ויזואלי של משולש מתאים (כהן, 2007).

3.6. בעיה 6

(בעיה מס' 23 סעיף ב' במבחן המיצ"ב תשע"ב):

איור 20:



הבעיה: צֻבעו בסרטוט משולש **ישר זווית ושווה שוקיים**.

בפתרון הבעיה (איור 20) נדרש פירוק המשולש לחמישה משולשים שונים: שלושה משולשים כמתואר באיור 22 (כמתבקש בסעיף א' של הבעיה) ושני משולשים נוספים המתקבלים מצירוף שני משולשים סמוכים (איורים 21 ו־22). **האתגר** בסעיף ב' של הבעיה הוא בזיהוי **הרכבה** של שני משולשים סמוכים למשולש אחר בתוך המבנה השלם (איור 21). הרכבה זו כרוכה בשימוש ב"מחיקת עזר" (שפיגל, 2018) - פעולה הפוכה מבניית עזר, שמשמעותה, התעלמות מקווים מיותרים בסרטוט.

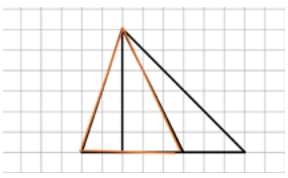
איור 21:

פירוק למשולש המורכב משני משולשים



איור 22:

פירוק למשולש המורכב משני משולשים



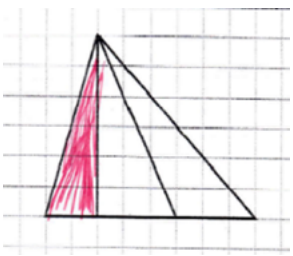
בפתרון סעיף ב' של הבעיה שגו כ־81% מהתלמידים. תלמידים אלה חולקו לשתי קבוצות על פי מאפייני הקושי:

רמה א' - תלמידים ברמה זו ביטאו יכולת לבצע פירוק לשלוש תת־צורות גנריות (שלושה משולשים המרכיבים את המשולש "הגדול"), אך קושי בפירוק למשולשים המורכבים משני משולשים. קושי זה מבטא יכולת מצומצמת בשימוש בהיוריסטיקה פירוק והרכבה (דוגמאות באיורים 23 ו־24) וקושי בהיבט המושגי והצורני המתייחס לתכונות משולש ישר זווית ותכונות משולש שווה שוקיים.

איור 23:



איור 24:



עדויות לקושי זה מוצגות בקטעי ראיונות עם שתי תלמידות:

תלמידה א': *"את השאלה הזאת היה לי קשה לפתור. ניסיתי כאילו כמו שיש משימות בחוברת, עם כמה משולשים, וניסיתי להסתכל על כל משולש בצורה בודדת ועל הרבה משולשים שהם מפורקים. ולא הצלחתי להגיע למשולש ישר זווית וגם שווה שוקיים. זה הזווית הישרה"* (מצביעה על המשולש האמצעי שהוא ישר זווית ואינו שווה שוקיים). מדברי התלמידה עולה הקושי בזיהוי



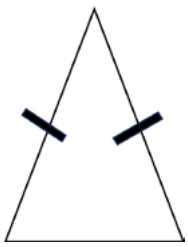
משולשים המורכבים מצירוף של שני משולשים.

תלמידה ב': "(הופכת את הדף) *מדדתי ככה, לא מדדתי ככה, מדדתי כאילו ככה (ולא הצלחתי למצוא. אז בסוף צבעתי את המשולש הזה (האמצעי), כי הוא ישר זווית ומדדתי את הצלעות שלו, ראיתי שהן כמעט אותו דבר*".

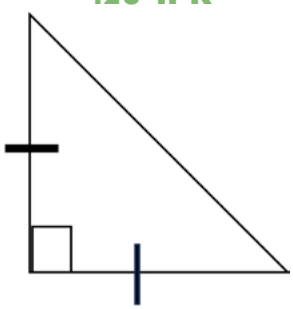
התלמידה מדדה עם סרגל את הניצב והיתר של המשולש האמצעי. מדידה עם סרגל חשפה קושי בזיהוי של משולש ישר זווית ושווה שוקים המתקבל מצירוף/הצמדת שני משולשים.

רמה ב' - תלמידים ברמה זו ביטאו יכולת לבצע פירוק לכל חמשת המשולשים האפשריים, אך ביטאו קושי בזיהוי משולש ישר זווית ושווה שוקיים מתוך חמשת המשולשים. קושי זה נבע מהמנח שבו הוא הוצג המשולש בסרטוט (איור 26). לרוב, תלמידים רגילים לראות משולש שווה שוקיים שהוא חד־זוויות במנח שבו בסיס המשולש אופקי לשולי הדף ושתי שוקיים שוות זו לזו (איור 25). בבעיה זו נדרשו התלמידים לזהות משולש שווה שוקיים וישר זווית, כך שאחד מניצביו הוא "בסיס" משולש שווה שוקיים המוצג במנח אופקי על רשת משבצות. קושי בזיהוי המשולש הרצוי כאשר הוא במנח אחר מהמנח שבו רגילים התלמידים לראותו נובע מסכמת "אב טיפוס" של משולש שווה שוקיים (קושי בהיבט המושגי).

איור 25:



איור 26:



חיפוש משולש שווה שוקיים וישר זווית כנדרש בבעיה, הצריך מהתלמידים יכולת ויזואלית בשילוב גמישות מחשבתית בהרכבת שני משולשים "קטנים" למשולש אחר שיענה על דרישות הבעיה נוסף ליכולת לזהות את המשולש על פי תכונות רלוונטיות.

4. סיכום ודיון

מיומנות פתרון בעיות היא אחת מתוך המיומנויות הבסיסיות שעל התלמיד לרכוש במאה ה־21. מחקרים שנערכו במשך השנים הראו כי ניתן לשפר את יכולתם של תלמידים בפתרון בעיות מתמטיות על ידי תרגול והוראה מתאימה של היוריסטיקות (למשל: עובדיה, 2017; Koichu, 2003; Koichu, Berman & Moore, 2004; Schoenfeld, 1985, 1992). מנגד, מחקרים אשר בחנו את מידת הפנייה ומיומנות השימוש בהיוריסטיקות שונות מבלי שנלמדו באופן ישיר, העידו על קשיים במיומנות קוגניטיבית זו (וולפוביץ, 2004; לחמי, 2009; שחם, 2006; שפיגל, 2006, 2018; Ginat & Wolfson, 2002). במחקר זה מוצגות שש בעיות גאומטריות המאופיינות בהיותן מזמנות פנייה ושימוש בהיוריסטיקה פירוק ו/או הרכבה, לעיתים בשילוב היוריסטיקה נוספת (בניית עזר, מחיקת עזר, הליכה לאחור). מממצאי המחקר עולה כי מידת ההבנה הקונספטואלית של מושג או תכונה גאומטרית קשורה, בין היתר, למיומנות בפתרון בעיות. ממצאי המחקר הצביעו על ארבעה קשיים מרכזיים בפתרון בעיות גאומטריות:

1. **קושי בפירוק צורה או מבנה לתת־צורות** - מרבית התלמידים אשר שגו בפתרון הבעיות ביטאו קושי בביצוע פירוק ויזואלי של צורות לתת־צורות כשתת־הצורות אינן משלימות לצורה מוכרת, ובהרכבה של תת־צורות לצורה אחרת. ניתן היה לראות קושי גדול יותר בפירוק לצורות שאינן מוכרות/אב טיפוס מאשר לצורות מוכרות או שהן אב טיפוס. יש לשער כי קושי זה נובע מחוסר גמישות מחשבתית (Flexibility) בחשיבה יצירתית, ביכולת ויזואלית מצומצמת לראות חלק משלם אם החלק מוצג במנח שאינו טיפוסי ובהבנה קונספטואלית של מושגים ותכונות צורות גאומטריות. ממצאים אלה מחזקים ומחדשים מחקרים קודמים (דבורה, 2003; לחמי, 2009; Duval, 1995, 1998), אשר אפיינו קשיים של תלמידים ביכולת ההבחנה



הוויזואלית שלהם לראות את "החלקים מול השלם". כמו כן קושי לתפוס צורות אם הסרטוט שלהן מוצג בדרכים שונות. מחקר זה מחדש בהיותו חושף ומבחין לראשונה בקושי בזיהוי תת־צורה (מבנה) המורכבת משתי צורות. קושי זה נובע בין היתר, מחשיבה יצירתית מצומצמת, המתבטאת בקושי בהתבוננות "גמישה" על סרטוט ובחוסר "שטף" בבחינת האפשרויות לפירוק ו/או הרכבה של צורות מבין תת־צורות הנמצאות בתוך צורה. נוסף לכך, חשיבה יצירתית מצומצמת התבטאה בקושי לבצע ויזואליזציה - לראות חלק מהשלם כאשר החלק מורכב משני חלקים אחרים, ומוצג במנח שאינו טיפוסי (כפי שהורגלו התלמידים לראות).

