מספר יצקן 2000

גיליון 36



כתב עת להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי | **אוקטובר 2025**

ראש מל"מ אוניברסיטת חיפה: פרופ' רוזה לייקין
ראש מל"מ נכנס אוניברסיטת חיפה: ד"ר שי אולשר

ניהול מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי: פרופ' ראיסה גוברמן וד"ר אתי נוי

חברי המערכת (בסדר א-ב):
ד"ר ג'וני אוברמן ■ ד"ר מיכל איילון ■ ד"ר בת-שבע אילני ■ פרופ' מריטה ברבש ■ פרופ' אביקם גזית ■ פרופ' שרה הרשקוביץ ■ פרופ' מיכל טבח ■ ד"ר חנה לב-זמיר ■ ד"ר אתי נוי ■ ד"ר דורית נריה ■ ד"ר מיכל סוקניק ■ פרופ' איליה סיניצקי ■ ד"ר אבתיסאם עבד אלחאלק ■ ד"ר עדי עראקי ■ ד"ר אלכס פרידלנדר ■ פרופ' פסיה צמיר ■ ד"ר ענת קלמר-שורץ ■ מיכאל שימנוביץ'

עורכת כתב העת: פרופ' ראיסה גוברמן
עורכת משנה: תמי ניר בוכבינדר
עריכת הלשון: מרים מילשטיין

ייעוץ מתמטי: פרופ' אלי ברגר וראניה ריאן
עיצוב, עימוד ועריכה גרפית: רוית מדמוני
תמונות, אייקונים ואיורים: רוית מדמוני

כתובת המערכת:
מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי ■ הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה ■ שד' אבא חושי 199, הר הכרמל
חיפה, ת"ד 3338, מיקוד 3103301 ■ טל: 04-8240646 ■ פקס: 04-8288073 ■ email: mathcntr@edu.haifa.ac.il

ISSN (online): 2618-009X ■ ISSN (print): 2618-0081

מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי

المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلة الابتدائية

מספר חזק

2000

גיליון מספר 36

אוקטובר 2025

משרד החינוך
המזכירות הפדגוגית -
אגף א' מדעים
הפיקוח על
הוראת המתמטיקה

אוניברסיטת חיפה
UNIVERSITY OF HAIFA
جامعة حيفا
הפקולטה לחינוך

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי
טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז המורים מופעל על ידי אוניברסיטת חיפה עבור משרד החינוך במסגרת מכרז מס' 22/11.2020:
הקמה והפעלה של מרכזי מורים ארציים במקצועות הבאים: מדעים, טכנולוגיה ומתמטיקה.

© כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

קוֹרְאוֹת יְקָרוֹת שָׁלוֹם,

אנו שמחות להגיש לכם את הגיליון ה־36 של **מספר חזק** 2000, ובפתחו הזדמנות לחגוג את המספר 36 עצמו - מספר בעל תכונות מתמטיות מעניינות, כפי שמוצג במאמר "**על המספר 36**". נוסף להיותו מספר ריבועי (6×6) הוא גם מספר משולשי, ואף סכום של מספרים ראשוניים תאומים (17+19). המאמר שוזר יחד עובדות מתמטיות מרתקות עם הצעות לפעילויות יישומיות בכיתה, ומדגים כיצד מספר יחיד עשוי לשמש שער לעולם שלם של חקר וגילוי.

מן העיסוק במספר אחד אנו עוברים למסע רחב יריעה יותר במאמרה של פרופ' עטרה שריקי, "**מסע בין חמש שיטות כתיבה של מספרים טבעיים ואפס**". המחברת לוקחת אותנו לתרבויות עתיקות - מצרים, מאיה, סין ורומא - ומציגה כיצד כל אחת מהן פיתחה דרכים ייחודיות לייצוג מספרים. ההשוואה לשיטה העשרונית המוכרת מעמיקה את הבנת העקרונות המתמטיים הבסיסיים כמו בסיס 10, ערך מקום ומשמעות הופעתה של הספרה אפס. חשיפת התלמידים לשיטות כתיבה שונות אינה רק הרחבת אופקים תרבותית, אלא גם כלי פדגוגי משמעותי לפיתוח גמישות מחשבתית והעמקת ההבנה של מושג המספר.

מהי הדרך הטובה ביותר להבין מספרים? שאלה זו מובילה אותנו לשני מאמרים מרכזיים נוספים. במאמרו "**עקרונות ליבה של מתמטיקה בגיל הצעיר: מושג המספר ופעולות חיבור וחיסור**", פרופ' איליה סיניצקי מדגיש את החשיבות שבאיזון בין שטף חישובי להבנה מעמיקה, קידום שיח מתמטי ופיתוח חשיבה ביקורתית ויצירתית. הוא מזכיר כי תפקידנו המורים אינו להסתפק בהקניית אלגוריתמים ונוסחאות לתלמידים, אלא להובילם להבנה עמוקה של הרציונל המתמטי שגלום בפעולות שהם מבצעים.

בהמשך לכך, מחברי המאמר "**כמויות רציפות בחינוך מתמטי - מבט בין־תחומי**", פרופ' טלי רוה וסיימון גרג, מערערים על ההנחה הרווחת כי תפיסת מספרים בדידים היא אינטואיטיבית יותר לילדים צעירים. הכותבים מציגים את "מערכת אומדן הגדלים" (AMS), שלפיה, דווקא גדלים רציפים (כמו אורך, שטח ונפח) הם טבעיים וקלים יותר לתפיסה בגיל הרך. לטענת המחברים, שימוש בגדלים רציפים כבסיס להוראת מושגים מתמטיים מורכבים משמשת "פיגום" יעיל לבניית הבנה מתמטית יציבה. דוגמאות יומיומיות, כגון הוויכוח הילדי "מי גבוה יותר", ממחישות עד כמה אינטואיציה זו מושרשת בהתנסותם הטבעית של הילדים.

מן ההיבט התיאורטי אנו פונים אל היבטים יישומיים בכיתה. ד"ר סבינה סגרה במאמרה "**המשחק איקס עיגול**", מציגה כיצד משחק פשוט ופופולרי יכול להפוך לכלי משמעותי בלמידת מתמטיקה. המשחק מזמן דיון סביב מושגים כמו אסטרטגיה, דפוסים, סימטריה והסקת מסקנות. המחברת מדגישה את היתרון שבגילוי עקרונות מתמטיים מתוך התנסות פעילה ולא דרך הסבר מופשט, ומעודדת אותנו, המורים, ליצור מרחב של סקרנות, שיתוף וחקירה בכיתה.

מאמר חשוב נוסף בגיליון הוא מאמרו של ד"ר חסן איוב, "**מדוגמאות להכללה - משימה דינמית, משולש ישר זווית לקידום שיח מתמטי**". המאמר מציג מקרה פדגוגי של משימת הערכה אינטראקטיבית בגאומטריה המיועדת לכיתות ד'-ו'. באמצעות יישומון דינמי (GeoGebra), התלמידים מתבקשים ליצור דוגמאות מגוונות של משולשים ישרי זווית. המערכת אוספת את כל הדוגמאות ומציגה אותן במפה חזותית, המשמשת בסיס לדיון כיתתי עשיר. דיון זה מוביל את התלמידים מתצפית בדוגמאות פרטניות להבנה והכללה של המושגים הגאומטריים. המאמר ממחיש את הפוטנציאל של טכנולוגיה כגורם תומך בהוראה המעודדת חקר, דיאלוג ופיתוח חשיבה מתמטית.

גיליון זה מציע עושר של רעיונות, תיאורטיים ומעשיים כאחד, שתוכלו ליישם בעבודתכם החינוכית. המאמרים המגוונים בגיליון מדגישים מסר משותף: הוראת המתמטיקה היא מסע מסקרן אל עומק ההבנה, מסע שבו למשחקים, לסיפורים היסטוריים, לטכנולוגיה ולדיונים פתוחים יש תפקיד מרכזי בהוראת המתמטיקה.

לסיום, נזכיר כי כתב העת "מספר חזק 2000" הוא כתב עת שפיט מאז ינואר 2017, היוצא לאור אחת לשנה. אנו מזמינות אתכם לשלוח אלינו מאמרים, פעילויות שפיתחתם, משחקים או יוזמות חינוכיות אחרות, לשיתוף עם קהילת מורי המתמטיקה וכלל העוסקים בחינוך המתמטי.

אנו מאחלות לכם קריאה מהנה, העשרת הידע והרחבת ארגז הכלים הפדגוגי. המשיכו להצטיין בעבודתכם החשובה, לשמש מקור השראה לתלמידיכם, וליצור חוויות למידה מעשירות ומצמיחות.

בברכה,

פרופ' ראיסה גוברמן - עורכת כתב העת

ד"ר אתי נוי - מנהלת מרכז מורים

תגובותיכם לכתב העת חשובות לנו מאוד.
נא מלאו את **טופס המשוב**.



אידה לדרך

על המספר 36

המאמר מדגים כיצד ניתן להפוך מספר אקראי לכאורה, כמו מספר הגיליון, לנקודת מוצא לחקירה מתמטית מעמיקה ומרתקת. למספר 36 תכונות מגוונות: הוא מספר ריבועי, משולשי, סכום של ראשוניים תאומים ועוד. הצעה יישומית לכיתה: בחרו מספר בעל משמעות לתלמידים (למשל, מספר התלמידים בכיתה או תאריך היום), וצאו יחד למסע גילוי של תכונותיו. פעילות מסוג זה הופכת את המתמטיקה לרלוונטית, ומעוררת את סקרנותם הטבעית של התלמידים.

כמויות רציפות בחינוך מתמטי – מבט בין־תחומי

המאמר מציע נקודת מבט מרעננת על האופן שבו ילדים תופסים כמויות. בעוד שהוראת המתמטיקה מתמקדת לרוב במספרים בדידים (כמו ספירת עצמים), במאמר נטען כי ההבנה של כמויות רציפות (כמו אורך או שטח) היא אינטואיטיבית יותר לילדים צעירים. מורים יכולים לנצל אינטואיציה זו כ"פיגום" לבניית מושגים מתמטיים. לדוגמה, לפני שמלמדים שברים באופן פורמלי, אפשר לעסוק רבות בחלוקה של רצפים, כמו חלוקת חבל, או רצועת נייר לחלקים שווים.

עקרונות ליבה של מתמטיקה בגיל הצעיר: מושג המספר ופעולות חיבור וחיסור

מחבר המאמר מדגיש את חשיבותו של שיח מתמטי בכיתה לצד פיתוח שטף חישובי. מטרתנו אינה רק להקנות לתלמידים את ה"איך" לבצע תרגיל, אלא לאפשר להם להבין את ה"למה" דרך זו היא הנכונה, ואיך ניתן להסביר אותה. יישום בכיתה: עודדו את התלמידים לפתור בעיות בדרכים מגוונות, והקדישו זמן לדיון והשוואה בין הפתרונות השונים. יצירת אווירה שבה טעויות נתפסות כהזדמנויות ללמידה תורמת לפיתוח חשיבה מתמטית עמוקה ובטוחה.

מדוגמאות להכללה – משימה דינמית, משולש ישר זווית לקידום שיח מתמטי

במאמר מודגם כיצד ניתן לרתום את הטכנולוגיה כדי לקדם שיח מתמטי עשיר והבנה מושגית. באמצעות יישומון דינמי התלמידים לא רק מתרגלים בניית משולשים ישרי זווית, אלא גם חוקרים את המושג לעומק, מתנסים במגוון רחב של דוגמאות ומגיעים בעצמם להכללות. כך הופכת הטכנולוגיה לכלי המשנה את תפקיד המורים: ממוסרים ידע למנחים חקר. במקום לתת לתלמידים הגדרות יבשות, אפשר ליצור עבורם סביבות אינטראקטיביות שיאפשרו להם לבנות את הידע בעצמם.

על בסיסים, סימנים ומספרים: מסע בין חמש שיטות כתיבה של מספרים טבעיים ואפס

מחברת המאמר מזכירה לנו כי השיטה העשרונית, המוכרת כל כך, אינה הדרך היחידה לייצוג מספרים. חשיפת התלמידים לשיטות קדומות, כמו השיטה המצרית או שיטת המאיה, היא הזדמנות לדון בעקרונות יסוד של המבנה העשרוני: חשיבותו של האפס, ערך המקום והבסיס 10. שאלה למחשבה בכיתה: כיצד היו נראים חיינו ללא הספרה אפס? דיון כזה יכול להוביל להבנה עמוקה יותר של המערכת המספרית ולפתח גמישות מחשבתית.

המשחק איקס עיגול

במאמר מתואר כיצד משחק ילדים פשוט ומוכר יכול להפוך לכלי פדגוגי עשיר. המשחק "איקס עיגול" מזמן דיון על אסטרטגיות, ניתוח מהלכים, זיהוי דפוסים וסימטריה. המסר למורים ברור: אל תהססו לשלב משחקים בשיעורי מתמטיקה. תפקידינו הוא לתווך את הלמידה המתרחשת תוך כדי משחק, לשאול את השאלות הנכונות ("איך ידעת שזה המהלך המנצח?"), ולהוביל את התלמידים מתובנות אינטואיטיביות להבנות מתמטיות מפורשות.

תוכן עניינים

על המספר:

המספר 36 8
אתי נוי וראיסה גוברמן

זרקור על:

כמויות רציפות בחינוך מתמטי - מבט בין־תחומי 14
טלי רוה וסיימון גרג

עקרונות ליבה של מתמטיקה בגיל הצעיר:
מושג המספר ופעולות חיבור וחיסור 28
איליה סיניצקי

במבט אחר:

מדוגמאות להכללה - משימה דינמית, משולש ישר־זווית לקידום שיח מתמטי 38
חסן איוב

תולדות המתמטיקה:

על בסיסים, סימנים ומספרים:
מסע בין חמש שיטות כתיבה של מספרים טבעיים ואפס 48
עטרה שריקי

משחקים מתמטיים:

המשחק איקס עיגול 58
סבינה סגרה



על המספר

המספר 36

ד"ר אתי נוי

מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי,
אוניברסיטת חיפה
המכללה האקדמית אורנים

פרופ' ראיסה גוברמן

מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי,
אוניברסיטת חיפה
האקדמית גורדון

מאפייניו של המספר 36

אתי נוי וראיסה גוברמן

מספרו של הגיליון הנוכחי הוא 36. נציג בפניכם עובדות מעניינות על המספר הזה, נחשוף את תכונותיו המתמטיות המגוונות, ונציג דוגמאות לפעילויות הקשורות אליו.

תכונות מתמטיות

- 36 הוא מספר טבעי זוגי, העוקב ל־35 והקודם ל־37. המספר 36 על ישר המספרים:



- 36 הוא **סכום של מספרים ראשוניים תאומים:**

17+19=36

בתורת המספרים, מספרים ראשוניים תאומים הם זוג מספרים ראשוניים שההפרש ביניהם הוא 2.

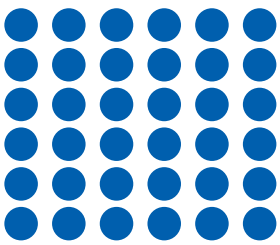
- **ניתן להציג את המספר 36 כמספר ריבועי וגם כמספר משולשי.**

מספר **ריבועי** הוא מספר טבעי המתקבל מכפל של מספר בעצמו, כלומר הוא מהצורה $n \times n = n^2$ כאשר n טבעי.

36 הוא ריבוע של המספר 6, ולכן יירשם $36=6^2$.

המשמעות הגאומטרית היא שניתן לסדר 36 עצמים בצורת ריבוע (איור 1).

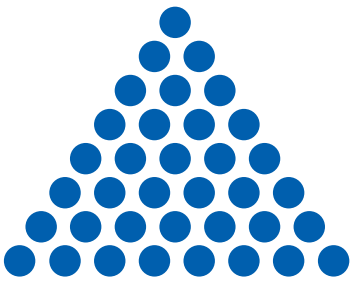
איור 1:



בתורת המספרים, מספר טבעי T נקרא מספר **משולשי** אם אפשר לסדר T עצמים בצורת משולש שווה־צלעות. המספרים המשולשיים הראשונים הם 1,3,6,10,15,21,28,**36**,45. ישנם אין־סוף מספרים משולשיים.

36 נקרא גם מספר **משולשי**, והמשמעות היא שניתן לסדר 36 עצמים בצורת משולש שווה־צלעות (איור 2).

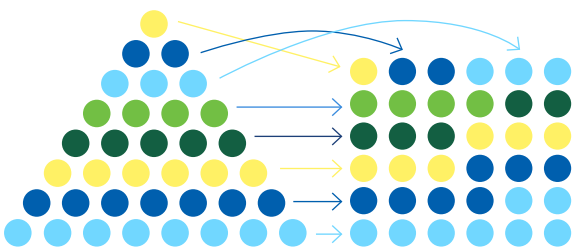
איור 2:



באיור 3 להלן ניתן לראות את הקשר בין ייצוגו של המספר 36 כמספר משולשי לבין ייצוגו כמספר ריבועי:

איור 3:

(Wikipedia contributors, 2025[1])



- **36 הוא מספר בעל מחלקים רבים** ביחס לגודלו. למספר זה יש **9 מחלקים טבעיים:**

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, **36**

1. Wikipedia contributors. (2025b). 36 (number). In Wikipedia, The Free Encyclopedia. Retrieved May 31, 2025, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=36_(number)&oldid=1291941213#/media/File:Square_triangular_number_36.svg

- **36 הוא מספר פריק במיוחד.** מספר פריק במיוחד הוא מספר שלם חיובי שיש לו יותר מחלקים מכל המספרים הקטנים ממנו (כלומר לכל מספר טבעי הקטן מ־36 יש פחות מחלקים). דוגמאות למספרים פריקים במיוחד:

1,2,4,6,12,24,**36**,48,60,120,180,240,360,720,840...

- **36 הוא מספר שופע (Abundant Number):** מספר שופע הוא מספר טבעי שסכום מחלקיו (מלבד עצמו) גדול מהמספר עצמו.

באופן פורמלי: יהי n מספר טבעי, ונסמן ב־$S(n)$ את סכום המחלקים החיוביים של n, למעט n עצמו. אם מתקיים $S(n)>n$ אזי n מספר שופע.

36 הוא מספר שופע כי סכום מחלקיו (ללא עצמו) גדול ממנו:

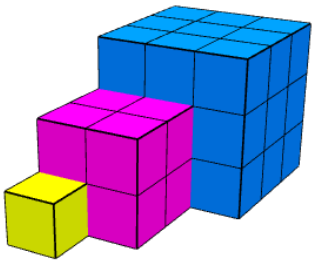
$1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 = 55 > 36$

- **36 הוא מספר הרשאד (Harshad Number)** מספר הרשאד הוא מספר שלם המתחלק בסכום ספרותיו.

36 מתחלק בסכום ספרותיו: $3 + 6 = 9 \longrightarrow 36 \div 9 = 4$ (פעילות) - מספר הרשאד

- ניתן לכתוב את המספר **36** באופן הבא: $36=3^3+3^3=1^3+2^3$. סדרה זו של מספרים בחזקה השלישית יוצרת את הסדרה הצורנית הבאה (איור 4):

איור 4:

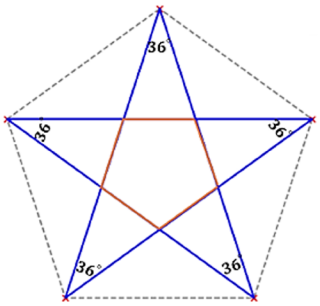


- 36 הוא מכפלה של חזקות של המספרים הראשוניים 2 ו־3, $36=2^2\times3^2$. פירוק זה מדגים את **המשפט היסודי של האריתמטיקה**, שלפיו כל מספר טבעי, גדול מ־1, ניתן לפירוק יחיד למכפלת מספרים ראשוניים (עד כדי סדר הגורמים).

- **המספר 36 בהקשר גאומטרי**

בגאומטריה, בכל קודקוד של פנטגרם, הנוצר מאלכסוני מחומש משוכלל, נוצרת זווית בת 36 מעלות (איור 5).

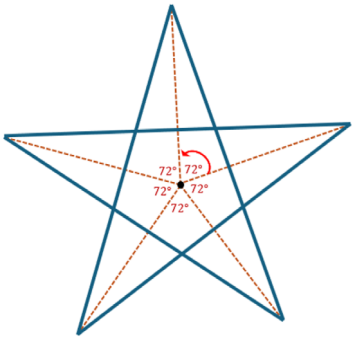
איור 5:



מאפיינים גאומטריים של כוכב מחומש:

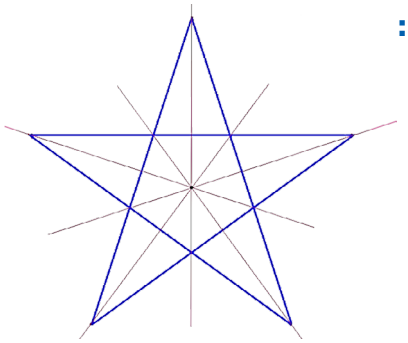
1. הזוויות הפנימיות של המחומש המשוכלל שוות ל־108°.
2. הזווית שבין שני קטעים היוצרים את ה"שפיץ" של הכוכב שווה ל־36°.
3. לפנטגרם יש סימטריה סיבובית מסדר 5. משמעות הדבר היא שניתן לסובב אותו סביב מרכזו ב־72° והוא יתלכד עם עצמו. במהלך סיבוב שלם של 360°, הפנטגרם יתלכד עם עצמו 5 פעמים, כל 72° ($360^\circ\div5=72^\circ$), (איור 6).

איור 6:



4. לפנטגרם חמישה קווי סימטריה שיקופית. כל קו העובר דרך קודקוד של הפנטגרם ומרכזו, מחלק את הצורה לשני חלקים חופפים. בקיפול לאורך אחד מקווים אלה, שני החצאים יתלכדו במדויק זה על גבי זה (איור 7).

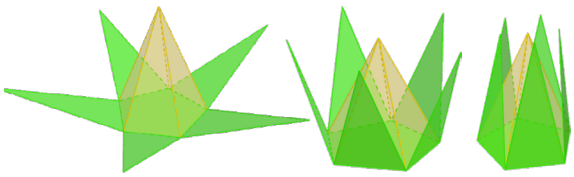
איור 7:



5. אם נגזור את הפנטגרם ונקפל את חמשת המשולשים שווי־השוקיים כלפי מעלה עד שקודקודיהם יפגשו, נקבל פירמידה מחומשת משוכללת (איור 8).

איור 8:

לקוח מכאן

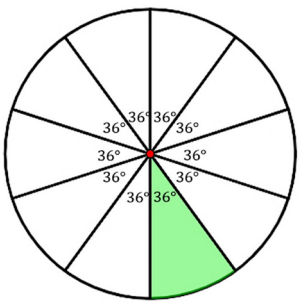


סוף אמצע התחלה

- **מדידת זוויות ומעגל**

אם מחלקים מעגל לעשרה חלקים שווים, נקבל שהזווית המרכזית בכל חלק שווה ל־36° (איור 9).

איור 9:



- **הקשר בין "מגדל קוביות" למספר 36**

מבנה מדורג שבסיסו **משטח של 6×6 קוביות** (36 קוביות בשכבה התחתונה, איור 10), ומעליו שכבות ההולכות וקטנות באופן הבא:

שכבה ראשונה (בסיס): 6×6 = 36 קוביות.

שכבה שנייה: 5×5 = 25 קוביות.

שכבה שלישית: 4×4 = 16 קוביות.

שכבה רביעית: 3×3 = 9 קוביות.

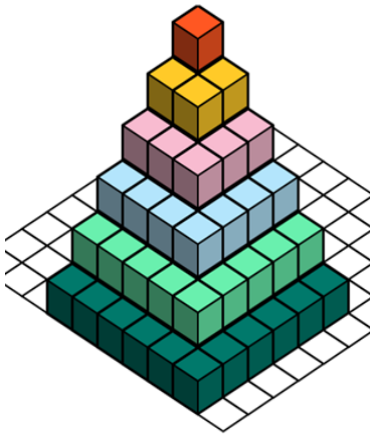
שכבה חמישית: 2×2 = 4 קוביות.

שכבה שישית (קודקוד): 1×1 = 1 קובייה.

יתקבלו בסך הכל 91 קוביות:

$$1+4+9+16+25+36=91$$

איור 10:



מהו הקשר המפתיע ל־36?

כפי שצוין לעיל, 36 הוא מספר פריק במיוחד, ומחלקיו הם: 1,2,3,4,6,9,12,18,36.

סכום כל המחלקים הוא:

$$1+2+3+4+6+9+12+18+36=91$$

מעניין לגלות כי סכום זה שווה בדיוק למספר הקוביות במבנה המדורג שבבסיסו 36 קוביות.

דוגמאות למשימות הקשורות במספר 36

משימה 1

השתמשו ב־36 מדבקות ריבועיות זהות, שכל אחת מהן מייצגת יחידת שטח אחת, לבניית מלבנים שונים.

1. בנו את כל המלבנים האפשריים ששטחם שווה ל־36 יחידות שטח.
2. עבור כל מלבן שמצאתם, חשבו את היקפו.
   מהו ההיקף הגדול ביותר שניתן לקבל?
   מהו ההיקף הקטן ביותר שניתן לקבל?

תשובות:

1. שטח מלבן ניתן לחשב כמכפלת אורכי שתי צלעות סמוכות. ניתן לבנות 5 מלבנים כאלה:

   1×36; 2×18; 3×12; 4×9; 6×6

2. נחפש זוגות של מספרים טבעיים שמכפלתם שווה ל־36.

צלע שנייה	צלע אחת	היקף = 2 × (סכום האורכים של שתי צלעות סמוכות)
1	36	2 × (1 + 36) = **74**
2	18	2 × (2 + 18) = **40**
3	12	2 × (3 + 12) = **30**
4	9	2 × (4 + 9) = **26**
6	6	2 × (6 + 6) = **24**

*שימו לב: זוגות כמו (4×9) ו־(9×4) מתארים את אותו מלבן במנח אחר, לכן אין צורך לחשב פעמיים.

ההיקף הגדול ביותר הוא 74 יחידות אורך, והוא מתקבל במלבנים הארוכים והצרים (1×36 או 36×1).

ההיקף הקטן ביותר הוא 24 יחידות אורך, והוא מתקבל במלבן שהוא ריבוע (6×6).

משימה 2

הציגו את המספר 36 כמכפלה של שני מספרים טבעיים אשר סכומם הוא הקטן ביותר.

תשובות:

אלה המכפלות שניתן להרכיב למספר 36 משני מספרים טבעיים:

1×36; 2×18; 3×12; 4×9; 6×6

הסכום הקטן ביותר מתקבל במכפלה 6×6:

6+6=12

אפשר לקשור את המשימה הזו עם המשימה הקודמת (ההיקף הקטן ביותר של מלבן בעל שטח נתון מתקבל כאשר הצורה היא ריבוע).

משימה 3

כמה מספרים דו־ספרתיים ניתן לקבל אם נתון שספרת העשרות קטנה מספרת היחידות?

תשובה:

36 מספרים.

לפניכם לוח ה־100 שבו סומנו המספרים שבהם ספרת העשרות קטנה מספרת היחידות (איור 11):

איור 11:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

36=8+7+6+5+4+3+2+1

ניתן להיעזר ביישומון הנמצא כאן.

משימה 4

בשנת 2025 תחגוג רויטל את יום הולדתה ה־36. באיזו שנה יהיה גילה שוב מספר ריבועי?

תשובה:

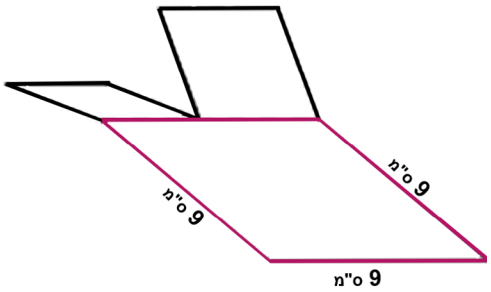
$49=7^2$, 49-36=13, 2025+13=2038

בעוד 13 שנה, בשנת 2038, תחגוג רויטל 49, שהוא מספר ריבועי.

משימה 5

לפניכם מצולע המורכב משלושה מעוינים (איור 12): מעוין גדול (בצבע ורוד) ושני מעוינים קטנים המונחים על צלעותיו. היקף המעוין הגדול הוא 36 ס"מ. מה היקפו של המצולע כולו?

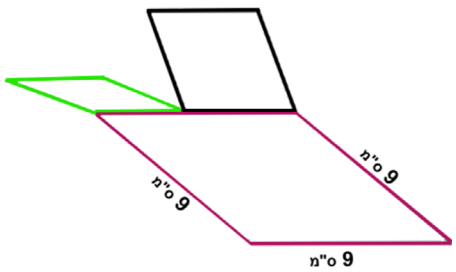
איור 12:



תשובה:

אם היקפו של המעוין הגדול הוא 36 ס"מ, אז אורך כל אחת מצלעותיו הוא 9 ס"מ:

איור 13:



אורך הצלע של המעוין הגדול (הוורוד) שווה לאורך של אחת מצלעותיו של המעוין השחור, ועוד האורך של אחת מצלעותיו של המעוין הירוק.

לכן ניתן להסיק כי אורך צלע אחת של המעוין השחור ועוד אורך צלע אחת של המעוין הירוק יחד שווים ל־9 ס"מ.

נחשב את היקף הצורה:

$$3\times 9+3\times\left(\begin{array}{c}\text{צלע}\\ \text{ירוקה}\end{array}\right)+3\times\left(\begin{array}{c}\text{צלע}\\ \text{שחורה}\end{array}\right)=$$

$$27+3\times\left(\begin{array}{c}\text{צלע}\\ \text{ירוקה}\end{array}+\begin{array}{c}\text{צלע}\\ \text{שחורה}\end{array}\right)=$$

$$27+3\times 9=\mathbf{54}\ \text{ס"מ}$$

משימה 6

1. כתבו את המספר 36 כסכום של מספרים טבעיים עוקבים (קיימות שתי אפשרויות).
2. כתבו את המספר 36 כסכום של מספרים אי־זוגיים עוקבים.

תשובות:

1. $1+2+3+4+5+6+7+8=36$

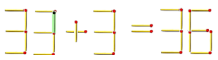
   $11+12+13=36$
2. $1+3+5+7+9+11=36$

משימה 7

1. הזיזו גפרור אחד כדי לקבל שוויון:



תשובות:





2. בתרגילים הבאים הזיזו שני גפרורים כדי לקבל שוויון:





תשובות אפשריות:







זרקור על

כמויות רציפות בחינוך מתמטי - מבט בין תחומי

פרופ' טלי רוה
ראש ההתמחות להתפתחות וחשיבה מתמטית בגיל הרך
המחלקה לחינוך מתמטי, הפקולטה לחינוך
אוניברסיטת חיפה

סיימון גרג
בית הספר הבין־לאומי של טולוז,
טולוז, צרפת



כמויות רציפות בחינוך מתמטי - מבט בין־תחומי

טלי רוה[1] וסיימון גרג

תקציר

כיצד ילדים לומדים מיומנויות בסיסיות כמו הבחנה בין כמויות שונות וספירה? על פי התיאוריה הדומיננטית של מערכת לאומדן כמויות, (Approximate Number System - ANS) בני אדם נולדים עם היכולת להבחין בין כמויות בדידות (כלומר, מספרים). נובע מכך שתוכנית לימודים מוקדמת במתמטיקה יכולה או אף צריכה להתמקד בכמויות בדידות. תיאוריה זו מנחה תוכניות לימודים רבות במתמטיקה מוקדמת ברחבי העולם אשר מתחילות בספירה ואריתמטיקה. אנו מספקים סקירה של ראיות אמפיריות המאתגרות את תיאוריית ה־ANS ומציגים מסגרת תיאורטית עדכנית יותר מהקונצנזוס - מערכת לאומדן גדלים (Approximate Magnitude System - AMS). תיאוריה זו מציעה שגדלים רציפים (כמו שטח, צפיפות, נפח וכדומה) הם אינטואיטיביים יותר ונרכשים מוקדם יותר מאשר היכולת להבין מספרים. באמצעות דוגמאות מפרקטיקות של חינוך מתמטי מוקדם אנו דנים בתועלות הפוטנציאליות של אימוץ גישת ה־AMS ושימוש בגדלים רציפים כפיגומים להבנת מספרים ומושגים מתמטיים מורכבים (כפי שהוצע, למשל, על ידי Davydov). תובנות שהתקבלו ממחקרים המשלבים פסיכולוגיה קוגניטיבית ומחקר חינוכי, עם השתתפות פעילה ותרומה של מורים למתמטיקה בגיל הרך וגננות, עשויות לסייע, הן לפסיכולוגים קוגניטיביים המתעניינים באופן שבו מתפתחות יכולות מתמטיות, והן למחנכים וגננות המחפשים לשפר את תוכנית הלימודים שלהם במתמטיקה. אנו מקווים שמאמר זה יעורר השראה באחרים (בעיקר הבאים מתחום ההוראה) לשקול מחקר בכיוון זה, ויוביל לדיון פורה על תפקידם של גדלים רציפים בהוראת מתמטיקה.