2. **קושי בשילוב עם היוריסטיקה הליכה לאחור** - ממצאי המחקר חשפו קושי במיומנות הליכה לאחור, ומרבית השוגים עצרו בשלב השני. ממצאים אלה מעידים על קושי בהבנה קונספטואלית בתכונות ובמושגים הגאומטריים שנחקרו (תכונות משולשים ומרובעים, תכונות תיבה וחישובי שטח של ריבוע ומשולש). הבנה קונספטואלית של מושג גאומטרי מתבטאת אצל התלמיד, בין היתר, ביכולת שלו לערוך חישובים קדימה ואחורה באופן מסודר. ממצא זה מחדש ומחדד מחקרים קודמים אשר שיקפו קשיים ביכולת יישום היסק לאחור באספקטים מסוימים, כגון: היפוך מחשבתי, היפוך פעולות אריתמטיות, היקש לאחור במספר צעדים (דבורה, 2003; שפיגל, 2006; Ginat & Wolfson, 2002).

1. **קושי בהבנה קונספטואלית של משאבים** - מרבית התלמידים ביטאו ידע בסיסי במשאבים שנדרשו. עם זאת, כמחצית מאלה ששגו חשפו קושי בהבנה קונספטואלית של משאבים (אלכסון, שטח משולש). נוסף לכך, ניכר כי ככל שנדרשו יותר משאבים (שתי תכונות לצורה נתונה לעומת תכונה אחת) או משאבים מורכבים יותר (חישוב שטח משולש הנתפס כמורכב יותר לעומת חישוב שטח ריבוע הנתפס כפשוט יותר) לפתרון בעיה, כך התלמידים ביטאו קשיים גדולים יותר ומיומנויות נמוכות יותר בתהליך הפתרון.

2. **בקרה** - תופעה נלווית שנחשפה במסגרת מחקר זה היא העדר שימוש בבקרה. בדומה למחקרים אחרים (וולפוביץ, 2004; לחמי, 2009; עובדיה, 2017; צדוק, 2014; שפיגל, 2006), גם במחקר זה רבות משגיאות התלמידים יכלו להימנע או להיחשף באמצעות הפעלה טובה של מרכיב הבקרה המוצג במודל הקוגניטיבי של שוינפלד (Schoenfeld, 1985, 1992). ממצאי המחקר חושפים קושי של תלמידים להשתמש בבקרה תחילית - התבוננות בבעיה טרם ניגשים לפתרונה וחוסר בבקרה בתהליך פתרון הבעיה ובסיומו. ממצא זה מחזק ומחדד את ממצאי מחקרה של צדוק (2014), שעל פיו תלמידים נוטים לפנות בצורה חפוזה לחישובים בעזרת משאבים ולאסטרטגיות פתרון המבוססות על המוכר גם במקרים שאין צורך בהם.

4.1. השלכות להוראה

ההיוריסטיקות הן אסטרטגיות פתרון מעניינות, מעשירות וחיוניות למגוון תחומי לימוד, ולצורך פתרון בעיות מחיי היום־יום. כמו כן, הן מורכבות ומעוררות קשיים. לפיכך, מומלץ להקדיש זמן להקנייתן באופן מפורש בתהליך ההוראה, לנתח את ייחודיותן, ללמד מתי וכיצד יש להשתמש בהן, ולדון במוקדי הקושי שביישומן. ממחקר זה עולה כי יותר משליש מהבעיות המופיעות בשאלון מיצ"ב הן בעיות שבהן מתאים לעשות שימוש בהיוריסטיקות. מכאן, שהוראת ההיוריסטיקות בבית ספר יסודי רלוונטית ועשויה להשפיע על מידת הצלחתם של תלמידים בפתרון בעיות בכלל ובשאלון מיצ"ב בפרט. להלן מספר המלצות:

- **הוראה מפורשת של אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות** - במסגרת ההוראה בכיתה תלמידים מציעים אסטרטגיות פתרון שונות לבעיה



נתונה. לרוב המורים מציגים את אסטרטגיות הפתרון השונות ללא שימוש במונחים המפורשים כגון: "פירוק ו/או הרכבה, בניית עזר, משלים". מכאן, שהתלמידים עשויים להניח שהאסטרטגיה שהוצגה רלוונטית ומתאימה רק לבעיה הספציפית שנידונה. שימוש בשפה היוריסטית לתיאור אסטרטגיות, כחלק מהשפה המתמטית בכיתה, יבסס הבנה אצל התלמידים שהאסטרטגיה המוצעת היא אסטרטגיה כללית הרלוונטית למגוון בעיות ונושאים, ולאו דווקא בהקשר לבעיה ספציפית.

- **התנסויות בפעילויות פירוק והרכבה של צורות גאומטריות** - שליטה בידע פרוצדורלי בהעדר הבנה קונספטואלית של מושגים ותכונות של מצולעים אינה מספיקה להתמודדות עם פתרון בעיות גאומטריות. חוקרים הצביעו על שימוש באמצעים מוחשיים (קונקרטיים או דיגיטליים) בלימודי גאומטרייה המאפשרים התנסות מעשית משמעותית עם מניפולציות קונקרטיות בתהליך הלמידה. אמצעים אלה סייעו לשיפור ביצועי התלמידים בפתרון הבעיות הגאומטריות (Cekmez & Guler, 2019; Shi et al, 2023; Trigo, 2024). מומלץ לזמן לתלמידים התנסויות (באמצעים מוחשיים ובאמצעים דיגיטליים) בפירוק מצולעים לתת־צורות, בבחינת התכונות של תת־צורות המתקבלות מפירוק ואפיונן, בהרכבה של מגוון מצולעים מתת־צורות, ואפיון הצורות שהתקבלו. התנסויות בהרכבה מורכבות לא פחות מהתנסויות בפירוק, ועל כן יש לשלב את שתיהן במסגרת ההוראה בכיתה. הוראה המשלבת התנסויות בפירוק והרכבה עשויה לפתח אצל התלמידים יכולת טובה יותר לבצע ויזואליזציה במצולעים וגופים, ולבסס הבנה קונספטואלית במושגים ותכונות של מצולעים וגופים בגאומטרייה.
- **חשיפה למצולעים במנחים שונים (שאינם טיפוסים)** - לרוב, מורים חושפים תלמידים למצולעים טיפוסים במנחים אופקיים לשולי הדף או הלוח. חשיפה חלקית זו מובילה לקושי לפתח אצל התלמידים את היכולת הוויזואלית לשפוט צורה על פי תכונותיה, ולא על פי מראית עין, על פי מדידה עם סרגל בהינתן סרטוט מוקטן או על רשת משבצות. הצגה זו מצריכה מהפותר להתמקד בתכונות המצולע, ובדרך זו עשויה לקדם אצלו הבנה קונספטואלית של תכונות ומושגים גאומטריים.
- **עידוד ביצוע בקרה** - ממצאי המחקר הצביעו על העדר שימוש בבקרה בקרב התלמידים. במסגרת הוראה-למידה של מתמטיקה מומלץ לעודד מרכיב זה כחלק בלתי נפרד מתהליך פתרון בעיות. שוינפלד (Schoenfeld, 1985, 1992) ממליץ לעשות זאת באמצעות עריכת דיונים כיתתיים, חשיפת יתרונות וחסרונות השימוש בהיוריסטיקות השונות ובחינת הפתרונות הנידונים במהלכם ובסופם. ממצאים אלו מחזקים את המסקנה כי במסגרת הוראה-למידה של מתמטיקה יש צורך לעודד מרכיב זה כחלק בלתי נפרד מתהליך פתרון הבעיות.
- **פיתוח דיונים מתמטיים בכיתה** - מומלץ לפתח בכיתה דיונים מתמטיים העוסקים בניתוח בעיה/סרטוט, בחינת אפשרויות פירוק שונות ואסטרטגיות פתרון שונות. שימוש במונחים היוריסטיים גם על ידי המורה וגם על ידי התלמידים באופן מפורש ובחינת יעילות הפתרונות שהוצעו עשויים לקדם בקרב תלמידים מיומנויות בפתרון בעיות.