1. tleibovi@univ.haifa.ac.il

מבוא

לפני מספר ימים התווכחו ביניהם הילדים של המחברת הראשונה (בגיל 4 ו־5) "מי גבוה יותר". הם בילו בערך רבע שעה בניסיון למדוד את גובהם בדרכים שונות, ולהוכיח את הטענה שלהם. יום קודם לכן, הבת של המחברת הראשונה כעסה כי אמרנו לה ש־4+4=8. היא רגזה על כך שהוכחנו לה שהסכום נכון כי מנינו אצבעות. אבל זה סתר את הניסיון שלה בגן, שם היא מנתה על האצבעות שלה ושל חברתה, והתוצאה שהתקבלה הייתה 6. לכן היא הציעה "אולי יצא לי 6 בגן כי אצבעות של ילדים קטנות יותר".

המקרים האלה מדגימים עד כמה אינטואיציה של ילדים על מתמטיקה, קשרים בין אובייקטים וחוקיות קיימת ומעסיקה אותם ביום־יום. בהתאם לכך, השאלות שנתמקד בהן במאמר הן - מהי האינטואיציה הזו? האם היא מושתתת על מספר או גודל רציף? וכמה היא משמשת בסיס שעליו בונים תובנות מתמטיות בתוכנית הלימודים הנוכחית בגיל הרך?

מחקרים רבים הנערכים במשך עשורים, מוקדשים לשאלה כיצד ילדים צעירים לומדים מתמטיקה. ידיעה כיצד נרכשות מיומנויות חשבון בסיסיות תאפשר לנו ללמד מתמטיקה ביעילות רבה יותר, באופן הדומה יותר לדרך שבה אנו לומדים מתמטיקה 'באופן טבעי'.

במאמר זה נסקור תחילה את הספרות הקוגניטיבית, ונציג את הקונצנזוס: תיאוריית מערכת לאומדן כמויות (Approximate Number System - ANS) והשלכותיה על תוכניות הלימודים בבתי הספר. לאחר מכן, נציג את הסתייגויותינו מתיאוריה זו ונדון בחלופה, תיאוריית מערכת לאומדן גדלים (Approximate Magnitude System - AMS). תיאוריית ה־AMS עולה בקנה אחד עם התיאוריות של V.V. Davydov (להלן דווידוב), אך מנקודת מבט קוגניטיבית. כמו כן, נדון ביתרונות של תוכנית לימודים ממוקדת גדלים, כפי שהוצעה על ידי דווידוב ותיאוריית ה־AMS, ונביא מספר דוגמאות



לפעילויות ליישום העקרונות הבסיסיים של התיאוריות של דווידוב וה־AMS בפרקטיקה. לבסוף נתמקד בהקשר הישראלי בשאלות: כיצד ואם ניתן ליישם את תיאוריית ה־AMS והתיאוריה של דווידוב בהקשר הרחב יותר, שהציע התחלה עם מדידה כדי להקנות מושגים אלגבריים בגיל צעיר.

תיאוריית מערכת לאומדן כמויות - ANS

מחקרים קוגניטיביים שחקרו את מקורן של מיומנויות מספריות בסיסיות במשך התפתחות הפרט ובין תרבויות יצרו קונצנזוס, שיכולות מתמטיות מבוססות על יכולות בסיסיות מולדות (כמו אמידה והשוואת כמויות). הטענה היא שמיומנויות בסיסיות כאלה מתאפשרות על ידי מנגנון עצבי ייעודי ('חוש מספר' מולד) המאפשר לאדם להשוות, לתפוס ולתמרן כמויות לא־סימבוליות (כמויות מספריות) מלידה. תיאוריה זו ידועה בשם תיאוריית 'מערכת לאומדן כמויות' (ANS). ה־ANS נחשבת כמנבאת מיומנויות מתמטיות מתקדמות יותר, כלמידת מספרים סימבוליים (למשל Cantlon, Platt, & Brannon, 2009).

אחת השיטות הנפוצות ביותר המשמשות לחקר מיומנויות ANS היא משימת השוואה של כמויות מספריות. במשימה כזו המשתתפים רואים שתי קבוצות של פריטים (בדרך כלל עיגולים), ובוחרים את הקבוצה המכילה יותר פריטים. לדוגמה, הלברדה ופייגנסון (Halberda & Feigenson, 2008) ביקשו מילדים בני 3-6 להשוות איזו קבוצה מכילה יותר פריטים, כדי לבדוק את התפתחות החדות של ה־ANS עם הגיל. משימה כזו אינה דורשת כל מיומנויות שפה מילולית או ידע פורמלי, מה שהופך אותה למתאימה מאוד לא רק למחקרים עם מבוגרים מערביים אלא גם למחקרים התפתחותיים ובין־תרבותיים.

תוכנית לימודים ממוקדת מספרים

ספירה, מספרים וחישובים נתפסים בדרך כלל כדרך המלך בחינוך מתמטי מוקדם. יש המאמינים שצריך להדגיש זאת אף יותר (Ontario Ministry of Education, 2018). גם בתוכנית החדשה של משרד החינוך לבתי הספר היסודיים בישראל ניתן למצוא העדפה למספר: בכיתה א' למשל, מוקדשות 45 שעות הוראה להכרת מספרים טבעיים ואפס, עוד 45 שעות לפעולות חשבון בתחום ה־100, ולעומתם כ־13 שעות לגיאומטריה וקדם־אלגברה, ורק 15 שעות הוראה למדידות אורך (טיוטת תוכנית הלימודים 9.7.24).

דוגמה להשפעה כזו של תיאוריית ה־ANS על תוכנית הלימודים בבית הספר היא מודל הקוד המשולש של דהאן (Dehaene et al., 2003). קולס וסינקלר (Coles & Sinclair, 2017) דנו במודל הקוד המשולש שבו ההנחה היא שמשמעות המספר יכולה לבוא רק מכמויות לא־סימבוליות. מודל זה השפיע רבות על עיצוב תוכניות לימודים שבהן קרדינליות (כלומר מספר המתאר את גודל הקבוצה) נלמדת לפני עיקרון האורדינליות (מספר סידורי). במילים אחרות, מספרים נלמדים כמוחלטים ולא כיחסיים. באופן דומה, התיאוריות של דהאן ואחרים בנוגע לכך שבני האדם נולדים עם יכולת לתפוס כמויות בדידות קטנות (למשל, de Hevia & Spelke, 2009; Dehaene, 1997; Izard et al., 2009; Nieder, 2005) בגיבוי מחקר נוירו־קוגניטיבי, היטו גם הן את הכף לטובת עליונות המספר.

בעוד שמודל ה־ANS מקדם דגש על כמויות בדידות, יש גם סיבות היסטוריות לכך. טקסטים להוראת מתמטיקה וההוראה עצמה התפתחו, בין היתר, מהספר Liber Abaci של פיבונאצ'י, טקסט שצמח מתוך הצורך של סוחרים לחשב בקלות (Devlin, 2011). היו גם שינויים בחינוך מתמטי שמטרתם לקדם ספירה, מספרים וחישובים על פני היבטים אחרים של מתמטיקה, כנראה מסיבות הקשורות לערכים פוליטיים כמו שמרנות וסמכות. תנועות 'חזרה ליסודות' בחינוך, שהחלו בשנות השבעים בתגובה לתנועות חברתיות מתקדמות, השתמשו בדגש על מיומנויות בסיסיות כמו ספירה ושינון טבלאות כפל כדי לקדם מטרות פוליטיות רחבות יותר (Vickery & Smith, 1979). גישה זו מעדיפה הוראה מובנית ושמירה על סמכות המורה, ובתוך כך הגבלת החשיפה



לנושאים שעלולים לעורר מחלוקת או לאתגר מבנים חברתיים קיימים. כפי שמציינים החוקרים, דגש מוגבר על מיומנויות טכניות במתמטיקה יכול לבוא על חשבון פיתוח חשיבה ביקורתית ויכולת להשתמש במתמטיקה לניתוח נושאים חברתיים ופוליטיים מורכבים. לדוגמה, משרד החינוך באנגליה מציע יעדי למידה מוקדמת לגיל שלוש עד חמש. בגרסת 2013 יש יעד למספרים, וגם יעד לצורה, מרחב ומידות: "ילדים משתמשים בשפה יומיומית כדי לדבר על גודל, משקל, קיבולת, מיקום, מרחק, זמן וכסף כדי להשוות כמויות ועצמים ולפתור בעיות. הם מזהים, יוצרים ומתארים דפוסים. הם חוקרים מאפיינים של עצמים יום־יומיים וצורות ומשתמשים בשפה מתמטית כדי לתאר אותם". הגרסה שהוצעה בשנת 2021 על ידי ה־Early Years Foundation Stage (EYFS) כוללת שינוי ניכר אשר מדגיש הבנה של מספר וכמות, עם פחות דגש על מרחב ומדידה (Department of Education, 2021). יש לשים לב, שבעוד שמטרות התוכנית כוללות (עבור צעד ראשון - גיל 5 עד 7) גם זיהוי ומיון של צורות, הרי הלימודים עצמם כוללים דגש עצום על מספרים: ספירה מ־0, 1 או כל מספר עד 100; זיהוי, שיום וכתיבת מספרים עד 100; ספירה בקפיצות של 2 ו־5; קריאת של מספרים בין 1-20; ייצוג מספרים בעזרת אובייקטים; חיבור וחיסור מספרים עד 20; כפל וחילוק בצעד אחד, ושברים, ורק בסיומה תכונות של מצולעים (דו־ממד ותלת־ממד); תיאור כיוון, סיבוב ותנועה. כלומר, כמו בישראל, גם כאן ההתמקדות היא יותר במספר ופחות בגיאומטריה ומדידה.

תיאוריית מערכת לאומדן גדלים (AMS)

למשימות ממוחשבות שבאמצעותן בודקים השוואת כמויות מספריות, הנפוצות במחקרי ANS, יש חיסרון רציני: לכל קבוצת פריטים שיש לה כמות מספרית שונה, יש גם גדלים רציפים שונים. גדלים רציפים הם כל גודל שצריך למדוד אותו ולא לספור אותו, כמו צפיפות, נפח, שטח כולל וכדומה. לפריטים יש גדלים שונים, בעוד שקבוצות של פריטים תופסות שטחים שונים על המסך, יש להן צפיפות פריטים שונה וכדומה. לכן, כל עוד גם הגודל הרציף שונה, וגם הכמות שונה, בניסוי השוואת כמויות קשה להיות בטוחים מה עזר למשתתף או משתתפת להחליט בתהליך ההשוואה איפה יש יותר פריטים - שאלת הכמות, הגודל הרציף, או שילוב של שניהם. שימו לב שקשה עד בלתי אפשרי ליצור שתי קבוצות פריטים שיש להן כמות שונה אך אותם גדלים רציפים (איור 1).

איור 1:

גדלים רציפים משתנים עם כמות מספרית



איור 1א מדגים את הקשר בין כמויות מספריות לגדלים רציפים. העגלות משמאל מדגימות את המתאם החיובי הנפוץ: יותר פריטים תופסים יותר מקום בעגלת הקניות. העגלות מימין מראות שלעיתים מתאם זה מופר. איור 1ב קשור לכמות מספרית וגדלים רציפים בתכנון ניסוי (משימה ממוחשבת של השוואת כמות מספרית). כל מערך מכיל שש נקודות. הגדלים הרציפים של מערכים אלה, עם זאת, שונים זה מזה. איור 1ג מציג דוגמה שלמערכי נקודות שונים תמיד יהיו גדלים רציפים שונים. הצד השמאלי של כל מלבן מכיל שש נקודות והצד הימני מכיל עשר נקודות. כפי שניתן לראות בגרסאות השונות, מניפולציה של גודל אחד מובילה להבדלים בגדלים אחרים, מה שגורם לכך שבלתי אפשרי לשלוט בכל הגדלים הרציפים בו־זמנית.



בסביבה הטבעית והיום־יומית כמות מספרית וגדלים רציפים לרוב תואמים: קבוצה עם יותר פריטים בדרך כלל תתפוס יותר מקום, תכסה יותר שטח ותהיה צפופה יותר מקבוצה עם פחות פריטים (איור 1א - משמאל מספק דוגמה יום־יומית). לכן, כאשר משתתפים צופים בשתי קבוצות של פריטים, כמו במחקר של הלברדה ופייגנסון שהוזכר לעיל, לא רק שמספר הפריטים משתנה, אלא יש שינוי בגודל רציף כמו השטח הכולל של כל הפריטים. בעקבות כך, אי אפשר להיות בטוחים שמשתתפים מסתמכים רק על כמות מספרית כשהם מחליטים, כפי שמציעים חלק מתומכי ה־ANS.

כדי להפחית את האפשרות שמשתתפים משתמשים בגדלים רציפים במקום להשתמש בכמות מספרית, חלק מהמחקרים ניסו "להפריע" למתאם בין כמות מספרית לגדלים רציפים. ההיגיון הוא שאם גדלים רציפים אינם מנבאים בתוך הניסוי באופן עקבי כמות מספרית, הם גם לא ישפיעו על הביצועים. שיטה פופולרית אחת להפחתת ההשפעה הפוטנציאלית של גדלים רציפים על הביצועים היא ליצור מתאם חיובי בין חלק מהגדלים הרציפים לבין הכמות המספרית בחצי מזוגות הגירויים המוצגים, ומתאם שלילי בחצי השני, וכך לבטל את המתאם הכולל בין כמות מספרית לגדלים רציפים (איור 1ג). כך, בחצי מהשאלות בניסוי, הקבוצה המכילה יותר נקודות תופסת שטח כולל גדול יותר, והקבוצה השנייה המכילה פחות נקודות תופסת שטח כולל קטן יותר. זהו המתאם החיובי הטבעי שאנו נתקלים בו בחיי היום־יום. במילים אחרות, מצב זה תואם את הציפיות שלנו ולכן נקרא מצב **תואם**. במחצית השנייה של השאלות בניסוי, הקבוצה עם פחות נקודות תופסת יותר שטח כולל, מה שמנוגד לציפיות שלנו ואינו תואם אותן, ולכן מצב זה נקרא מצב **לא תואם**. כאשר התבקשו לבחור את הקבוצה המכילה יותר נקודות, נמצא כי הן ילדים והן מבוגרים היו מהירים ומדויקים יותר במצבים תואמים מאשר במצבים לא תואמים (Gilmore et al., 2016). תופעה זו ידועה כ**אפקט תאומות הגודל**.

אפקט התאומות מרמז שגם כאשר גדלים רציפים אינם רמז מנבא של כמות מספרית לאורך כל הניסוי, הם בכל זאת משפיעים על הביצועים. בעקבות כך, קשה מאוד (אם לא בלתי אפשרי) לקבוע לפי איזה עיקרון משתתפים בוחרים את הכמות המספרית הגדולה יותר (לפרטים נוספים, Leibovich, Katzin, Harel & Henik, 2017). הדבר רומז על תפקיד חשוב אפשרי של גדלים רציפים במשימות אלה ובחיי היום־יום.

עדויות התומכות בתפקיד הגדלים הרציפים בעיבוד כמות מספרית

עדויות אמפיריות מציעות שגדלים רציפים מעובדים ומשפיעים על הביצועים גם כאשר הם אינם רלוונטיים למשימה ואינם מנבאים כמות מספרית (Clearfield & Mix, 1999; Mix et al., 2002; Szucs et al., 2013). לדוגמה, במחקר של ליבוביץ' והניק (Leibovich & Henik, 2014) השוו משתתפים בוגרים את מספר הנקודות בשתי קבוצות, והתבקשו לבחור את הקבוצה המכילה יותר נקודות. היחס בין מספר הנקודות בקבוצות אלה תומרן, כאשר היחס חושב כחלוקה של המספר הקטן יותר במספר הגדול יותר. לדוגמה, היחס המספרי בין קבוצה של חמש נקודות לקבוצה של 10 נקודות הוא 5/10 = 0.5. ככל שהיחס קרוב יותר לאחד, כך הגדלים המושווים דומים יותר זה לזה. נמצא כי הביצועים גרועים יותר כאשר היחס קרוב ל־1, תופעה הידועה כאפקט היחס (Moyer & Landauer, 1967). נוסף לכך, חושב היחס בין חמישה גדלים רציפים של קבוצות הנקודות המושוות. התוצאות הראו שהן יחס הכמות המספרית, והן יחס הגדלים הרציפים, משפיעים על זמני תגובה ואחוזי דיוק, למרות שהגדלים הרציפים לא היו רלוונטיים למשימה, ושום גודל מהגדלים הרציפים לא יכול היה לשמש כרמז לניבוי כמות מספרית. בהתאם לממצא זה, מחקרים אחרים עם ילדים ומבוגרים, הראו שכאשר המתאם בין מספר וגדלים רציפים הוא שלילי (כלומר בתנאים לא תואמים) (איור 1ג) זמן התגובה איטי יותר, והדיוק נמוך יותר מאשר כאשר המתאם בין מספר לגדלים רציפים הוא חיובי (כלומר בתנאי תואם) (Gilmore et al., 2016; Leibovich-Raveh et al., 2018).

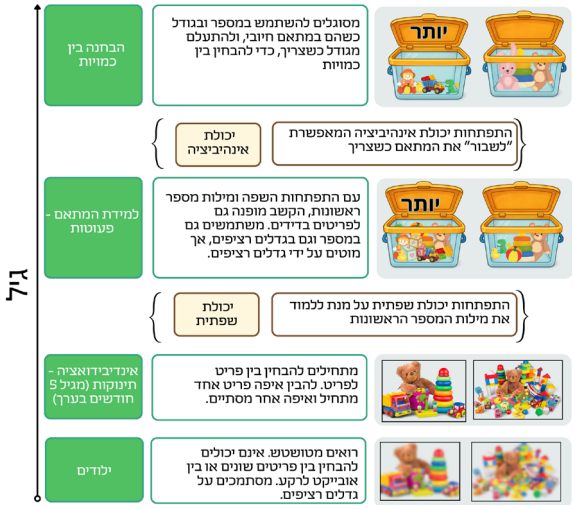


מודל תיאורטי חדש להתפתחות מושג המספר

בהתבסס על מחקרים אמפיריים וסקירת ספרות, ליבוביץ' ועמיתים (Leibovich et al., 2017) הציעו מודל תיאורטי חדש לתיאור התפתחות מושג המספר (איור 2).

איור 2:

מודל תיאורטי להתפתחות מושג המספר



מודל זה מציע שבני אדם נולדים עם היכולת להבחין בין גדלים רציפים כאשר ההבדל גדול דיו. על פי מודל זה, בלתי אפשרי לתינוק להבחין בין כמויות מספריות משתי סיבות עיקריות: האחת, החדות הוויזואלית של תינוקות גרועה פי 25 מזו של מבוגר, לכן, במרחק של יותר מ־40 ס"מ (מרחק הנקה) עבור תינוק מתחת לגיל חמישה חודשים, הסביבה נראית מטושטשת. שנית, עד גיל חמישה חודשים תינוקות אינם יכולים להבחין בין פריטים, כלומר הם חסרים יכולת שנקראת אינדיווידואציה - הם אינם יכולים לקבוע שעצם נפרד מהרקע, או היכן עצם אחד מסתיים ועצם אחר מתחיל. בתנאים אלה קשה לדמיין כיצד, גם אם היה קיים 'חוש מספר' מולד, הוא יכול היה להיות שימושי לפני שמערכות פיזיולוגיות וקוגניטיביות מרכזיות מבשילות. אחרי גיל חמישה חודשים בערך, שני דברים חשובים מתרחשים: האחד, התינוק מתחיל לפתח את יכולת האינדיווידואציה, כלומר מפתח את היכולת להבחין בין פריטים. שנית, התפתחות מיומנויות השפה, ובמיוחד רכישת מילות המספר הראשונות למספרים קטנים (פחות מ־5). שני אלה יחד מדגישים כמות מספרית, והקשב של התינוק מופנה כעת לא רק לקבוצת הפריטים כולה, אלא גם לפריטים הבודדים. בשלב זה, המודל מציע, ילדים לומדים באמצעות התנסות עם הסביבה את המתאם הטבעי שבין כמויות מספריות לגדלים רציפים. כלומר, יותר פריטים יתפסו יותר מקום, יהיו כבדים יותר להרמה וכדומה, בהשוואה לפחות פריטים. מובן שמתאם זה נפוץ בסביבה, אך איננו מושלם. בשלב ראשון, ילדים מכלילים יתר על המידה מתאם זה על כל מצב, גם על מצבים יוצאי דופן, כמו המצב המתואר באיור 1א. רק בשלב מאוחר יותר, עם התפתחות הבקרה הקוגניטיבית, ובמיוחד היכולת להתעלם ממידע לא רלוונטי, ילדים יכולים להתחיל "לשבור" את המתאם, ולהבין שבעוד שבדרך כלל קיים מתאם חיובי בין גדלים רציפים וכמות מספרית, יש יוצאים מן הכלל, ולעיתים (כמו במקרה של עגלת הסופרמרקט), מספר יהיה רלוונטי יותר מאשר גדלים רציפים למשימה הנתונה (למשל בבחירת תור לקופאית). רק אז הילד מוכן להבין את מושג המספר כמשהו שנמצא במתאם עם גדלים רציפים, אך עצמאי מהם. לדוגמה, שני מטבעות ושני בניינים הם בעלי אותה כמות מספרית למרות שהגדלים הרציפים שלהם שונים באופן ניכר. במילים אחרות, בשלב זה ילדים מוכנים להבין שמספר הוא מושג אבסטרקטי שיכול לייצג כל דבר.

אנו טוענים שלפני שהבנה זו מתרחשת, ילד אינו יכול להבין תכונות בסיסיות הנדרשות ללמידת מנייה ומספרים סימבוליים. לדוגמה, אם התפיסה של הילד לגבי "איפה יש יותר" קשורה לגודל רציף, אז הוא לא יכול להבין ש־3 נקודות הן יותר מ־2 נקודות, אם שתי הנקודות גדולות יותר פיזית. ואכן, יש מחקרים שהדגימו ישירות רעיון זה. למשל, נגן וסרנקה (Negen & Sarnecka, 2015) בדקו את הקשר בין רמת הידע המספרי של ילדים (knower level) לביצוע שלהם במטלות השוואת נקודות. הם מצאו שילדים שעדיין לא רכשו הבנה של פונקציית היורש (כלומר



שלכל מספר יש מספר עוקב שגדול ממנו ב־1) ועיקרון הקרדינליות (כלומר מספר המתאר גודל של קבוצה), הסתמכו בעיקר על גדלים רציפים (כמו גודל הנקודות או השטח הכולל) במקום להסתמך על כמות מספרית בעת השוואת קבוצות נקודות. לעומתם, ילדים עם ידע מספרי מתקדם, כלומר שרכשו את עיקרון הקרדינליות, הצליחו יותר להתעלם מהגדלים הרציפים ולהתמקד בכמות המספרית בלבד. לאחר שהחוקרים שינו את המטלה כדי לוודא שהילדים אכן מגיבים על בסיס מספר ולא על בסיס גדלים רציפים, אזי נעלם המתאם שדווח בעבר בין יכולות השוואה לידע מספרי - מה שמצביע על כך שילדים ללא ידע מספרי מתקדם אכן מסתמכים על גדלים רציפים (ולא על מספר) כאסטרטגיה עיקרית להערכת כמויות.

תוצאות חינוכיות של המודל המוצע

אם, כפי שאנו מציעים, גודל רציף ולא מספר הוא היסודי, במובן של היותו היסוד שעליו נבנה, הן הידע המרחבי והן הידע המספרי, יהיו לכך השלכות על ההוראה.

ילדים צעירים מפתחים עושר של ידע מעשי על גדלים עד שהם מגיעים לבית הספר. אנו בונים את תחושת הגדלים הרציפים שלנו כשאנחנו מושיטים יד או צועדים, שופטים מרחקים לקפיצה, או שופטים רווח כדי לקבוע אם נוכל לעבור דרכו. בזמן משחק במים, חול או בצק משחק, ילדים בונים תחושה לגבי 'איך כמויות מתנהגות'. הם חווים סיבוב כשהם רצים או רוכבים על קורקינט, אורך כשהם מסובבים חבל, זמן כשהם ממתינים או צריכים לעצור. אפשר לשאול לפיכך, כיצד כל זה משרת אותם במסעם דרך תוכנית הלימודים המתמטית בבית הספר?

גדלים נמצאים בכל מקום במשחק של ילדים צעירים. רשימה נפוצה של סכמות משחק (Grimmer, 2017) היא העברה, עטיפה, הקפה, מסלול, סיבוב, חיבור, מיקום והמרה. כל אחת מסכמות אלה כרוכה בגדלים רציפים מסוג כלשהו (כמו גם בסידורים, גיאומטריה, טופולוגיה ודפוסים - אבל לא כל כך במנייה). אם יש לנו תפיסה מוטת־מספרים כלפי מתמטיקה, איננו מעריכים את סוגי המשחק הללו על כל המתמטיקה שהם מכילים.

כפי שטוני קוטון (Cotton, 2019) כתב:

"תיארתי בעבר את ההנאה בצפייה בנכדיי יוצרים דפוסים, מתנסים במילוי וריקון מכלים או מעמיסים מוטות על משאיות צעצוע. מעניין שמה שהם לא עושים זה לספור. הם סופרים רק כאשר מורים או מבוגרים אחרים מבקשים מהם. ***ספירה היא העדיפות המתמטית הנמוכה ביותר שלהם.***"

היתרונות של הכללת גדלים רציפים בתוכנית הלימודים בבית הספר

ילדים נכנסים לבית הספר עם ידע לא פורמלי על אודות גדלים, שנרכש דרך התנסות עם הסביבה מגיל צעיר. לכן אנו מציעים, שמורים יעריכו ויבנו על בסיס ידע זה תשתית לידע פורמלי. לדוגמה, ילד בן ארבע הנמצא בארגז החול בונה מגדל מקוביות עץ. החלק העליון שלו כעת מעל ראשו, אבל הוא מנסה לבנות את המגדל גבוה יותר. הילד לא מראה סימן למניית הקוביות. מה שנראה כי מעניין אותו הוא הגובה של המגדל, אולי הגובה שלו בהשוואה אליו. אולי הוא רוצה לראות לאן הגבול של הישג ידו יכול להגיע. מה יאמרו המורים המעוניינים לדבר איתו, וגם לגעת במתמטיקה? כיוון שמספר ומנייה הם כל כך בחזית החשיבה שלנו, אולי מפתה לומר, 'מעניין בכמה קוביות השתמשת?' בעקבות העניין של הילד, יהיה מתאים יותר להעיר על הגודל: 'וואו, המגדל הזה ממש גבוה! אתה גבוה או נמוך מהמגדל? עמוד לידו; הבה נראה.' אנו גם רוצים לטעון שפעילויות עם גדלים רציפים בכלל, וחומרים מרחביים בפרט, יכולות לעזור לילדים לרכוש ביתר קלות מושגים מתמטיים מורכבים. מושגים כאלה עשויים לכלול ספירה, תפיסה מוקדמת של יחס ופרופורציות ואומדן של כמויות לא מדויקות. גישה זו אינה חדשה לחלוטין למי שמכיר את עבודתו והתיאוריה שהציע הפסיכולוג הרוסי דוויידוב (1930-1998). הוא טען שמספרים אינם יכולים להיות אבני



הבניין היסודיות של המתמטיקה, מכיוון שהם מוגדרים על בסיס מושגים מתמטיים יסודיים יותר. דווידוב הציע בשנות השבעים שחינוך מתמטי מוקדם צריך להתחיל בהשוואת תכונות הגודל הפיזיות של עצמים, כמו אורך, מסה, שטח ונפח. תחילה השאלות הן של שוויון או אי־שוויון (למשל, 'למי יש יותר חלב?'). הדרכה והוראה דרך התנסויות טבעיות אלה מלמדת ילדים על יחסים בין גדלים שונים, ותכונות חשובות כמו a+b = b+a, שיעזרו להם להבין אלגברה מורכבת יותר בעתיד. דווידוב גם טען שמספרים צריכים להיות מוצגים כאשר השאלה משתנה מ"למי יש יותר" ל"בכמה יותר", ויש צורך להגדיר במדויק את היחס בין כמויות. במילים אחרות, מספרים צריכים להילמד כיחסיים, לא מוחלטים, וכיחידות מדידה של גדלים (Venenciano & Dougherty, 2014) בהתאם לכך, דווידוב (1962) בחן ופיתח תוכנית לימודים מתמטית ברוסיה שהתבססה על גדלים רציפים.

דווידוב אינו היחיד שתכנן חומרים מובנים כדי לאפשר חקירה שיטתית של גדלים: ה"מתנות" של פרידריך פרבל במאה התשע־עשרה (למשל Lange, 2018) והחומרים הסנסוריים של מריה מונטסורי בתחילת המאה העשרים (Lillard & Stoll, 2006) הם דוגמאות המשפיעות על תוכניות הלימודים המבוססות-גדלים. דוגמה נוספת המדגימה את העקרונות של התיאוריות של דווידוב וה־AMS הם מקלות קוזינר (ידועים כ"בדידים" בישראל), שפותחו על ידי ג'ורג' קוזינר באמצע המאה העשרים. אלה הם מקלות עץ שבהם אורך (או שטח או נפח) מייצג גדלים בדידים. מקלות קוזינר אינם מסומנים כדי להראות יחידות ואינם מושווים דרך ספירה. במקום זאת, גדלים (אורך, נפח) מושווים זה לזה והיחסים בין גדלים שונים מודגשים לפני שמוצגים מספרים סימבוליים (De Bock, 2020) על פי שיטת הלימוד המקורית של גטנגו (De Bock, 2020), השלב הראשון בהוראה עם מקלות קוזינר הוא משחק חופשי, שבו הילדים פוגשים את המקלות בפעם הראשונה, והם צופים במאפיינים חשובים שלהם: מקלות באותו אורך הם באותו צבע, ולהיפך; מקלות באורך שונה הם בצבע שונה, ולהיפך; אורך כל מקל ניתן ליצירה על ידי "רכבת" של מקלות. זהו שלב שצריך להימשך זמן ממושך מאוד. בשלב זה אין להזכיר קשר למתמטיקה בכלל או מספרים בפרט.

השלב השני הוא שלב פיתוח השפה המתמטית. בשלב זה משולבים מונחים מתמטיים מדויקים, עם שימוש בשפה מתמטית מתאימה כמו "משוואה" או "שווה ערך", עד שהם הופכים לחלק טבעי מאוצר המילים של הילדים בכיתה א' (בישראל - גן חובה).

השלב השלישי הוא "יצירת רכבות" כדי לפתח הבנת יחסים ועקרונות בסיסיים. בגיל חמש ילדים מתבקשים ליצור "רכבות" שהן באותו אורך, ואז הם מתחילים לחוות יחסים כמו צהוב+ורוד = כחול (גם בזה אין עדיין קישור למספרים). הם מפתחים מודעות לקומוטטיביות (חוק החילוף): צהוב+ורוד = ורוד+צהוב. נוסף לכך, הם לומדים תכונות של חלוקה: 3 (ורוד+צהוב) = (3 ורוד+3 צהוב).

השלב הרביעי הוא הבנת יחסים מספריים. המטרה היא לקשר בין גדלים פיזיים למספרים. בשלב הזה הילדים מתחילים להבין שהמקל הכחול למשל, הוא ארוך פי תשעה מאורך המקל הקטן ביותר (לבן), והם חווים יחסים כמו 9=5+4 ו־ 9=4+5.