שאלון מיצ"ב משמש כלי להערכת הישגי תלמידים במתמטיקה, וממצאיו מנותחים לפי ארבע רמות חשיבה: ידע וזיהוי; חשיבה אלגוריתמית; חשיבה תהליכים ותובנה; חיפוש פתוח. אם מורים מעוניינים לקדם פתרון בעיות בבתי ספר, כצעד ראשון מומלץ לנתח את פתרונות התלמידים על פי מודל פתרון בעיות. בדרך זו אפשר יהיה לאפיין ולנתח קשיי תלמידים בתחום זה באופן מעמיק ויסודי, ולשפר דרכי הוראה-למידה.



5. ביבליוגרפיה

- גירון, ת' (1999). *למידה שיתופית בקבוצה רב גילית והשפעתה על פיתוח תהליכי חקר ופתרון בעיות הכללה במקרה של מתמטיקה*. פרויקט מחקר כחלק מהדרישות לקבלת תואר M.A. בית הספר לחינוך, אוניברסיטת אלבמה, ברמינגהם.
- דבורה, ט' (2003). *הנחת הנחות בלתי מוצדקות בהסתמך על שרטוטים בגיאומטריה*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.). בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך (ראמ"ה), (2024). מבחנים וסקרים. נדלה מ־ https://rama.edu.gov.il/assessments
- וולפוביץ, מ' (2004). *להתחיל מהסוף: היסק לאחור בפתרון בעיות פחות שגרתיות במתמטיקה*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.), בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- כהן, נ' (2007). *שילוב אנליטי-וויזואלי בביצוע משימות במרחב*. מחקר לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת תואר דוקטור לפילוסופיה (Ph.D.), אוניברסיטת בן גוריון בנגב.
- לחמי, ר' (2009). *קשיים בשימוש בהיוריסטיקה פירוק והרכבה בפתרון בעיות גיאומטריות*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.). בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- עובדיה, ת' (2017). עקרונות התערבות בהוראת מתמטיקה בקרב תלמידות תיכון חלשות. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 6*, עמ' 53-65.
- צדוק, ט' (2014). *חיפזון וחישובים מיותרים בהעדר בקרה תחילית בפתרון בעיות במתמטיקה*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.) בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- רייזמן־דן, ש' (2023). *הוראה מונחית היוריסטיקות של הוכחות בגיאומטריה*. עבודת גמר לתואר דוקטור לפילוסופיה (Ph.D.), אוניברסיטת תל־אביב.
- שחם, ד' (2006). *הכללה פזיזה בחישוב איבר כללי של סדרה לינארית*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.). בית ספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- שפיגל, ה' (2006). *להתחיל מהסוף: אפיון הקשיים ומדרוג היכולת ביישום היוריסטיקת ההיסק לאחור בפתרון בעיות מתמטיות*. עבודת גמר לקראת התואר "מוסמך למדעי הרוח" (M.A.), בית הספר לחינוך, אוניברסיטת תל־אביב.
- שפיגל, ה' (2018). *פירוק והרכבה בפתרון בעיות בגאומטריה*. עבודת גמר לקראת התואר דוקטור לפילוסופיה (Ph.D.), אוניברסיטת תל־אביב.
- Anderson, J. R. (1985). *Cognitive Psychology and Its Implications. New York: W.H. Freeman & Co.*
- Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representation in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52:* 215–241.
- Bishop, A. (1986). What are some Obstacles to learning Geometry? In R. Morris (Ed.), *Studies in Mathematics Education 5: The Teaching of Geometry (pp. 141-159). UNESCO: Paris.*
- Cekmez, E., & Guler, M. (2019). One problem, multiple solution: The contribution of DGS to heuristics in the problem-solving process. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching,* 38(3), 231-247.
- Chappell, M. F., & Thompson, D. R. (1999). Take Time for Action: Perimeter or Area? Which Measure Is It?. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(1), 20-23.
- Chinnappan, M. (1998). Schemas and Mental Models in Geometry Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 36*, 201-217.
- Chung, K. K. H., & Tam, Y. H. (2005). Effects of cognitive-based instruction on mathematical problem solving by learners



- Ginat, D., & Wolfson, M. (2002). On limited views of the mean as point of balance. *Paper presented at the 26th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Norwich, UK: University of East Anglia.
- Gole, A. M. (2003). Sherlock Holmes, Geometry Proofs, and Backward Reasoning. *The Mathematics Teacher*, 96(8), 544-546.
- Hershkowitz, R., & Vinner, S. (1983). The role of critical and non-critical attributes in the concept image of geometrical concepts. In *Proceedings of the seventh international conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 223-228).
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than a proof. *The Mathematics Teacher*, 74(1), 11-18.
- Hoffer, A. (1983). Van Hiele based research. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 205-227). New York: Academic Press.
- Huang, H. M. E. (2017). Curriculum interventions for area measurement instruction to enhance children's conceptual understanding. International *Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1323-1341.
- Koichu, B. (2003). *Junior high school students' heuristic behaviors in mathematical problem solving* (Doctoral dissertation). Haifa: Technion.

with mild intellectual disabilities. *Journal of Intellectual and Developmental Disability, 30*(4), 207-216.

- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics counts*. London: HM Stationery Office.
- Common Core State Standards Initiative - CCSSI. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM). Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices.
- Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2010). A theoretical model of students' geometrical figure understanding. In *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 696-705).
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: kinds of representation and specific processing. In S. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villiani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: An ICMI Study* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer.
- Duval, R. (1999). Presentations, Vision, and Visualization: Cognitive Functioning in Mathematical Thinking. *Proceedings of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*(2), 139-162.



- Shi, L., Dong, L., Zhao, W., & Tan, D. (2023). Improving middle school students' geometry problem solving ability through hands-on experience: An fNIRS study. *Frontiers in Psychology, 14*, 1126047.
- Tan Sisman, G., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*, 1293-1319.
- The National Academic of Sciences Engineering Medicine. (2015). Retrieved from BOOKS database: https://www.nap.edu/catalog/13398/education-for-life-and-work-developing-transferable-knowledge-and-skills
- Trigo, M. S. (2024). Problem solving in mathematics education: Tracing its founding and current research-practice trends. *ZDM-Mathematics Education, 56*, 211-222.
- Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2004). Promotion of heuristic literacy in regular mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics, 24*(1), 163-180.
- Krawec, J. L. (2014). Problem representation and mathematical problem solving of students of varying math ability. *Journal of Learning Disabilities, 47*(2), 103-115.
- Machaba, F. M. (2016). The concepts of area and perimeter: Insights and misconceptions of Grade 10 learners. *Pythagoras*, 37(1), 1-11.
- Martinez, M. (1998). What is problem solving? *Phi Delta Kappan, 79*(8), 606-609.
- National Council of Teachers of Mathematics (1980). *An Agenda for Action*. Reston, Virginia: NCTM.
- Paraskevi, M.C & Gagatsis, A. (2013). Geometrical figures in geometrical task solving: an obstacle or Heuristic tool? *Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics*, Issue 13, 17-32.
- Polya, G. (1945, 1957). *How to Solve It. Princeton*, NJ: University Press.
- Rivella, F., Siegler, R. S., McKenney, L., & Gold, S. (2021). Learning a new geometric concept: The role of working memory and of domain-specific abilities. *British Journal of Educational Psychology, 91*, 1537-1554.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving. Orlando*, FL: Academic Press.
- Schoenfeld, A. H. (1992). On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *The Journal of the Learning Sciences, 2*(2), 179-214.