גטנגו טען שהגישה המסורתית להוראה המתבססת על ספירה, משאירה יותר מדי ילדים עם הבנה לא מספקת, כי הם מתמקדים בספירה במקום ביחסים, דבר שעלול למנוע מהם להבין תכונות מתמטיות בסיסיות כמו חילוף, חלוקה וכדומה, ולגרום להבנה שטחית של מתמטיקה. לכן בשיטה זו, מספרים יוצגו (יחוברו לבדידים) רק לאחר שהילדים מבינים לעומק את היחסים הפיזיים בין הבדידים. כך המספרים הופכים להיות משמעותיים ולא רק סמלים ריקים, או כמו שטען דווידוב, הם באים לעזור במדידה.

לדוגמה, כאשר ילדים בני חמש המתבקשים לבנות ממקלות קוזינר 'רכבות' שהן באותו אורך, יוצרים סידור כמו זה שבאיור 3, נוסף לחוויה של צהוב+ורוד = כחול, הם עשויים להיות מודעים לתכונות כגון חילוף וחלוקה שהוזכרו מעלה. אך הם עושים זאת ללא ספירה, ואכן אילו נדרשו לספור, נניח עם קוביות מתחברות,



החוויה הישירה של הגשטלטים (תפיסה של תמונה שלמה כיותר מסך חלקיה) האלה הייתה יכולה בקלות להיאבד בספירת יחידות.

בישראל שיטת הבדידים ידועה לשמצה. מכלי הוראה נפוץ בין שנות השישים-שמונים של המאה הקודמת, גם בזכות יועצות כגון פרופ' פרלה נשר (Nesher, 1988), לאחר שנת 2000 חל צמצום בשימוש בהם. בשנת 2002 קמה תנועה ציבורית של אנשי חינוך ומתמטיקאים שהתנגדו לגישה זו. מציין את הגישה הזו המאמר עם הכותרת המבהילה "אל תתנו להם בדידים! לעולם לא תוכלו לתקן את הנזק!" (גביש, 1999). אולם מחקרים חדשים מכל העולם מראים, הן את היתרונות שבשיטה הזו (אשר בדידים הם רק חלק ממנה). מחקרים אלו גם עשויים להסביר מדוע היא לא הוכיחה את עצמה בישראל. מחקר חדש של איאן בנסון ועמיתיו (Benson et al., 2022) הציג מטה־אנליזה, ניתוח כמותני של מחקרים קודמים על שימוש בבדידים בבתי ספר יסודיים שונים (כיתות א-ו) בארצות שונות בעולם, ומצא שיעילות השימוש בבדידים נמצאת בקשר ישיר עם נאמנות לעקרונות תוכנית הלימודים של גטנגו. נאמנות לעקרונות תוכנית הלימודים נמדדה באמצעות ארבעה קריטריונים:

א. תוכנית הלימודים עצמה: עד כמה הייתה קרובה לתוכנית הלימודים המקורית של גטנגו
ב. ניסיון המורים בהוראה בשיטה הזו
ג. הכשרת המורים, ואם היא כללה את התכנים המקוריים של גטנגו
ד. מוכנות צוות המחקר שערך את המחקר המקורי - עד כמה במחקר עצמו צוטטו מחקרים וטקסטים של גטנגו.

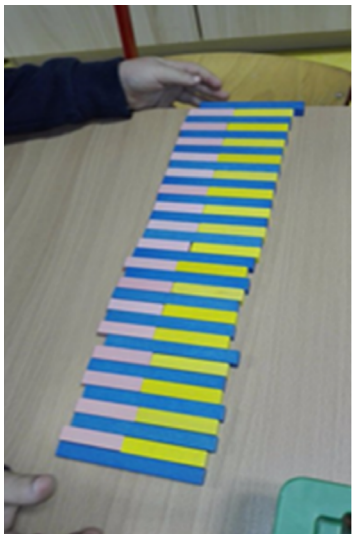
מתוך המחקרים עולה, שברובם האפקט של שיטת הלימודים שנחקרה היה חיובי בהשוואה לתלמידים שלמדו בשיטה המסורתית (בבית הספר היסודי). אולם גודל האפקט עלה ככל שמדד הנאמנות לעקרונות תוכנית הלימודים היה גבוה יותר. מכאן, שעצם השימוש בבדידים כשלעצמו אין בו די, לא כדי להניב תועלת. הרעיון הוא ליצור סביבת לימודים אשר תומכת בהבנת רעיונות אלגבריים מופשטים שיעזרו לתלמידים להבין יחסים בין אובייקטים, ולהפנים רעיונות מתמטיים מורכבים לעומק. שאם לא כן, כמו שגטנגו בעצמו טען, זהו סתם משחק במקלות צבעוניים.

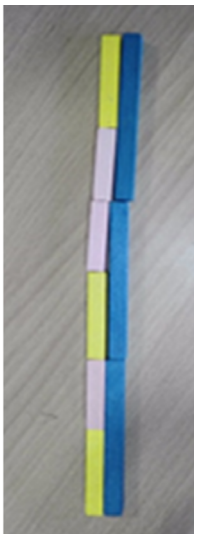
במחקר זה בדקו גם את רמת השיפור של תלמידים ברמות שונות של מתמטיקה. נמצא כי תלמידים עם הישגים נמוכים במתמטיקה השתפרו באריתמטיקה בעקבות השימוש בבדידים, לעומת תלמידים עם הישגים גבוהים במתמטיקה שהשתפרו באלגברה (כפי שנמדד במבחנים לפני, אחרי ובהשוואה לתלמידים בתוכנית המסורתית).

לאור מחקרים רבים בעולם, שמראים כי בשימוש הולם בבדידים תלמידים מראים הבנה מתקדמת של אלגברה, ייתכן כי הקושי או הכשל בשימוש בבדידים בישראל, לא נבע מעצם הכלי, אלא מאופן השימוש בו, שהתמקד כאמצעי להמחשה של כמות מספרית בדידה. למשל, במאמר "אל תתנו להם בדידים" (גביש, 1999) מוזכר מקרה שבו תלמידה אומרת שאצלם בכיתה "5 הוא רק צהוב". אבל אם משתמשים בבדידים בצורה נכונה כדי להראות בכמה דרכים שונות ניתן להרכיב 5, צימוד בין מספר וצבע לא אמור להיווצר.

איור 3:

מקלות קוזינר (בדידים)







גדלים רציפים משרתים למידה מתמטית מאוחרת יותר

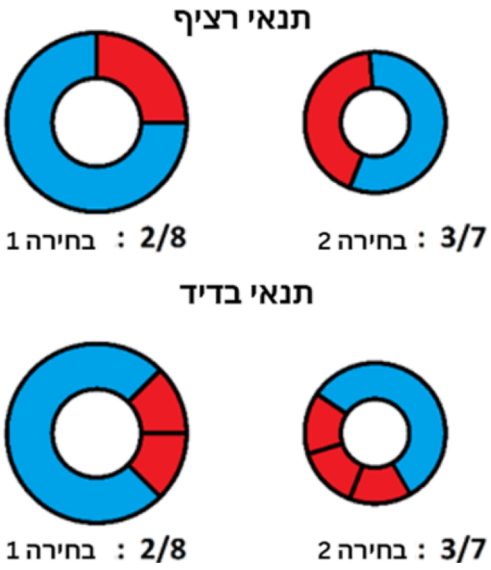
ספירה וחיבור נתפסים בדרך כלל כצעדים ראשונים בלמידת מספרים של ילדים. אבל אם נתמקד באלה תוך כדי הדרת גדלים רציפים, תישאל השאלה: האם לא נקשה על התפתחויות מאוחרות יותר? שקלו את התרחישים הבאים:

אנחנו מסתכלים על כמה גדלו שני צמחים. גם הקטן יותר וגם הגדול יותר גדלו בשני סנטימטרים. מי גדל יותר? בהליכה בנתיב הרגיל של ספירה ואז חיבור, ייתכן שילדים הניחו בצד כל מודעות שיש להם לכך, שהשוואות נערכות לעיתים קרובות באמצעות פעולת הכפל. תחושת הלוגריתם הטבעית שלנו היא, ששני כלבים הם באותו גובה אם יש הבדל של ס"מ אחד בגובהם, אבל שתי נמלים עם אותו הבדל הן שונות מאוד בגודלן. האם יש דרכים לשמר את תחושת היחס הטבעית שלנו שהתפתחה בצורה לא פורמלית, רק מתוך תצפית בסביבה שלנו?

ישנן ראיות שילדים צעירים יכולים לחשוב על מצב כפלי, כאשר הם שוקלים גדלים רציפים באופן שהם אינם יכולים עם גדלים בדידים. ג'אונג, לוין והוטנלוכר (Jeong et al., 2007) מצאו שילדים בני שש היו מסוגלים לבחור בחירה שתמקסם את הפרופורציה של צבע אחד במצב של הסתברות כאשר הצבע היה רציף, ללא יחידות שניתן לספור, ולא אם היו חלקים בדידים (ראו איור 4). הם מציעים שבמצב הבדיד, הספירה של הילדים עשויה להפריע לתפיסת הגשטלט של הפרופורציות. המצב הרציף כאן יכול להיות מאומץ בפרקטיקה הוראתית. ההשלכות חורגות מעבר לחומרים המסוימים שבהם משתמשים.

איור 4:

על פי ג'אונג, לוין והוטנלוכר, התפתחות החשיבה הפרופורציונלית: השפעת כמויות רציפות לעומת בדידות, 2007.



ילדים בני שש הצליחו יותר בבחירת האפשרות עם הפרופורציה הגבוהה יותר של אדום במצב הרציף.

דוגמה נוספת, יצירת דפוס גדל לדוגמה מנקודות: ילדים מסמנים נקודות על מערכת צירים. במקרה זה הם מחברים את הנקודות באמצעות קו ישר או קו שבור. האם רעיון החיבור של נקודות בקו ישר/שבור הגיוני לילדים?

עוד דוגמה לשימוש במצב רציף בפרקטיקה הוראתית, הפעם בדו־ממד, הוא אומדן שטח של צורה לא רגילה: אנחנו מסתכלים על איך ניתן לאמוד את שטח העלה על ידי העתקתו על נייר משבצות. אנחנו יכולים לספור את כל המשבצות בפנים כקירוב. אם נעשה את המשבצות קטנות, אנחנו רואים איך הקירוב שלנו נעשה מדויק יותר. אנחנו מדמיינים שנמשיך להקטין את המשבצות עד שבגבול יהיה לנו השטח הנכון של העלה. עברנו דרך ארוכה כדי להיות מסוגלים לדבר על הגודל של שטח לא רגולרי, משהו שכבר בגיל צעיר יש לנו 'תחושה' שלו.



השלכות על תוכנית הלימודים בהקשר הישראלי: מתיאוריה למעשה

בעקבות הדיון המחודש על הבסיסיות והראשוניות של תפיסת גודל רציף AMS לעומת גודל בדיד ANS, והאפשרות שמושג המספר מתבסס בעיקר על תהליך נרכש ולא על ידע מולד, עולה שוב שאלה ותיקה בחינוך מתמטי לגיל הרך: האם להתחיל ללמד מאריתמטיקה או מאלגברה? קראהר ועמיתיו (Carraher et al., 2006) מציינים במאמרם כי "יש הרבה סיבות לראות באלגברה מתקדמת יותר מאריתמטיקה, ולכן למקם אותה אחרי אריתמטיקה בתוכנית הלימודים במתמטיקה. אבל יש סיבות משכנעות יותר להציג אלגברה כחלק אינטגרלי של מתמטיקה מוקדמת". הם ממשיכים להזהיר "אם נתמקד יותר מדי בטבע הקונקרטי של אריתמטיקה, אנחנו מסתכנים בכך שנציע לתלמידים ראייה שטחית של מתמטיקה, ונרתיע את הנסיונות שלהם להכליל".

מעבר לכך, בסקירת הספרות שערכו קראהר ועמיתיו, שכללה התבוננות רחבה על קשיים נפוצים שתלמידים חווים במעבר מאריתמטיקה לאלגברה, ובהשוואה למקרים של רוסיה, שם תוכנית הלימודים התחילה באלגברה, מגיעים למסקנה שקשיים של תלמידים באלגברה עשויים לנבוע מהדרכים שבהן למדו אריתמטיקה ומתמטיקה יסודית, ושההפרדה בין אריתמטיקה ואלגברה גורמת למעבר חד בין הנושאים האלו. כלומר, מבחינת המורים והתלמידים כשמתחילים ללמוד אלגברה, אז האריתמטיקה "נגמרה". לעומת זאת, מחקרי הכיתה של הצוות של דוידוב שנסקרו באותו מאמר, אשר למדו בשיטת הוראה בייצוג אלגברי של בעיות מילוליות מכיתות א'-ד' הצליחו טוב יותר מעמיתיהם בתוכניות הלימוד המסורתיות גם בשנות הלימוד המאוחרות יותר.

התחלה עם אלגברה מקבלת חיזוק עקיף מראיות נוירו־קוגניטיביות כמו אלו שנסקרו במאמרם של ליבוביץ' ועמיתים מ־2017. אך ראיה אפילו ישירה יותר מוצאים במחקר שנערך בארה"ב בשנת 2004 (Schmittau & Morris, 2004), אשר שחזר בעצם את המחקר של דווידוב מ־1962. החוקרות תרגמו את תוכנית הלימודים של דווידוב לכיתות א'-ג' לאנגלית. תוכנית הלימודים הייתה ייחודית בכך שהיא כללה רצף של בעיות, ללא רמזים, פירוק לשלבים או הצגה דידקטית של החומר. המורים גם לא אישרו את נכונות הפתרונות. הילדים נדרשו להגיע למסקנות מתוך המתמטיקה עצמה, ולמדו לטעון את דעותיהם מבלי להפוך לווכחניים. בסיום שלוש השנים של התוכנית, ילדים אמריקאים הצליחו לנתח ולפתור בעיות באלגברה שבדרך כלל לא נתקלים בהן עד הכיתות התיכוניות בארה"ב, להשתמש בסימון אלגברי מתוחכם, ולעבוד עם יחסים בין כמויות ברמה תיאורטית. זהו רק מחקר אחד מיני רבים שהדגים את החוזק של שיטת לימוד שמבוססת על התחלה עם אלגברה במקום עם אריתמטיקה ומספרים (עוד מאמרים מוזכרים אצל Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

הבחנה חשובה בהקשר זה היא בין "קדם־אלגברה" (pre-algebra) לבין "תחילת לימודי האלגברה" (early algebra). בעוד שהמושג "תחילת לימודי האלגברה" מתייחס לשלבים מאוחרים יחסית בתוכנית הלימודים, לרוב בחטיבת הביניים, שבהם נלמדים פתרון משוואות פשוטות ושימוש במשתנים פורמליים - קדם־אלגברה היא גישה פדגוגית המשלבת אלמנטים של חשיבה אלגברית כבר בגיל הרך, דרך זיהוי דפוסים, שימוש ביחסים והבנה של שוויון, גם ללא סימון אלגברי (Kaput, 2008). גישה זו עולה בקנה אחד עם תיאוריות כמו זו של דווידוב ותואמת את עקרונות מערכת האומדן הרציפה (AMS), בכך שהיא מתמקדת בהבנה של יחסים בין גדלים ולא רק בחישוב תוצאות. מחקרים כמו אלו שתיארו קראהר ועמיתיו (2006), או השחזור שנערך בארה"ב לפי תוכנית דווידוב (Schmittau & Morris, 2004), מראים כי תלמידים שהחלו בלימוד מושגים אלגבריים בשלב מוקדם - דרך הבנה של יחסים, דפוסים ועקרונות - הגיעו להבנה מתמטית מעמיקה יותר גם בשלבים מאוחרים יותר של הלמידה.

אולם בהתחשב במורכבות השינוי התרבותי והחינוכי,



ברור שמעבר מיידי לגישת "קדם־אלגברה" אינו ריאלי. עם זאת, המחקר מלמד שאין צורך להתעכב עד שיקרה שינוי בתוכנית הלימודים להוספת הסוגיות הקשורות בקדם־אלגברה, אלא ניתן לטשטש את הגבול בין אלגברה לבין אריתמטיקה (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006). נראה כי כבר בגיל הרך קיימת גם היכולת הקוגניטיבית, וקיימות גם ההזדמנויות להציג מושגים אלגבריים, ולטשטש את הגבול שבין אלגברה לבין אריתמטיקה. לכן במקום להניח שילדים לא יכולים ללמוד מושגים אלגבריים בגיל מוקדם, יש להתחיל בהדרגה ללמוד אלגברה כבר מגיל הגן. נוסף לכך כדאי להגביר את המודעות לכך, שתחושת הגדלים הרציפים וההבנה של היחסים ביניהם זמינים לילדים כבר מגיל מוקדם, ויכולים לשמש בסיס איתן לחשיבה אלגברית.

השינוי הנדרש מורכב מאוד, ומצריך הכשרה מעמיקה של גננות ומורים עבור כל שכבות הגיל. אולם הפוטנציאל לשיפור ניכר בהבנה המתמטית של הדור הבא, שכולנו שואפים אליו, עשוי בהחלט להצדיק את ההשקעה הזו.

לסיכום, אנו רוצים להציע שהוראה המגבילה את למידת הילדים בכיתה לבדיד, למספרי ולחיבורי, מצמצמת את חוויית הלומדים, הופכת את המעבר לרציף לקשה יותר. יתרה מזאת, היא נכשלת בשימוש במשאב חזק שכבר קיים אצל התלמידים, ושעליו מבוססת הלמידה המספרית שלהם. מחקרים נוספים, המשלבים פסיכולוגיה קוגניטיבית ומחקר חינוכי עם השתתפות פעילה ותרומה של מורים למתמטיקה בגיל הרך יאפשרו לנו לפתח את טענותינו. התובנות שיושגו ממאמץ כזה יכולות לסייע, הן לפסיכולוגים קוגניטיביים, המתעניינים באופן שבו מתפתחות יכולות מתמטיות, והן למחנכים המחפשים לשפר תוכניות לימודים במתמטיקה. אנו מקווים שסקירה זו תעורר השראה באחרים לשקול מחקר בכיוון זה, ותתרום לדיון פורה על תפקידם של גדלים רציפים בהוראת מתמטיקה.

רשימת מקורות:

- גבישׁ, ת' (1999). אל תתנו להם בדידים. *מספר חזק*, *18*.
- Benson, I., Marriott, N., & McCandliss, B. D. (2022). Equational reasoning: A systematic review of the Cuisenaire–Gattegno approach. *Frontiers in Education*, *7*. https://doi.org/10.3389/feduc.2022.902899
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87–115.
- Clearfield, M., & Mix, K. (1999). Number versus contour length in infants' discrimination of small visual sets. *Psychological Science*, *10*(5), 408. https://doi.org/10.1111/1467-9280.00177
- Coles, A., & Sinclair, N. (2017). Re-thinking place value: From metaphor to metonym. *For the Learning of Mathematics, 2*, *37*, 3–8.
- Cotton, T. (2019). *Why do we count? Mathematics teaching blog*. https://mathematicsteachingblog.wordpress.com/2019/01/29/why-do-we-count/
- Davydov, V. V. (1962). An Experiment in Introducing Elements of Algebra in Elementary School. *Soviet Education*, *5*(1), 27–37. https://doi.org/10.2753/RES1060-9393050127
- De Bock, D. (2020). Georges Cuisenaire's numbers in colour. A teaching aid that survived the 1950s. In É. Barbin, K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, A. Karp, G. Moussard, J. Prytz, & G. Schubring (Eds.), *"DIG WHERE YOU STAND" 6. Proceedings of the Sixth International Conference on the History of Mathematics Education* (1st ed., pp. 355–368). WTM-Verlag Münster. https://doi.org/10.37626/GA9783959871686.0.27



- Izard, V. R., Sann, C., Spelke, E. S., & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *106*(25), 10382–10385. https://doi.org/10.1073/pnas.0812142106
- Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development, 8*(2), 237-256.
- Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). Routledge.
- Lange, A. (2018). Lange, A. (2018). *The design of childhood: How the material world shapes independent kids*. Bloomsbury Publishing USA.
- Leibovich, T., & Henik, A. (2014). Comparing Performance in Discrete and Continuous Comparison Tasks. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *67*(5), 899–917. https://doi.org/10.1080/17470218.2013.837940
- Leibovich, T., Katzin, N., Harel, M., & Henik, A. (2017). From “sense of number” to “sense of magnitude”: The role of continuous magnitudes in numerical cognition. *Behavioral and Brain Sciences*, *40*, e164. https://doi.org/10.1017/S0140525X16000960
- Leibovich-Raveh, T., Stein, I., Henik, A., & Salti, M. (2018). Number and Continuous Magnitude Processing Depends on Task Goals and Numerosity Ratio. *Journal of Cognition*, *1*(1), 19. https://doi.org/10.5334/joc.22
- Lillard, A. S., & Stoll, A. (2006). Montessori: The science behind the genius. *Choice Reviews Online*, *43*(09), 43-5409-43–5409.
- de Hevia, M.-D., & Spelke, E. S. (2009). Spontaneous mapping of number and space in adults and young children. *Cognition*, *110*(2), 198–207. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2008.11.003
- Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics* (S. Dehaene, Ed.). Oxford University Press.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, *20*(3–6), 487–506. https://doi.org/10.1080/02643290244000239
- Department of Education. (2021). *National curriculum in England: Mathematics programmes of study*. GOV.UK. https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study
- Devlin, K. J. (2011). *The man of numbers: Fibonacci’s arithmetic revolution*. Walker & Co.
- Gilmore, C., Cragg, L., Hogan, G., & Inglis, M. (2016). Congruency effects in dot comparison tasks: Convex hull is more important than dot area. *Journal of Cognitive Psychology*, *5911*(September), 923–931. https://doi.org/10.1080/20445911.2016.1221828
- Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the “Number Sense”: The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1457–1465. https://doi.org/10.1037/a0012682



- Vickery, T. R., & Smith, C. G. (1979). *The Back to Basics Curriculum as a Social Control Mechanism*. NY: Syracuse University, School of Education.
- Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). Multiple Cues for Quantification in Infancy: Is Number One of Them? *Psychological Bulletin*, *128*(2), 278–294. https://doi.org/10.1037/0033-2909.128.2.278
- Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time Required for Judgements of Numerical Inequality. *Nature*, *215*(5109), 1519–1520. https://doi.org/10.1038/2151519a0
- Negen, J., & Sarnecka, B. W. (2015). Is there really a link between exact-number knowledge and approximate number system acuity in young children? *The British Journal of Developmental Psychology*, *33*(1), 92–105. https://doi.org/10.1111/bjdp.12071
- Nesher, P. (1988). Beyond constructivism: Learning mathematics at school. *Proceedings of the 12th PME International Conference*, *1*, 54–74.
- Nieder, A. (2005). Counting on Neurons: The Neurobiology of Numerical Competence. *Nature Reviews. Neuroscience*, *6*(3), 177–190. https://doi.org/10.1038/nrn1626
- Ontario Ministry of Education. (2018). *Focusing on the fundamentals of math: A teachers' guide* (p. 8).
- Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 60–87.
- Szucs, D., Devine, A., Soltesz, F., Nobes, A., & Gabriel, F. (2013). Developmental dyscalculia is related to visuo-spatial memory and inhibition impairment. *Cortex*, *49*(10), 2674–2688. https://doi.org/10.1016/j.cortex.2013.06.007
- Venenciano, L., & Dougherty, B. (2014). Addressing priorities for lementary school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *34*(1), 18–24.



זרקור על

עקרונות ליבה של מתמטיקה בגיל הצעיר: מושג המספר ופעולות חיבור וחיסור

פרופ' איליה סיניצקי
ראש החוג לתואר שני בהוראת מתמטיקה
האקדמית גורדון



עקרונות ליבה של מתמטיקה בגיל הצעיר: מושג המספר ופעולות חיבור וחיסור

איליה סיניצקי, האקדמית גורדון

מבוא

פיתוח תוכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי המתרחש בימים אלה מזמין מחשבות על אודות הדגשים בתהליכי למידת המקצוע בגיל הצעיר. דילמות בנושא יכולות לעלות במספר מישורים החל משאלות על מטרות הוראת מתמטיקה בכלל ועד לסוגיה "טרייה" של דרכי שילוב בינה מלאכותית בשיעור. לדיונים אלה ערך מעשי למורה למתמטיקה: בימינו יש לצפות כי המורים לא רק יודעים את תוכנית הלימודים, אלא גם רואים את קשרה עם המתמטיקה כגוף ידע; לא רק מתמצאים באופן שוטף בספרי לימוד המספקים חומרי למידה לכיתה, אלא גם מבינים את הרציונל המתמטי והדידקטי של הפעילויות המוצגות; לא רק מכירים את הפוטנציאל של סביבות למידה וכלים דיגיטליים מגוונים, אלא גם יודעים לשלב אותם בצורה מושכלת לצורכי למידה בסגנון חקר וגילוי.

בהקדמה לתוכנית הלימודים נכתב כי התוכנית דוגלת באיזון בין שטף חישובי לבין הבנה מעמיקה, קידום שיח מתמטי, פיתוח חשיבה ביקורתית ויצירתיות (משרד החינוך, 2025). אמירה זו מזכירה את שלושת הרכיבים העיקריים של תהליך הבניית ידע מתמטי השלובים זה בזה: תוכני, דידקטי וקוגניטיבי. נציין כי הסדר חשוב כאן, כי "הדידקטיקה צומחת מהתוכן המתמטי" (פרופ' נצה מובשוביץ-הדר, שיחה פרטית) - כלומר צורכי למידת התוכן אמורים להכתיב את דרכי הוראת המקצוע ודרכי חשיבת הלומד. בכך, נראה כי האיזון המוזכר בין שטף חישובי לבין הבנה מעמיקה מְזַמן הבהרה והרחבה משמעותיות.

הדיונים על אודות השילוב בין שתי שאלות מרכזיות בלמידת המקצוע, כלומר "כיצד?" ו"למה?", או יותר רחב, על היחס בין היבטים שונים של למידת מתמטיקה בבית ספר, מאפיינים את התפתחות החינוך המתמטי מאמצע המאה הקודמת, כאשר התברר כי ההתקדמות העצומה במתמטיקה השפיעה על התוכן אך לא על סגנון ההוראה. בכך "פג התוקף" לפרדיגמה של הוראה ולמידת מתמטיקה כאוסף אלגוריתמים ומשפטים פורמליים. בברית המועצות גרם הדבר לצמיחה של בתי ספר וכיתות מיוחדות עם למידת מתמטיקה מעמיקה ובהמשך לשינויים בתוכנית הלימודים עם דגש יתר על הפן הפורמלי של המתמטיקה. בארצות הברית הדגש החזק שהושם במסמכים של NCTM (1989) על מרכיבים קוגניטיביים בלמידת המקצוע "בתמורה ללימודי התוכן" גרם ממש ל"מלחמות מתמטיות" (Schoenfeld & Daro, 2024).

בארץ שינויים אלה התבטאו בשנות השמונים והתשעים בשליטתה של הגישה התבניתית בלמידת יסודות החשבון, ובהמשך, עם יישום תוכנית הלימודים "החדשה" (משרד החינוך, 2006), בפיתוח מגוון סדרות ספרי לימוד המבוססים על עקרונות דידקטיים די דומים זה לזה. מבחינת התוכן, למשל, בתחום החשבון הם כולם עוסקים, בפרופורציה כזו או אחרת, בפיתוח מיומנויות חישוב בתחום מספרים טבעיים ומספרים רציונליים חיוביים (המוצגים כשברים פשוטים וכמספרים עשרוניים), לרבות יכולת מציאת המודל המתמטי והאלגוריתם החישובי המתאימים לפתרון כל בעיה מילולית. ברור, כי תוכנית לימודים ובעקבותיה מחברי ספרי הלימוד מתכוונים ומכוונים לכך שפיתוח זה לא יסתפק בהקניית אלגוריתמים, אלא יתלוו אליו הבניית ידע משמעותי על אודות מהותם, גבולות יישומם, אפשרויות שימוש באסטרטגיות פתרון מגוונות וכדומה. דברים אלה אמורים לתרום להבניית תובנות עבור קבוצות מספרים שונים, תכונותיהן ופעולות החשבון, ובכך נכנסים תחת כותרת "הבנה מעמיקה".

בהקשר זה, נדמה כי התוכן המתמטי הנלמד בכל הכיתות של בית הספר היסודי - החל כבר מכיתה א' - מאפשר ואף מזמן היבט נוסף המעמיק עוד יותר. הכוונה היא להיכרות מעשית עם **רעיונות הליבה של המתמטיקה** ויישומם בתהליכי למידה. נשמע מדהים ואפילו בלתי



סביר כי רשימת רעיונות היסוד הללו קצרה באופן מפתיע. למעשה, כל המתמטיקה "עומדת" על הרעיונות הבאים: שקילות לרבות זהות ושוויון, שימור ושינוי, סימטריה כולל זוגיות, מבנים ודגמים, התאמות ודרכים לתיאורן, ליניאריות ואי־ליניאריות (Gowers, 2008; Pokutta, 2012).

ממבט ראשון, המושגים ברשימה נראים "גבוהים" ומופשטים למדי עבור בית הספר היסודי. אכן, מתמטיקאי מנוסה חש, מבין ומדגים כל אחד מהמושגים הללו באופן מגוון ועמוק - ומה לזה וללומד הצעיר העוסק בתחילת דרכו בחיבור וחיסור של מספרים בעשרת הראשונה ובהיכרות עם שמות הצורות? בשני מאמרים העוסקים בסוגיה זו יודגם, כי מודעות והיכרות בלתי פורמלית עם מושגים אוניברסליים אלה וגם יישום רעיונות ליבה יכולים ואף אמורים ללוות את הצעדים הראשונים של "עשייה" מתמטית - כמובן, ללא הצגה והוראה של המונחים עצמם בשיעורים בבית הספר היסודי.

כל ההתעסקות הזו אמורה לפתח יכולות הכללה ו"מבט־על" כלפי אובייקטים ותהליכים הנלמדים בבית הספר היסודי, ובכך היא יכולה להוות אחד מהמרכיבים של **חשיבה אלגברית** בלתי פורמלית (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2007). המאמר הנוכחי מתמקד בביטוי רעיונות ליבה בלמידת מושג המספר הטבעי (כולל האפס) ופעולות חיבור וחיסור בקבוצת מספרים אלה. המאמר האמור להתפרסם בגיליון הבא של כתב העת יתייחס להעמקת הבנות לגבי רעיונות ליבה הנוגעים לנושאים הנלמדים בכיתות "גבוהות" של בית הספר היסודי ובלימודי גאומטריה.

טרם למידה "מסודרת": תזכורת על תפיסת מושג המספר

ידוע היטב כי את המושגים הראשונים של המתמטיקה ילדים בונים באופן הדרגתי תוך כדי התעסקות מוחשית אינטואיטיבית עם האובייקטים בסביבתם. כך, אוספי חפצים מציגים כמויות שונות, ומניפולציות איתם סוללות את הדרך להבניית מושג המספר, מושג היסוד של החשבון. מומחים למתמטיקה בגיל הרך מדגישים כי תהליך זה מבחינה מנטלית מתקיים כסדרת הפשטות לאוסף כמויות, ומשם להבנת המספרים הטבעיים. בסיכומה של הדרך עומדים משפטי מפתח המבטאים את עֶקרון **שימור הכמות:** "כמות החפצים באוסף נתון אינה תלויה בדרך מנייתם או בדרך סידורם" ו"כמות שמנייתה מסתיימת במספר מונה מסוים מייצגת מספר זה". נדגיש כי "השבילים" למושג המספר מגוונים, אך אין לדלג על אף לא אחת מאבני הדרך הבאות:

- "לכל עצם מתאימים את המספר". כלומר, המנייה היא תהליך בניית **התאמה** בין סדרת המספרים הידועים לילד מספירה לבין אוסף החפצים, למשל "פרה - אחת, תרנגולת - שתיים, ציפור - שלוש, חתולה - ארבע";
- "לכל עצם מתאימים את המספר **ברצף**". כלומר, אין לחזור על אותו פריט במנייה, אין לחזור על אותו מספר מונה, ואין לדלג על החפצים או על שמות המספרים;
- "פריטים המפוזרים בדרכים שונות אפשר למנות באותו סדר", הפריט זהה לעצמו ללא תלות במיקומו במרחב (מספר האחים והאחיות המשחקים עם הילד לא משתנה אם הם זזים ממקום למקום - אפילו אם קשה לזהות אותם);
- "בתהליך המנייה אין חשיבות לסוג הפריט או לגודל העצם" (יש **שקילות** בין פרה וציפור, כל אחת מהווה אותה יחידה של מנייה);
- "מנייה של כמויות **זהות** מסתכמת באותו מספר", זהו **שימור** המאפיין את הכמות הנתונה ללא תלות של דרך (תקינה!) מניית חפצי האוסף. במילים אחרות, קיימות הרבה **התאמות חד־חד ערכיות** בין קבוצה נתונה של חפצים וקבוצה של מספרים מ־1 עד למספר המונה המסכם לקבוצה זו.
- "תהליכי מנייה של אוספים שונים ומגוונים יכולים להסתכם באותו מספר מונה" - האוספים הם כמויות **שקולות** מבחינת מנייה ובכך הם כמויות **שוות**.
- "הוספה או גריעה של פריט או פריטים גורמת **לשינוי** הכמות, ובכך המנייה תסתיים במספר אחר מאשר הקודם".