משחקים מתמטיים

קוביית סומה

ד"ר סבינה סגרה
המכללה האקדמית אחוה
תלפיות - המכללה האקדמית לחינוך

קוביית סומה

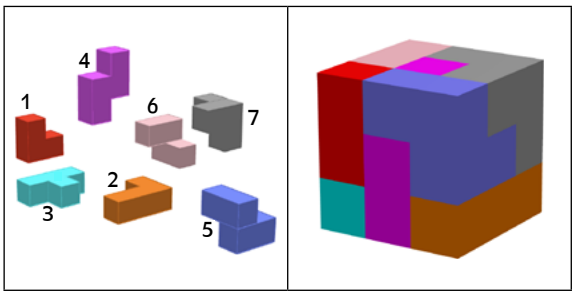
סבינה סגרה

אחת ההזדמנויות לפעילות מעניינת ומאתגרת, שאינה חלק מתוכנית הלימודים הפורמלית, היא עיסוק בפאזלים (תצרפים) המפתחים חשיבה מתמטית אצל ילדים ומעוררים את סקרנותם. כדוגמה לפעילות מן הסוג הזה נציג כאן את הפאזל הנקרא "קוביית סומה" (איור 1). ניתן ליצור את חלקי הפאזל בקלות מקוביות מתחברות, או למלמדים תוכנות כמו "טינקרקד" (Tinkercad), להדפיסם במדפסת תלת־ממד (Domínguez Martínez, 2021).

איור 1:

קוביית סומה (ימין) וחלקיה (שמאל)

התמונות נגזרות מיישומון גאוגברה מאת Steve Phelps, CC-BY-SA.



פאזלים ומשחקי הרכבה מסוג זה מפתחים מגוון יכולות חשובות אצל ילדים (פדלון ופטקין, 2012). הם מעודדים את הילדים לזהות ולעבד מידע מרחבי, ואף לפעול עם הרכבים מרחביים - מיומנות חשובה להתפתחות החשיבה המתמטית בכלל, והחשיבה הגיאומטרית בפרט (Battista, 1999). נוסף לכך, פתרון פאזלים מפתח סקרנות, סבלנות ויכולת ריכוז, שכן הילדים נדרשים לשים לב לפרטים קטנים, לנסות דרכים שונות להרכבה, ולא לוותר עד אשר מצליחים להשלים את המשימה (Van Hiele, 1999).

חשוב גם להזכיר את הסיפוק והביטחון העצמי שילדים מרגישים כאשר מצליחים להרכיב פאזל לאחר מאמץ. תחושת ההישג עשויה לתרום להעצמתם ולחיזוק אמונתם ביכולותיהם. לבסוף, פאזלים וקוביות בנייה מפתחים גם את הדמיון והיצירתיות, מכיוון שניתן להרכיב מהם צורות שונות על־פי הדמיון (אסמן, 1996). החידות המוצגות בהמשך מאמר זה יכולות להמשיך את הפעילות "קובייה ועוד קובייה" עבור תלמידים בכיתות א' ו־ב' (מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי, 2020). הפעילויות מתאימות גם לתלמידים בכיתות גבוהות יותר ואף למבוגרים.

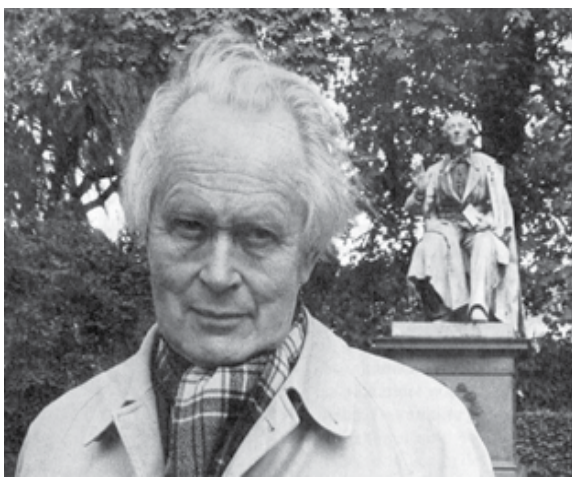
חלקי הפאזל

היוצר מאחורי קוביית סומה הוא פיט היין (איור 2), והוא גם האיש שפיתח את המשחק "הקס" שעליו כתבנו בעבר (סגרה, 2023). היין החל לדמיין את חלקי הפאזל בעקבות הרצאה של הפיזיקאי המפורסם ורנר הייזנברג (1901-1976) שהתמחה בפיזיקת הקוונטים. היין התמקד בדמיון צורות תלת־ממדיות המורכבות מארבע קוביות או פחות (כך שלכל שתי קוביות פאה משותפת), למעט תיבות (איור 3). כלומר, כל הצורות שדמיין הן קעורות עם לפחות "פינה פנימית" אחת. מתברר כי ישנם שבעה חלקים כאלה, ומהם ניתן להרכיב קובייה שלמה.

איור 2:

פיט היין (1905-1996)

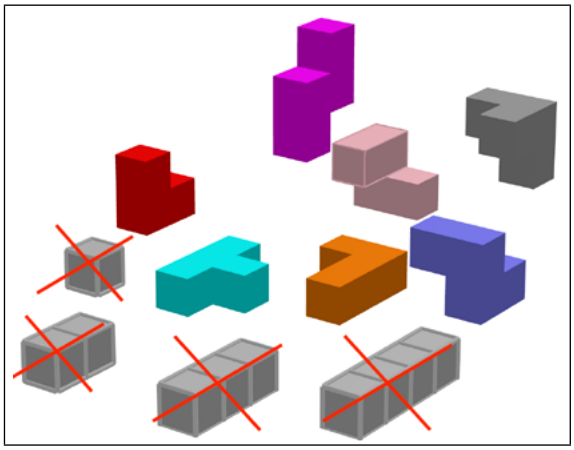
תמונת ויקיפדיה מאת André Savik, CC BY 3.



איור 3:

כל ההרכבים האפשריים מארבע קוביות או פחות, כולל תיבות. התיבות אינן נחשבות חלקי קוביית סומה, מפני שהן קמורות.

התמונה נגזרת מיישומון גאוגברה מאת Steve Phelps, CC-BY-SA.



שניים מחלקי הפאזל (מס' 5 ומס' 6 באיור 1) הם כיראליים, כלומר האחד הוא תמונת מראה של השני, בדומה לידיים של האדם. אין דרך לקבל אחד מהם באמצעות סיבובים של השני. מקור המילה "כיראליות" הוא בשפה היוונית, χείρ ("כאִיר" בכ"ף רפה) שמשמעותה "יד", והיא מופיעה למשל במילה "כירורגיה". המושג כיראליות נפוץ יותר בכימיה, והוא מתאר תכונה חשובה ומוכרת של מולקולות.

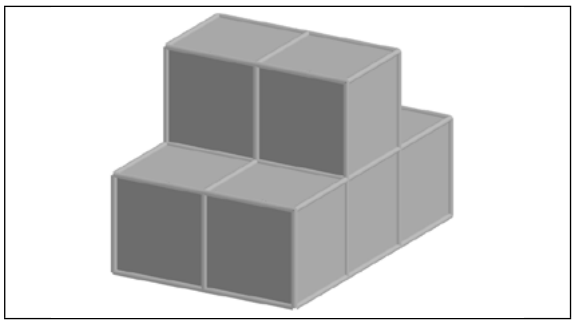
זהירות... הפאזל עלול להיות ממכר. ברומן "עולם חדש מופלא" מאת אלדוס האקסלי, סומה הוא הסם שאמור לשמח את כולם. כמו הסם "סומה" בספר, שמשמש כאמצעי לבריחה מהמציאות, גם "קוביית סומה" יכולה לספק הסחת דעת מרתקת, אם כי בצורה בריאה ומאתגרת יותר. ההבדל המשמעותי הוא שבעוד "סומה" בספר גורמת לדיכוי חשיבה עצמאית, "קוביית סומה" דווקא מעודדת חשיבה יצירתית ופתרון בעיות.