כלומר, בהתאם לאמירתה של ספרד (Sfard, 1988), מושג המספר נבנה כסדרת מעברים מתפיסה תהליכית לתפיסת המספר **כמבנה**: הוא גם אוסף של עצמים בודדים, אך גם "משהו נוסף", אובייקט שלם



בעצמו. כמובן, אין חידוש באמירות הנ"ל, הן "רק" מדגישות כי בתהליך בניית מושג המספר הילד נחשף להבנה בלתי פורמלית של עקרונות המתמטיקה, העומדים ממש **ביסוד הידע המתמטי**.

פעילות 1 לדוגמה. מושג המספר.

יש להתאים את הניסוח המילולי ליכולת הלומד. שימו לב לפיתוח הבנת יציבות הכמות, שקילות בין כמויות ויכולת המיון.

1. סדרו את המדבקות על הדף כמו באיור 1א.
"כמה מדבקות יש על הדף?".

איור 1א.

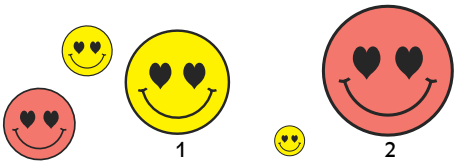
מדבקות פזורות על הדף



2. מונים את המדבקות - "כמה מדבקות יש על הדף?"
   - נתחיל למנות את המדבקות, כמו באיור 1ב. המשיכו למנות. לנוחיות, אפשר לסמן כל מדבקה אחרי מנייתה. כמה מדבקות יש על הדף?
   - נתחיל שוב למנות את המדבקות כמו באיור 1ב. המשיכו למנות בדרך אחרת מאשר בסעיף הקודם. כמה מדבקות יש על הדף?
   - כעת התחילו למנות מדבקות באופן אחר מאשר באיור 1ב, ומנו את כולן. כמה מדבקות יש על הדף?

איור 1ב.

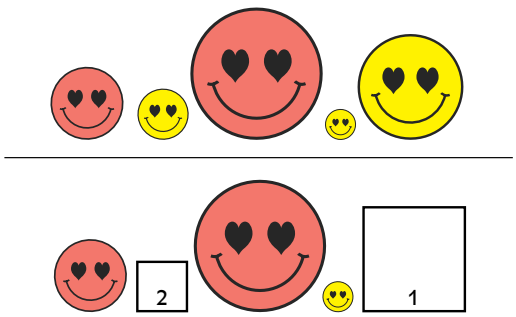
התחלה של מניית המדבקות



3. מסדרים ומונים את המדבקות - "כמה מדבקות יש בשורה?"
   - שימו את כל המדבקות שעל הדף בשורה אחת לפי רצונכם (ר' דוגמת הפתרון באיור 1ג למעלה). מבלי למנות אותן, שערו כמה מדבקות יש בשורה.
   - מנו את המדבקות בשורה בסדר כלשהו. לנוחיות, אפשר להפוך כל מדבקה אחרי מנייתה (ר' דוגמה לשלב הביניים באיור 1ג למטה). כמה מדבקות יש בשורה?
   - מנו את המדבקות בשורה זו אחר זו. כמה מדבקות יש בשורה?
   - התחילו למנות מדבקות מקצה אחר של השורה, ומנו אותן זו אחר זו. כמה מדבקות יש בשורה?

איור 1ג.

אותן המדבקות מסודרות בשורה ודוגמה לתהליך מנייתן



4. מונים בסדר מסוים (ר' איור 1ד)
   - מנו את המדבקות מהגדולה ביותר עד לקטנה ביותר. כמה מדבקות יש בסך הכול?
   - מנו קודם כל את המדבקות האדומות, ואחר כך את כל האחרות. כמה מדבקות אדומות יש? כמה מדבקות יש בסך הכול?
   - מנו רק את המדבקות שאינן אדומות? כמה מדבקות לא אדומות יש?

איור 1ד.

אותן מדבקות למנייה בסדר מסוים



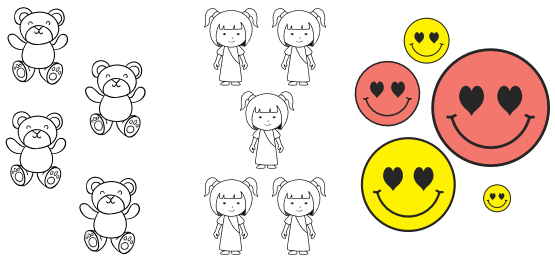


5. משווים בין גודלי הקבוצות (ר' איור 1ה).

- תנו לכל בובה בתמונה מדבקה, ומנו כל בובה שמקבלת מדבקה. כמה בובות קיבלו מדבקה? האם נשארו בובות שאין להן מדבקה? האם נשארו מדבקות? מה יש יותר, בובות או מדבקות?
- תנו לכל דובון בתמונה מדבקה, ומנו כל דובון שמקבל מדבקה. כמה דובונים קיבלו מדבקה? האם נשארו דובונים שאין להם מדבקה? האם נשארו מדבקות? מה יש יותר, בובות או מדבקות?

איור 1ה.

מדבקות לבובות ולדובונים



מספרים, "תרגילים" וחשיבה אלגברית בכיתות "הנמוכות"

נראה כי פיתוח מיומנויות חישוב של התלמידים עומד, לפחות אצל רוב המורים, במקום הראשון בסדר העדיפויות של הוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי. מבלי להמעיט בחשיבות השליטה של התלמיד בארבע פעולות החשבון (גם במאה ה־21), ברצוני לציין כי עיסוק זה יכול להיות בּמָה וכלי להבניית תובנות עמוקות כלפי אובייקטים מתמטיים. יש לזכור כי, בניגוד לסטיגמה השטחית, "מתמטיקה אינה עוסקת במספרים ואפילו לא באותיות ובנוסחאות" (Lockhart, 2009).

השוואת מספרים בד בבד עם הכרתם

כבר בשלב החזרה להיכרות עם מספרים בעשרת הראשונה (ממנה מתחילים למידת חשבון בכיתה א') יש מקום להעמקה בשני היבטים: הבנת שוויון הכמויות ודרכים להשוואתן. טענה קריטית אומרת "אם (ורק אם!) בין שני אוספי פריטים אפשר לבנות התאמה חד־חד ערכית, אז הם שווים בכמותם" נשכחת לפעמים בהוראת החשבון בכיתות "הנמוכות". טענה זו מציעה דרך לקביעת שוויון כמויות: לצורך השוואה בין כמויות **אין בהכרח למספר אותם**. במובן זה, מושג השוויון הוא אף עמוק יותר ובסיסי יותר מאשר מושג המספר. נובע מזה, כמובן, כי כל כמות שווה לעצמה. אך גם, אם לכל ילד התאימו פריט שונה מאוסף פריטים ("מדבקה אחת לכל ילד"), ולא נשארו פריטים, אז מספר הפריטים שווה למספר הילדים - **מבלי לדעת מהו מספר זה**. כלומר, אין בזה קריאה להכתיב דבר כ"כלל לזכור" לתלמידים, אלא לבנות הבנה דרך פעילויות מוחשיות מגוונות. נציין כי סימן השוויון מבטא שוויון בין מספרים ולא בין כמויות, לדוגמה, אין להשתמש בסימן שוויון בין שלושה פילים ושלושה סוסים (Carpenter, Franke & Levi, 2003, p.13).

בהמשך, כל מספר טבעי "חדש" מתקבל כתוצאת פעולה מתמטית של "מספר עוקב" הקודמת לכל ארבע פעולות החשבון. זאת אומרת, כל מספר הבא בסדרת המספרים הטבעיים הוא **גדול מהקודם לו**. עקב **העבירות** (טרנזיטיביות) של היחס "גדול מ־", מספר זה גם גדול **מכל אחד מהקודמים** לו. בהתאם לכך, לפי **הגדרה** של היחס "קטן מ־", כל מספר טבעי שקודם למספר - קטן ממנו. ברור כי תובנות אלו אין להקנות באופן מופשט, אלא לבנות אותן בסדרת דוגמאות ופעילויות מוחשיות, אולי דווקא ללא שימוש בסימנים פורמליים. בה בעת, יש לשאוף להבנה כי בין שני מספרים **שונים**, בהכרח אחד מהם (נניח, a) גדול מאחר (b), **ובהתאם**, b קטן מ־a - זוהי אחת **מאקסיומות הסדר** בין מספרים שתקפות לכל הקבוצות על ישר המספרים - ובכך ילוו את התלמידים לאורך כל לימודי המתמטיקה. יכולת התלמיד לומר עם הבנה "חמש גדול משלוש, שלוש גדול משתיים, **ומכך** חמש גדול משתיים" (ואחר כך גם "**במילים אחרות**, שתיים קטן מחמש") משמעותית הרבה יותר מאשר הכרת הסימנים "<" או ">".



פעילות 2 לדוגמה. השוואת כמויות והשוואת מספרים

1. הבובות של תמי.
   - תמי קיבלה בובה במתנה. יש לה כעת יותר בובות או פחות בובות מאשר היו לה קודם? האם מספר הבובות שיש לה גדל או קטן?
   - תמי איבדה בובה. כיצד השתנתה כמות הבובות שלה?
   - תמי מציירת פרחים, פרח אחד לכל בובה שלה. מספר פרחים שהיא צריכה לצייר הוא (גדול מ־/שווה ל־/קטן מ־) מספר בובות שלה?
   - תמי נתנה פרח לכל בובה, ונשארו לה עוד פרחים. מה יש יותר לתמי - בובות או פרחים?
2. התפוחים של אבי ותמי
   - לתמי יש יותר תפוחים מאשר לאבי. כלומר, לאבי יש (יותר / פחות / אותה כמות) תפוחים מאשר לתמי; מספר התפוחים של אבי הוא (גדול יותר/קטן) יותר מאשר מספר תפוחים של תמי.
   - היו לתמי יותר תפוחים מאשר לאבי. תמי אכלה שני תפוחים. האם יכול להיות שעדיין יש לה יותר תפוחים מאשר לאבי? אם כן, הביאו דוגמה מספרית מתאימה. האם יכול להיות שלאבי כעת יש יותר תפוחים מאשר לתמי? אם כן, הביאו דוגמה מספרית מתאימה.
   - לתמי היו יותר תפוחים מאשר לאבי, והיא נתנה לו תפוח אחד. האם ייתכן כי לתמי ולאבי יש כעת אותה כמות התפוחים? האם יכול להיות שעדיין יש לה יותר תפוחים מאשר לאבי? האם יכול להיות שלאבי כעת יש יותר תפוחים מאשר לתמי? הציגו דוגמאות מתאימות.
3. קניות קטנות. גלידה עולה במכולת יותר מאשר בקבוק מים.
   - אומר דני: "יש לי מספיק כסף לקנות שתי גלידות, אך לא מספיק לקנות שני בקבוקי מים." הייתכן?
   - אומרת דנה: "יש לי מספיק כסף לקנות שני בקבוקי מים, אך לא מספיק לקנות גלידה." הייתכן?
   - אומרים הם יחד: "הכסף של דני מספיק בדיוק לשתי גלידות, הכסף של דנה מספיק בדיוק לשני בקבוקי מים." למי יש יותר כסף?

בהמשך, כאשר לומדים על מספרים טבעיים גדולים יותר, נובע מתובנות אלו כי, למשל, כל מספר דו־ספרתי גדול מכל מספר חד־ספרתי, או כל מספר בשורה הבאה של לוח ה־100 גדול יותר מהמספרים בשורות הקודמות. בנושאים אלה אפשר לדון כבר לצד ההיכרות עם מספרים בתחום ה־100 בכיתה, ובדומה, למשל, בהשוואה בין מספרים תלת־ספרתיים וארבע־ספרתיים. כך, כל מספר ארבע־ספרתי מכיל אלף אחד לפחות, וחלקו זה כבר גדול מכל מספר תלת־ספרתי. שימו לב **לאופי האלגברי** של המסקנות המתקבלות - הן לא תלויות בבחירת מספרים ספציפיים בתחומים הנדונים. כך, תמיד נכון כי ???? > ??? כאשר כל אחד מסימני שאלה מסמן **ספרה כלשהי**. תובנה זו, אגב, אמורה גם למנוע את "האנלוגיה" בתחום המספרים העשרוניים, כאשר ספרה במקום הראשון אחרי הנקודה העשרונית במספר העשרוני מייצגת את החלק הגדול ביותר שלו.

על מהות פעולות החשבון

בד בבד עם הרחבה הדרגתית של תחום המספרים הטבעיים (עד 100 בכיתה א' ובהמשך עד 1000, רבבה וכדומה), תלמידים אמורים להגיע ללמידת פעולות חשבון המתארות מצבים מחיי היום־יום. כך, בתחום המספרים הטבעיים מצבי איסוף והוספה ממודלים על־ידי פעולת חיבור, ופעולת חיסור מתארת תהליכי הפרדה או גריעה (משרד החינוך, 2025). חשוב להבין כי בבסיס פעולות האריתמטיקה עומד **עֶקרון האדיטיביות** של כמות: בחלוקת השלם לחלקים, הסכום של החלקים שווה לשלם המחולק. "יציבות" המספר הנרכשת בהתנסויות עם כמויות קטנות בגיל הצעיר אמורה (חייבת!) להתבטא בכיתה א' באופן פורמלי. כמות של חמישה פריטים אפשר להציג כשני חלקים: שלושה פריטים בחלק אחד ושני פריטים בחלק אחר, **כלומר**, לדוגמה, המספר 5 הוא סכום של שני מספרים, 3 ו־2, ובכתיבה פורמלית, **5=3+2**. תגובת הקורא היא כמעט אוטומטית: למה להבליט את השוויון הזה? ואולי בכלל הכוונה ל: 5=2+3? הינה, זהו גרעין כל הסיפור! את המספר 5 אפשר להציג



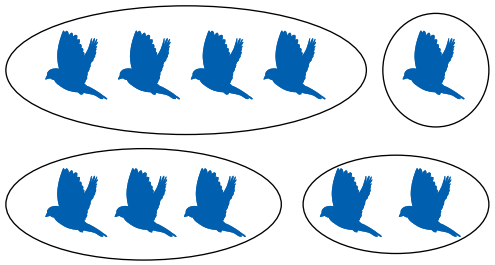
כסכום של 3 ו־2 (או כסכום של 2 ו־3), במילים אחרות, הסכום 3+2 הוא מספר. נכון כי בשפה עברית (כמו בהרבה שפות אחרות) אותה מילה "סכום" מתארת - לא במקרה - את כל אחד משני אגפי השוויון, גם את 3+2, וגם את 5 (שאפשר גם לכנותו "ערך הסכום"). כל מספר, כפי שכבר הוזכר, שווה לעצמו, יש **שקילות** בין שתי דרכים אלו לבטא את הכמות הנתונה (5 במקרה שלנו). בכך, הביטוי 3+2 אינו התחלה של תרגיל חיבור המזמנת "השלמה": 3+2=, אלא אחת מההצגות של המספר 5.

מאחר שאת אותה הכמות אפשר לפצל לשני חלקים בדרכים נוספות, את אותו מספר 5 אפשר להציג גם כסכומים אחרים של שני מספרים, דוגמת 4+1=5. מהסימטריה של יחס השוויון, נכון כמובן גם לכתוב 4+1=5, ולומר כי 5 הוא הסכום של 4 ו־1. בחלוקה זו הגודל של אחד ממרכיביה (המחובר 4) גדול יותר מאשר בחלוקה הקודמת (3), **ובהתאם**, הגודל של המחובר הנוסף, המשלים את אותה הכמות, חייב להיות קטן יותר מאשר בחלוקה הקודמת (2). איור 2 ממחיש עיקרון זה ויזואלית, ובאופן פורמלי הוא מתבטא בשוויון:

a+b=[a+(b+1-1)]=[a+(1+(b-1)]=[(a+1)+(b-1)]

איור 2.