חידות

חידה ראשונה שניתן להציג לתלמידים לאחר יצירת חלקי הפאזל שנבנו מקוביות מתחברות או באמצעות מדפסת תלת־ממד, היא ליצור את ה"מדרגות" המוצגות באיור 4. חידה זו אינה קשה במיוחד ומתאימה ל"חימום". את הפתרון תוכלו לראות באיור 5.

איור 4:

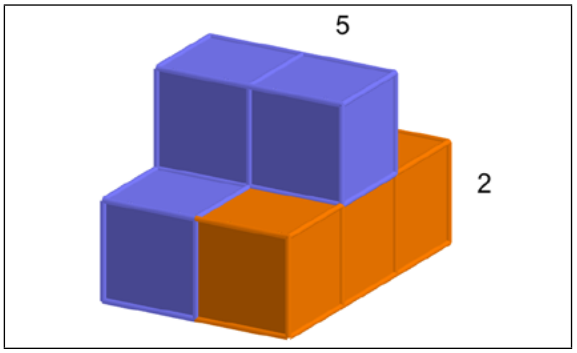
חידת המדרגות



איור 5:

פתרון לחידת המדרגות

המספרים והצבעים קשורים לאיור 1.



בשלב השני אפשר לבקש מהתלמידים להרכיב קובייה משבעת חלקי הפאזל. מלבד שיקופים וסיבובים ישנם 240 פתרונות למשימה זו, שאותם ניתן לבדוק ביישומון גאוגברה הנמצא כאן. את הפתרונות מצא ג'ון הורטון קונווי והציג אותם באופן שיטתי בגרף (Conway, 1982). תוצאה זו אושרה בהמשך גם בעזרת מחשבים בדרך של הצגת המיקום של כל אחד מחלקי הסומה באופן מתמטי (Brunvoll et al., 1986).

בעיות הרכבה רבות ניתן למצוא במאמר מאת מרטין גרדנר על קוביית סומה (Gardner, 1987). ראו גם את הקישורים בסוף המאמר.

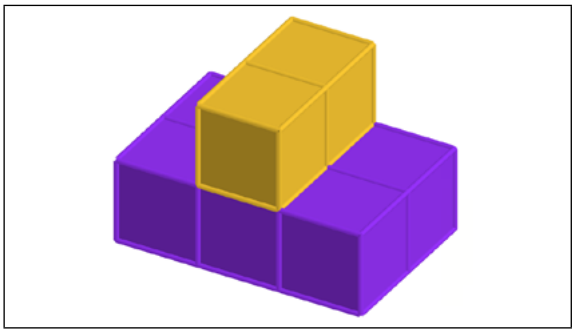
נפח

אחרי שהתלמידים הרכיבו פאונים שונים מחלקי הפאזל כדאי לבקש מהם לחשב את הנפח של הפאונים הללו בדרכים שונות. דרך אחת היא לדמיין את הפאון כמורכב מתיבות (ראו דוגמה באיור 6), לחשב את נפח התיבות כמכפלת שלושת הממדים, ולחבר את הנפחים שהתקבלו עבור התיבות השונות. דרך אחרת היא לחבר את הנפחים של חלקי הפאזל, בהתבסס על כך שהנפח של כל אחד מהחלקים הוא סכום נפחי הקוביות שמרכיבות אותו (4 יחידות נפח עבור החלקים 2 עד 7 באיור 1, ו־3 יחידות נפח עבור החלק הראשון).

מובן שהתוצאות שהתקבלו באמצעות אסטרטגיות שונות אמורות להיות זהות, והסיבה לכך היא עיקרון שימור הנפח. לפי עיקרון זה הנפח של גוף תלת־ממדי נשמר בהזזה, שיקוף, סיבוב, פירוק והרכבה. כמו עיקרון שימור השטח, עיקרון שימור הנפח יכול לסייע לתלמידים בפיתוח חשיבה מרחבית, ובמיוחד בחישוב של נפחים.

איור 6:

המדרגות של האיורים 4 ו־5, הפעם כמורכבות מתיבות.



בהקשר זה כדאי לציין משפט מעניין: נתונות שתי צורות דו־ממדיות בעלות שטח זהה. תמיד ניתן למצוא פירוק לחלקים של אחת משתי הצורות, כך שניתן יהיה להרכיב את הצורה השנייה מהחלקים הללו. אין הכללה של משפט זה לשלושה ממדים (סגרה, 2022). לפי הפרדוקס של בנך־טרסקי, ניתן לחתוך כדור מוצק למספר סופי של חלקים, ולהרכיב מהם שני כדורים זהים לכדור המקור. פרדוקס זה מנוגד לאינטואיציה שלנו לגבי שימור נפח. עם זאת, החלקים אינם "רגילים", אלא קבוצות מורכבות מאוד מתמטית, והחיתוך וההרכבה מחדש מתבססים על תכונות של קבוצות אינסופיות. זאת אומרת, שבבית הספר ניתן לבקש מהתלמידים לחתוך מבנים המורכבים מחלקי קוביות סומה לתיבות, ולחשב את הנפחים. אין השפעה של הפרדוקס על העולם הפיזי היומיומי שלנו.

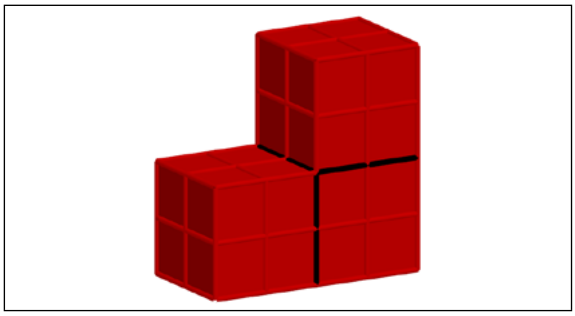
בעיית הגדלה

נתונות שמונה קוביות חופפות שמהן ניתן להרכיב קובייה חדשה גדולה. אורך המקצוע של הקובייה החדשה הוא פי שניים מאורך המקצוע של הקובייה המקורית. כל אחת מהפאות של הקובייה החדשה מורכבת מארבע פאות של הקובייה המקורית.

כאשר מרכיבים משמונה קוביות את כל אחת משלוש הקוביות שמרכיבות את החלק מס' 1 (איור 1), ניווכח שחלק זה יהיה מורכב מ־24 קוביות (איור 7). 24 הוא מספר הקוביות שמרכיבות את שאר חלקי הפאזל (שש פעמים ארבע). לכן כדאי לתת לתלמידים את המשימה להרכיב מחלקים מס' 2 עד מס' 7 (המופיעים באיור 1) העתק מוגדל של החלק מס' 1, ואכן יש פתרון למשימה זו (איור 8). הפעילות מתאימה לשמש הקדמה לנושאים הקשורים לדמיון, כגון הגדלה והקטנה ופרופורציות בין צלעות של צורות דומות. תלמידים בבית הספר היסודי אכן יכולים לעסוק במושגי דמיון גיאומטריים, אם כי הבנתם משתנה (Xistouri & Pitta-Pantazi, 2011).

איור 7:

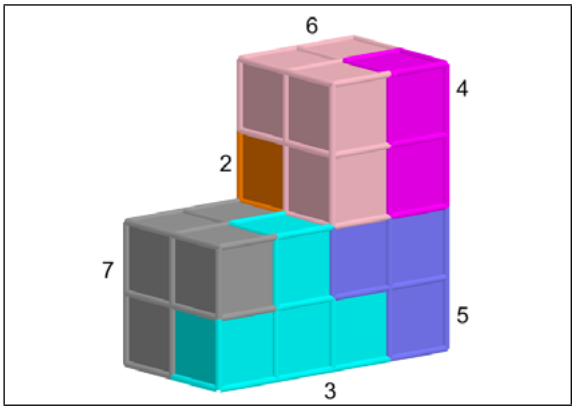
בבעיית ההגדלה, שמונה קוביות מרכיבות כל אחת משלוש הקוביות שמרכיבות את חלק מס' 1 של קוביית סומה.



איור 8:

פתרון לבעיית ההגדלה

מספור החלקים וצביעת החלקים לפי איור 1.



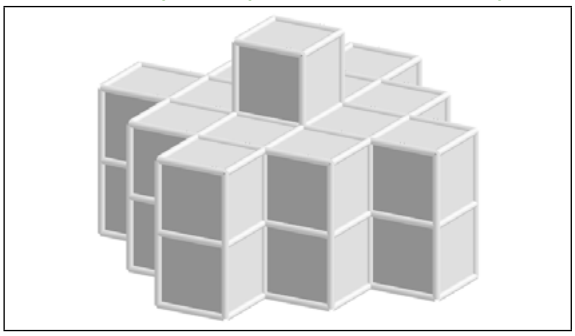
פאזל בלתי אפשרי

לא ניתן להרכיב את הצורה שבאיור 9 מחלקי הפאזל של קוביית סומה. ההוכחה היא מאת סלומון גולומב (1932-2016), מתמטיקאי ופרופסור להנדסת חשמל במכון הטכנולוגי של קליפורניה. גולומב, המוכר בקרב חובבי מתמטיקה כממציא הפוליומינואים (הכללה של אבני דומינו), תרם רבות לתחום. ההוכחה שנזכיר כאן מופיעה במאמר מאת מרטין גרדנר על קוביית סומה (Gardner, 1987).

איור 9:

חידה ללא פתרון

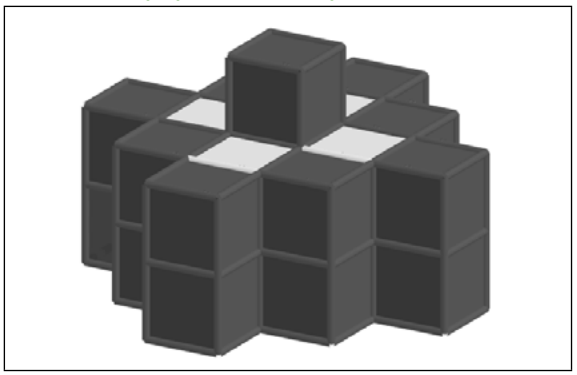
לא ניתן להרכיב צורה זו מהחלקים של קוביית סומה.



עבור הוכחה זו מוצע לצבוע את עמודי הצורה בשחור-לבן לסירוגין (איור 10), בסגנון של לוח שחמט. בצורה הצבועה ישנן 19 קוביות שחורות ו-8 קוביות לבנות. לאחר מכן מוצע לצבוע גם את חלקי הפאזל סומה. כיוון שמספר הקוביות השחורות בצורה שבאיור 10 גדול יותר ממספר הקוביות הלבנות, נבדוק עבור כל אחד מחלקי הפאזל, באיזה מיקום בתוך המבנה יהיה המספר הגדול ביותר של קוביות שחורות. ראו לדוגמה מיקום אפשרי עבור חלק מס' 6, שבו 3 קוביות של חלק זה תהיינה שחורות, ורק אחת לבנה (איור 11). התוצאות של בדיקה זו מופיעות בטבלה 1. ניתן לראות שאין אפשרות לארגן את חלקי הפאזל כך שיותר מ-18 קוביות תהיינה שחורות. לעומת זאת, נדרשות 19 קוביות שחורות עבור המבנה שבאיור 9. לכן לא ניתן להרכיב אותו מחלקי קוביית סומה.

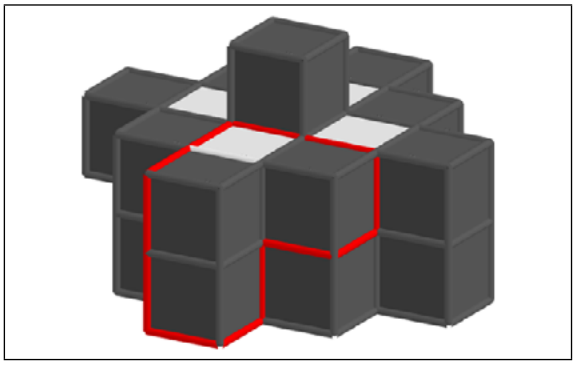
איור 10:

צביעת הצורה שלא ניתן להרכיב מחלקי קוביית סומה



איור 11:

דוגמה למיקום של חלק מס' 6 אם המטרה היא שכמה שיותר קוביות תהיינה שחורות.



טבלה 1:
תוצאות הבדיקה שנערכה כדי להוכיח שלא ניתן להרכיב מחלקי קוביית סומה את המבנה שמופיע באיור 9.

המספר הסידורי של חלק הסומה	המספר הגדול ביותר של קוביות שחורות	המספר הקטן ביותר של קוביות לבנות
1	2	1
2	3	1
3	3	1
4	2	2
5	3	1
6	3	1
7	2	2
סכום	**18**	**9**

בדומה לטנגרם, מספר הצורות שניתן להרכיב מחלקי קוביית סומה נראה כמעט בלתי מוגבל. בעיני מתמטיקאים רבים, קוביית סומה נתפסת לתואם התלת־ממדי המוצלח ביותר של משחק הטנגרם.

קישורים

- ספר גאוגברה עם מספר חידות עבור שניים, שלושה ושבעה חלקים של קוביית סומה:
https://www.geogebra.org/m/kvqyz3at
- אתר אינטרנט באנגלית עם חידות נוספות:
https://home.adelphi.edu/~stemkoski/mathematrix/somacube.html
- יישומון לטלפון חכם:
https://play.google.com/store/apps/details?id=sk.martinflorek.somacube&hl=en

ביבליוגרפיה

- אסמן, ד'. (1996). הטנגרם - כלי עזר בהוראת המתמטיקה. *מספר חזק 13 (בית ברל)*, 6-13.
- מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי. (2020). *קובייה ועוד קובייה*. אוחזר מתוך אוגדן לפיתוח ראייה מרחבית לכיתות א'-ב':
https://ymath.haifa.ac.il/images/stories/part3/teachers/ogdan-spatial-perception/9-building_with_cubes.pdf
- סגרה, ס'. (2023). המשחק "הקס". *מספר חזק 2000, 34*, 62-71.
- סגרה, ס'. (2022). חידות חיתוך והרכבה. *מספר חזק 2000, 33*, 46-55.
- פדלון, ל', & פטקין, ד'. (2012). פיתוח תפיסה מרחבית אצל בנים ובנות בכיתה ג' באמצעות יחידת הוראה חוץ קוריקולרית. *מספר חזק 2000, 21*, 31-36.
- Battista, M. T. (1999). The Importance of Spatial Structuring in Geometric Reasoning. *Teaching Children Mathematics*, *6*(3), 170–177. תרגום לעברית ע"י ב' סגליס נמצא כאן
- Brunvoll, J., Cyvin, B., Cyvin, E., Cyvin, S., Paus, A., Stlevik, M., & Stlevik, R. (1986). The computerized Soma cube. *Computers and Mathematics with Applications*, *12*(1-2 PART B), 113–121.
- Conway, J. H. (1982). Pursuing Puzzles Purposefully. In J. H. Conway, R. K. Guy, & E. R. Berlekamp, *Winning Ways for your Mathematical Plays* (p. 735). Academic Press.
- Domínguez Martínez, A. (2021). *Soma.* From Tinkercad: https://www.tinkercad.com/things/6XwQDKLAkXH-soma
- Gardner, M. (1987). The Soma Cube. In M. Gardner, *The Second Book of Mathematical Puzzles and Diversions* (pp. 65-77). Chicago: The University of Chicago Press.
- Van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. *Teaching Children Mathematics*, *5*(6), 310–316. תרגום לעברית ע"י מ' סוקניק נמצא כאן
- Xistouri, X., & Pitta-Pantazi, D. (2011). Elementary students' transformational geometry abilities and cognitive style. *Proceedings of Seventh Conference of the European Research in Mathematics Education* (p. 578-587). Rzeszów, Poland.: University of Rzeszów.



דיווחים מהשטח

דובי הקוטב הצפוני באים לבקר בשיעורי המתמטיקה

אושרת אוחיון
מורה, מרצה ומדריכת מתמטיקה במחוז צפון.

דובי הקוטב הצפוני באים לבקר בשיעורי המתמטיקה

אושרת אוחיון

תקציר

בכתבה זו מוצגת יחידת הוראה המשולבת למידה בתחום הגאומטריה (זיהוי סוגים שונים של מצולעים במַנָּחים שונים) ובתחום חקר הנתונים (איסוף, ניתוח והצגת נתונים). העבודה של התלמידים כללה שילוב היבטים אומנותיים באמצעות ריצוף דגמים של דובי קוטב במצולעים הגזורים מנייר צבעוני. הלמידה נערכה תוך כדי פיתוח מיומנויות המחשב: עבודה בסביבה שיתופית בגוגל דרייב, ובתוך כך שימוש במצגת שיתופית, בניית דיאגרמות ועיצוב התוצר הסופי ב־WORD.

מילות מפתח:
למידה שיתופית, שילוב כלים טכנולוגיים, מצולעים, דיאגרמות.

מבוא

בכתבה זו מתוארת יחידת הוראה שהופעלה בקרב תלמידי כיתות ד'-ה' ובה צורפו בד בבד שני תחומי דעת שונים: מתמטיקה וקיימות. בתחום המתמטיקה היה המיקוד בשני נושאים מתוך תוכנית הלימודים במתמטיקה לכיתות ד'-ה': סוגי מצולעים וחקר נתונים. מבחינת הגאומטריה התלמידים התבקשו לנתח איור של דוב הקוטב הצפוני שמרוצף במצולעים מסוגים שונים; מבחינת חקר הנתונים התלמידים התבקשו למיין את המצולעים לסוגים שונים, ולבנות תרשים (דיאגרמה) הממחיש את התפלגות הסוגים האלה. התחום השני שנכלל ביחידת ההוראה היה קיימות. קיימות היא הדרך לשמר ולשפר מערכות אקולוגיות על פני כדור הארץ (לקוח מכאן). מבחינת הקיימות היה המיקוד בבעיית ההתחממות הגלובלית הפוגעת בדובי הקוטב הצפוני. יחידת הוראה בין־תחומית מעין זו מציבה אתגר גם למורה וגם לתלמידים, יוצרת אצלם עניין ומעוררת את סקרנותם של התלמידים. כדי ליצור למידה חווייתית ומגוונת הוטמע ביחידת ההוראה גם שימוש במיומנויות מחשב מגוונות כגון עבודה בגוגל דרייב, חיפוש מידע באתרי תוכן, יצירת דיאגרמה באמצעות תוכנת WORD, ושילוב יצירה הכוללת סרטוט, גזירה והדבקה.

מהלך הפעילות

יחידת ההוראה נפתחה בהקרנת סרטון המציג את מצוקתם של דובי הקוטב הצפוני. לאחר הקרנת הסרטון התקיים דיון עם התלמידים על מצבם של דובי הקוטב הצפוני. חלקם גילו ידע ואמרו כי דובי הקוטב הצפוני מצויים בסכנת הכחדה בשל בעיית ההתחממות הגלובלית. לאחר השיח פתחו התלמידים תיבת דואר GMAIL לקבלת קישור למצגת שיתופית (קישור למצגת השיתופית).

איור 1:
שקף פתיחה



לתלמידים הוסבר שביחידת הוראה זו הם יתנסו בלמידה שיתופית תוך כדי שימוש במצגת שיתופית, וכחלק מההתנסות ישכללו את מיומנויות השימוש באמצעים טכנולוגיים. יש לציין כי זוהי התנסותם הראשונה של התלמידים בסוג למידה כזה. הוסברו היתרונות של הלמידה השיתופית, והושם דגש על כך שהתלמידים מצופים לכבד איש את רעהו במהלך העבודה.

הוסבר שלכל אחד מהם הרשות לעיין בשקפים של חבריו לכיתה, אך אין לו רשות לערוך, למחוק או לשנות דבר בשקף של חבריו בכיתה.

איור 2:

הנחיות ליצירת השקפים על ידי התלמידים



משימה ראשונה

משימה זו כללה סקירת ספרות קצרה, שמטרתה לחשוף את התלמידים לבעיית דובי הקוטב הצפוני. התלמידים התבקשו לפתוח את השקף, לכתוב את שמם בראשו, ולהשיב על השאלות המוצגות בו.

איור 3:

משימת פתיחה



משימה שנייה

התלמידים התבקשו לכתוב בחיפוש תמונות בגוגל את הביטוי באנגלית "GEOMETRIC BEAR" במטרה לקבל תוצאות רבות יותר אם כותבים באנגלית. לאחר מכן לבחור מתוך מאגר הדגמים דגם של דוב הבנוי מצורות גאומטריות, להעתיקו לשקף חדש במצגת השיתופית, וליצור מקרא אשר מְמַפֶּה את סוגי המצולעים השונים המצויים בדגם הנבחר.

איור 4:

דוגמה לדגם של דוב הבנוי מצורות גאומטריות



בעת העבודה של התלמידים ניתן היה להבחין בדיפרנציאליות בין הלומדים. חלקם לא הזדקקו לעזרה או להסבר נוסף של המורה, ומעטים הזדקקו לתיווך ולסיוע. למשל, אחת הבנות שהתקשתה ביקשה לבחור בדגם הבסיסי שהוצג בכיתה כדוגמה, המופיע להלן באיור 4. ניתן לשער כי הסיבה לכך הייתה מיעוט המצולעים שבדגם הבסיסי, שמצריך התמודדות מצומצמת עם הסרטוט והגזירה. לעומת זאת, ניתן היה לראות כי התלמידים המתקדמים במתמטיקה בחרו דגמים מורכבים שבהם סוגים מגוונים של מצולעים וכמות רבה של מצולעים. דגמים מורכבים אלו הצריכו עבודה רבה בסרטוט וביצירת הדגם.

איור 5:

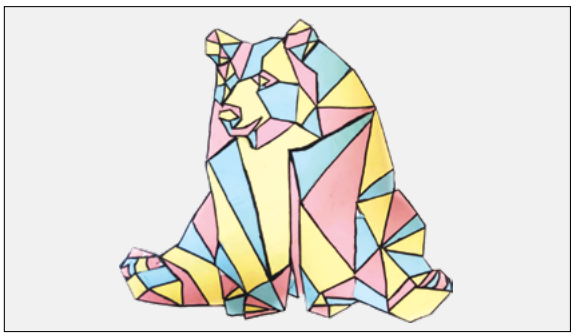
דוגמה לדגם מורכב שבחרה תלמידה מתקדמת במתמטיקה



משני הדגמים שבאיור 6 ו־7 ניתן להבחין בשוני בין התלמידים מבחינת הבחירה ואופן הביצוע.

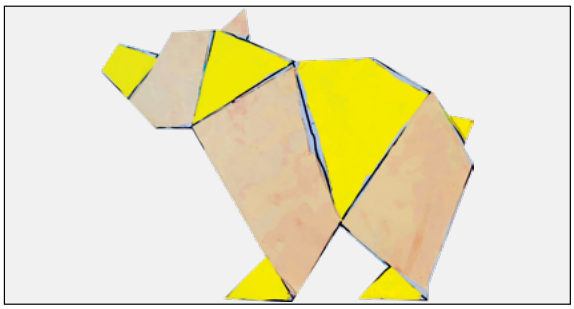
איור 6:

דוגמה לעבודה של תלמידה מתקדמת במתמטיקה



איור 7:

דוגמה לעבודה של תלמידה מתקשה במתמטיקה



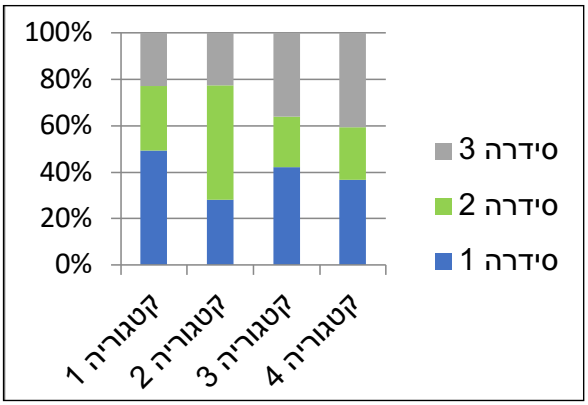
משימה שלישית

בשלב הזה הוסבר לתלמידים כיצד ניתן לבנות דיאגרמה המציגה את התפלגות המצולעים שבדגם. כל תלמיד יצר דיאגרמה וצירף אותה למצגת. התלמידים נחשפו ללימוד יצירת דיאגרמה באמצעות שימוש ב־WORD.

לתלמידים המתקדמים הוסבר כיצד אפשר להפוך את הדיאגרמה לתרשים בצורת עוגה, לשנות גופנים וצבעים ואף לעצב את התרשים בתלת־ממד ובגוונים שונים. כמו כן, נערך דיון על התפלגות האחוזים.

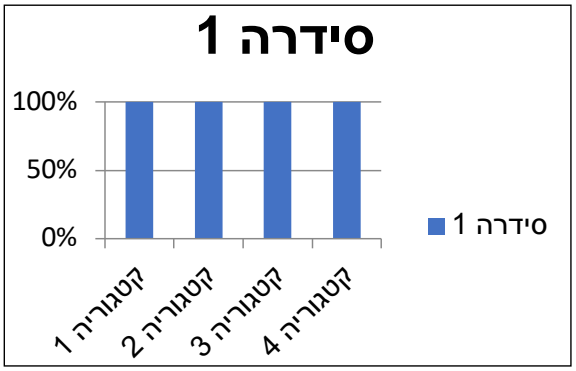
איור 8:

דוגמה לדיאגרמה שנוצרה על ידי אחד התלמידים באמצעות WORD



איור 9:

דוגמה לדיאגרמה שנוצרה על ידי אחד התלמידים לאחר מחיקת שתי הסדרות



משימה רביעית

בשלב הזה חולק לתלמידים גיליון בריסטול לבן, שאותו הצמידו ללוח הכיתה, ועליו הוקרנו הדגמים שיצרו כל התלמידים - דגם של **כל אחד** בתורו. לאחר כל הקרנה התבקש כל תלמיד שהדגם שלו הוקרן על הגיליון, להדגיש בעזרת סרגל ועיפרון את קווי המתאר של הדגם שיצר, ולסרטט את הדוב. בתום הדגשת קווי המתאר הסיר התלמיד את הסרטוט, הניחו על גבי השולחן או על רצפת הכיתה, והדגיש בעזרת מַצְבֵּעַ (טוש) בצבע שחור את הקווים. בתום כל ההקרנות ומלאכת הסרטוט בקרב כל התלמידים חולקו להם דפים צבעוניים, והם התבקשו לרצף בעזרתם את כל המצולעים המרכיבים את דוב הקוטב הצפוני שהתקבל בדגם שבחרו.

דוגמאות לעבודת התלמידים:

איור 10:

סרטוט דגם מורכב



איור 11:

סרטוט דגם מורכב



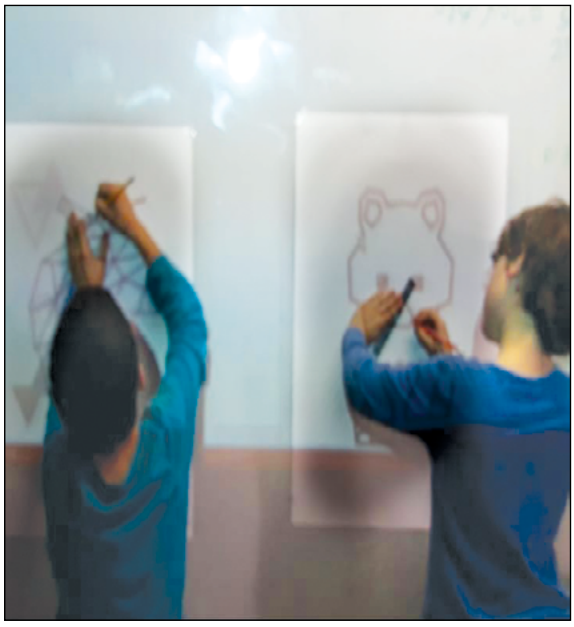
איור 12:

סרטוט דגם פשוט בידי תלמידה עם סיוע



איור 13:

סרטוט הדגם מתוך הדגם המוקרן על הלוח



לאחר שהושלמה הכנת התוצרים של כל תלמידי הכיתה, הכינו התלמידים בהנחיית המורה תערוכה ניידת המכילה את כל הדגמים והדיאגרמות שיצרו כל התלמידים.

איור 14:
תערוכת התוצרים



בשלב האחרון כתב כל אחד מהתלמידים רפלקציה על תהליך הלמידה שחווה, וסיכום קצר משותף המציג את התכנים שנלמדו. מתוך סיכומיהם עלו הדברים הבאים, לדוגמה:

- "נהניתי מאוד ללמוד על דובי הקוטב, זו פעם ראשונה שאני לומדת בלמידה שיתופית, ואני חושבת שצריך ללמוד כך בכל מקצועות הלימוד. למדתי כלים חדשים, למדתי להכין דיאגרמה ולשתף מידע. אהבתי לעבוד בשיתוף פעולה".
- "זה השיעור הכי מיוחד שהיה לי. ואני מרוצה מהדגם שהכנתי".
- "בהתחלה היו לי חששות, אבל אושרת (המורה, הוספת המחברת) ליוותה אותי, ופתאום הרגשתי שזה לא מסובך ושאני יכול. אהבתי מאוד לראות שכולנו כותבים באותו הזמן במצגת אחת. זו פעם ראשונה שאני עובד במצגת שיתופית, ואהבתי מאוד שאושרת לימדה אותנו להגיב תגובות משמחות אחד לשני במצגת".

בתיאום עם המורות בשכבה ביקרו תלמידי כיתות ד'-ה' בשאר הכיתות בבית הספר, והסבירו על מצוקת דובי הקוטב הצפוני, ועל בעיית הקיימות שמאפיינת את כדור הארץ בעידן הנוכחי. הם עמדו מול קהל, הציגו את הבעיה באופן ברור ורהוט, וחשו מועצמים מהחוויה. המורה התרגשה לקרוא את הדברים שהתלמידים כתבו על יחידת ההוראה ועל דרך התנהלותה, ובמיוחד התפעמה מהעמידה הבטוחה של תלמידיה מול חבריהם לספסל הלימודים.

סיכום רפלקטיבי

ניתן לסכם ולומר, שבאמצעות למידה בין־תחומית שכללה משימות בתחום הגאומטריה (סוגי מצולעים), בחקר נתונים (איסוף נתונים, ניתוח והצגתם בדיאגרמה) ובתחום הקיימות (בעיית הדוב של הקוטב הצפוני) המורה הובילה את התלמידים בהצלחה ללמידה שיתופית, המשלבת היבטים אומנותיים של יצירת דגמים גאומטריים, של דובי קוטב המורכבים ממצולעים.

בכל שלבי הלמידה ניתן היה להבחין בחדוות היצירה בקרב התלמידים, והלמידה הייתה ללא ספק למידה משמעותית. המורה נהנתה מאוד לראות את התלמידים מתקדמים, כל אחד בקצב שלו, משלב לשלב, מסייעים זה לזה וחולקים ביניהם מידע. במישרין ובעקיפין למדו התלמידים בהנחיית המורה להגיב איש לרעהו בדרך ארץ באמצעות המצגת השיתופית. התמיכה שהתלמידים גילו איש כלפי חברו הסבה שביעות רצון רבה למורה שקראה את התגובות התומכות והמפרגנות שכתבו חברי הכיתה זה לזה.

לסיכום, ניתן לומר, שהלמידה השיתופית מאפשרת למורה לפרוץ עבור התלמידים את גבולות המרחב הכיתתי, כמו כן להתאים את סגנון הלמידה לצורכיהם השונים של התלמידים. חשוב לציין, כי פעילויות מסוג זה מזמנות לתלמידים דרך לפתח את היצירתיות, להתנסות במיומנויות שונות, ולפתח אותן תוך כדי שילוב של למידה משותפת, הנעשית בהנאה ומתוך חווייתיות, שיוצרות למידה משמעותית.

נשמח לשמוע את דעתכם

כניסה לטופס משוב מקוון