פיצולים שונים של אותה הכמות



הכללת השוויון מצביעה על אפשרות שינוי במחוברים במספר גדול מ־1, בהגדלה ובהקטנה בהתאמה - עד להקטנה של אחד מהמחוברים עד ל־0, כך שההצגה "האחרונה" בסדרת הצגות המספר הטבעי כסכום של שני מחוברים שלמים לא שליליים (מה שרלוונטי לכיתות הנמוכות של בית הספר היסודי) היא 5+0=5 או, שוב, המספר 5 הוא סכום של 5 ו־0, 5=5+0. זוהי המשמעות של סדרת הסכומים בעלי אותו ערך, למשל, של המספר 10:

10+0 9+1 8+2 7+3 6+4 5+5 4+6 3+7 2+8 1+9 0+10.

כל סכום כאן הוא הצגה אחרת של אותו מספר, ואם אחד המחוברים עולה במספר מסוים, על המחובר הנוסף לרדת בדיוק באותו מספר. כלומר, עיקרון שימור הסכום (או שימור הכמות) מכתיב מייד מהו הערך של סימן השאלה בשוויון 5+5=6+? או בשוויון 5+?=6+5. פעילויות ודיונים בסגנון זה אמורים לתרום להבנה נכונה של סימן השוויון כסימן השקילות בין כמויות (ובהמשך - בין ביטויים אלגבריים ובין אובייקטים שקולים בכלל), ולמנוע פירוש שלו כאופרטור לביצוע פעולת חישוב, דבר שגורם לתלמידים להחליף את סימן השאלה למספר 12 בשוויון 5 + [ ] = 8 + 4 (Carpenter, Franke & Levi, 2003).

השוואה וחישוב של סכומים והפרשים

כל הנאמר לעיל על הבנת מהות הביטויים החשבוניים לא מבטל את הצורך ללמד לחשב סכומים, הפרשים, מכפלות ומנות. תובנות אלו אמורות לעזור לתלמיד לערוך חישובים תוך כדי הפעלת שיקולים לבחירת דרך יעילה לפתרון. לפיכך, בצמוד לסוגיית החישובים עומדות יכולת הערכה של טווח התוצאה ותכונותיה (אומדן), וגם השוואת תוצאות החישוב **טרם החישוב עצמו**.

נתבונן לדוגמה בחמישה סכומים אקראיים מהעשרת הראשונה: 4+3 5+3 6+3 2+4 5+4

נראה כי אחרי קביעת ערך הסכום בכל אחד מהמקרים - בעזרת כלים מוחשיים או בלעדיהם - התלמידים אמורים לגשת למשימה הבאה. אך, למעשה, ההתעסקות יכולה להיות הרבה יותר מעמיקה:

- ראשית, מתגלים כאן שני **סכומים שווים**, ויש לברר מהי הסיבה לכך. ברור: הוספנו יחידה אחת לאחד החלקים ובהתאם הורדנו יחידה אחת מהחלק האחר (כך עברנו מ־4+5 ל־3+6). במילים אחרות, רק העברנו יחידה אחת מחלק אחד לחלק אחר - ולכן ברור כי **נשמר הסכום הכולל** בתהליך זה. כמובן, תובנה עמוקה זו לא רוכשים מדוגמה בודדת אלא חוזרים לניתוח התופעה, גם עם מספרים גדולים יותר, וגם עם שינוי החלקים במספר שונה מ־1. למשל, כבר כאן אפשר להציע הבניית סכום או סכומים נוספים עם אותו ערך. בין היתר, אחת



מהאפשרויות היא כמובן "החלפה בין החלקים", 4+5=5+4 וכדומה: בפעולת חיבור קיימת **סימטריה** בין מרכיבי הפעולה, ובכך אפשר להעניק אותו שם לחלקים שאותם מחברים יחד, ולכנותם **מחוברים**.

- שנית, יש באוסף סכומים שבהם אחד מהחלקים (מחוברים) זהה. באחד מהמקרים מוסיפים לאותו מספר 5 את המספרים 4 או 3. את האמירה האינטואיטיבית "אם לאותו מספר 5 מוסיפים יותר - אז גם הסכום יהיה יותר גדול" אפשר להמחיש בעזרת ציר המספרים - ושוב, כמובן, באופן שיטתי כדי להגיע להבנה כי כאשר לאותו מספר כלשהו מוסיפים יותר בפעם הראשונה מאשר בפעם השנייה - אז גם הסכום בפעם הראשונה יהיה גדול יותר, כפי שמתואר באיור 3א.

שני זוגות נוספים המופיעים באוסף, 2+4 ו־3+4, וגם הזוגות 5+4 ו־2+4 ממחישים את אותו עיקרון באופן אחר: אם מספר אחד היה גדול מאחר ומוסיפים לשניהם את אותו המספר, אז גם הסכום הראשון יהיה גדול מהשני (תכונה זו ידועה כתכונת **מונוטוניות** של החיבור) - כפי שמומחש באיור 3ב. נציין כי תכונה זו תקֵפה גם במקרה שבמקום הוספה מקטינים את כל אחד מהמספרים באותו ערך. כלומר, מונוטוניות זו יש להמחיש בהמשך גם בהפרשים דוגמת 6-4 ו־9-4 (איור 3ג). במילים אחרות, תובנה זו היא **אלגברית לגמרי**.

איור 3.



א. המחשת הוספה של מספרים שונים לאותו מספר על ישר המספרים



ב. המחשת הוספה של אותו מספר למספרים שונים על ישר המספרים



ג. המחשת הורדה של אותו מספר ממספרים שונים על ישר המספרים

- עוד תובנה נובעת מהשוואה של זוג אחר של סכומים, 2+4 ו־6+3: אחרי החלפת סדר המחוברים בזוג הראשון, כל אחד מהמחוברים בסכום זה קטן בהתאמה מהמחוברים בסכום השני, ובכך בשרשרת הסכומים 6+3, 4+3, 2+4 כל סכום קטן מקודמו. זה מאפשר להסיק מסקנה לגבי השוואה בין שני סכומים נתונים. עם זאת, נראה כי דיון בסגנון זה מתאים לכיתות גבוהות מאשר כיתה א'.

איורים 3ב ו־3ג ממחישים גם את **מהות ההפרש** בין שני מספרים שלמים: זהו **המרחק** בין הנקודות המייצגות את המספר הגדול והקטן על ציר המספרים. אגב, נראה כי הביטויים "ישר המספרים" ו"ציר המספרים" די שקולים מבחינה דידקטית. יש רק לזכור כי לסימון של חץ על הישר יש משמעות חשובה: החץ המסמן את כיוון עליית המספרים על ישר המספרים (וכמובן לא מסמנים חיצים בשני הכיוונים על הישר, כמו שעדיין אפשר לראות ברשת). כלומר, מסימון המקום של שני המספרים על ישר המספרים אפשר לגלות שני דברים:

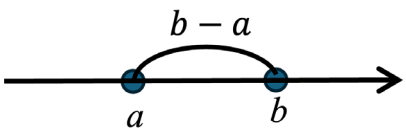
א. איזה משניהם גדול יותר (מיקומו "ימינה" יותר, או יותר מדויק, הוא נמצא "בכיוון החץ");

ב. בכמה מספר זה גדול יותר - זהו אורך הקטע בין המספרים (ר' איור 4).

יש לשים לב כי טענות אלו תקפות ללא תלות בקנה המידה הנבחר, בערך המספרים ואפילו בכך אם הם חיוביים או שליליים. כך, כבר בכיתה א' צריך להיות מובן כי המספר 0 קטן מכל מספר חיובי, ובהמשך ההיכרות עם קבוצות מספרים תובנה זו יכולה לעזור בהשוואה למשל בין שליש ורבע או בין (-5) ו־3.

איור 4.

הפרש בין שני מספרים על ישר המספרים



בחזרה להשוואת ההפרשים, אותה הבנה על דרכי הצגת **אותו מספר** כסכומים שונים יכולה לבסס את ההחלטה לגבי השוואה בין, נניח, הפרשים 8-5 ו־8-6:



שניהם משלימים עד אותו שלם 8, אחד משלים את 5 והשני את 6. ברור, כי השלמה של 5 היא גדולה יותר, ושוב, ישר המספרים ממחיש יפה את השיקול.

יש לציין כי תובנות לגבי מהות הפעולות ודרכי השוואת תוצאותיהן מבססות **אלגוריתמים** שמתבטאים במגוון דרכי החישוב ביניהן אמור לבחור התלמיד בכל מקרה ומקרה. כך, שתי דרכי הצגה של עשרת שלמה מספקות שתי דרכי חישוב של הסכום 8 ו־5. בהמשך, מגוון האפשרויות לחישוב סכום דוגמת 28+15 רחב עוד יותר וכולל הצגת כל מחובר כסכום עשרות שלמות ויחידות בודדות שנותרו, הוספה "הדרגתית" של חלקים מ־15 למחובר הראשון (28+10+5), או השלמתו של מחובר הראשון עד ל־30 ובכך הקטנתו של המחובר השני ל־13, ואולי גם השלמת המחובר השני עד ל־20. שימו לב כי ההמללה האמורה ללוות את כל אחת מהפרוצדורות למשל, "הסכום 28+10 הוא כבר 38, ומוסיפים לזה עוד 5". תיאור זה מספק גם את האומדן של הסכום, ובכך עוזר למנוע חלק מהשגיאות הנפוצות ב"תרגילים עם המרת העשרת". מצב דומה הוא גם בחישובי הפרשים. כך למשל, ההפרש 13-4 **נשמר** תוך כדי שינוי כל אחד ממרכיביו ב־3, 13-4=10-1 או בדרך חילופית קטן ב־1 מההפרש של 13 ו־3: 13-4=13-3-1. גם כאן התובנה של טיב השינוי המתאים אמורה למנוע שגיאות "העתקת כלל הפיצוי" מחיבור לחיסור - גם בתחום המספרים הרב־ספרתיים (סיניצקי ואילני, 2014, עמ' 175, 180; תירוש ואחרים, 1999): לדוגמה, ההפרשים 143-258 ו־140-261 אינם שווים, בניגוד לסכומים 143+258 ו־140+261.

לסיום נציין עוד השלכה של הבנת ההפרש בין המספרים כמרחק על ישר המספרים בין הנקודות המייצגות אותם. "קפיצה קבועה חוזרת" ממספר מסוים משמעותה הבניית סדרה בעלת הפרש קבוע בין איבריה הצמודים, סדרה חשבונית בשפה הפורמלית (נציין אגב, כי שם הסדרה נובע לא מכך כי מתבצעת פעולת חשבון כלשהי בין איבריה, אלא מהסיבה שכל איבר בה הוא **ממוצע חשבוני** של שני שכניו בסדרה). זוהי כמובן דוגמה חשובה מאוד של קשר **ליניארי**, ובמקרה ש"הקפיצות" מתחילות מ־0, זוהי גם **פרופורציונליות** בין מספר סידורי של איבר בסדרה לבין ערכו. אך אלו סוגיות השייכות כבר למאמר הבא בנושא.

פעילות 3 לדוגמה. על השוואה ועל חישוב הסכומים וההפרשים

מומלץ להתאים את טווח המספרים לרמת הלומד, אך שימו לב כי לפתרון התרגיל לא נדרשת מיומנות חישוב בטווח המספרים המוצגים.

1. מבלי לחשב את ערכי הסכומים וההפרשים בכל זוג, החליטו אם הם שווים או לא, ואם לא - איזה מהם גדול יותר ובכמה.

א. 23 + 128	25 + 128
ב. 96+127	95+128
ג. 90+18	93+14
ד. 127-45	127-43
ה. 131-47	129-45
ו. 43-4	43+4

כל סעיף הוא דגם לפעילות עם זוגות מספרים אחרים הממחישים את אותו העיקרון.

2. בכל זוג סכומים או הפרשים שווים הנתון, השלימו את המספר החסר במקום סימן שאלה, ובכך חשבו את ערך של כל הסכום או ההפרש:

א. 23 + 198 = ? + 200

ב. 123 + 248 = 120 + ?

ג. ? - 92 = 18 - 90

ד. 18 - 92 = 20 - ?

כל סעיף הוא דגם לפעילות עם זוגות מספרים אחרים הממחישים את אותו העיקרון.

3. שתי הפתעות בחקר לוח ה־100. התבוננו בלוח ה־100 המכיל מספרים מ־0 עד 99.

א. מספר נקרא מספר פָּלִינְדְרוֹמִי כאשר קריאתו בכיוון ה"הפוך" מביאה לאותה התוצאה, כמו המספר 818 (אך לא 75). מספרים חד־ספרתיים הם, כמובן, מספרים פלינדרומיים, אך נוציא אותם כעת מהדיון (סיניצקי וסיניצקי, 2019).

- איפה נמצאים מספרים פלינדרומיים על לוח ה־100?



- אם נחבר שני מספרים פלינדרומיים, האם ערך הסכום יהיה מספר פלינדרומי?
  אם נקרא סכום של שני מספרים פלינדרומיים "בכיוון הפוך", ערך הסכום לא משתנה. למשל, 44 + 88 = 88 + 44 אך יש עוד זוגות מספרים בלוח ה־100 שערך סכומם לא משתנה בקריאת סכום זה "בכיוון הפוך". למשל, 98 + 34 = 43 + 89.
- על סמך כל סכום של שני מספרים דו־ספרתיים פלינדרומיים, הרכיבו עוד סכומים פלינדרומיים.
- מצאו שיטה למצוא זוגות מספרים אלה על לוח ה־100.

ב. בחרו עשרה מספרים אקראיים על לוח ה־100 כך שיהיה נציג אחד מכל שורה ומכל עמודה של הלוח, ומצאו את סכומם. כעת בחרו עשירייה אחרת עם אותו תנאי (נציג אחד מכל שורה ומכל עמודה). האם הסכומים שיתקבלו יהיו שונים? למה? רמז: הציגו כל מחובר כסכום העשרות השלמות והאחדות שלו, ולאחר מכן השוו את הסכומים (סיניצקי ואילני, 2014).

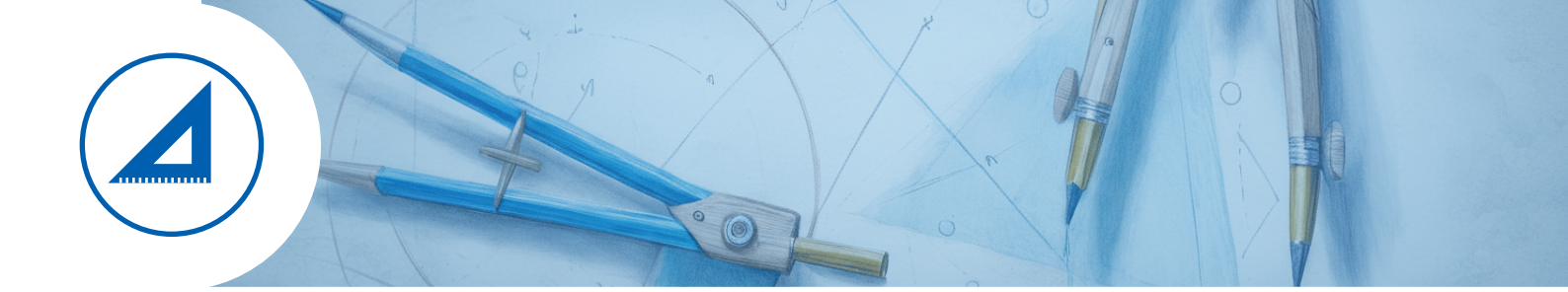
רשימת המקורות

- משרד החינוך, התרבות והספורט (2025). **תוכנית לימודים חדשה במתמטיקה ליסודי.** ירושלים: המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים. https://pop.education.gov.il/tchumey_daat/matmatika/yesodi/oraat-math/new-curriculum/
- משרד החינוך, התרבות והספורט (2006). **תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים.** ירושלים: המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים.
- סיניצקי, א' וסיניצקי, מ' (2019). תרגילי חיבור פלינדרומיים על לוח המאה. **מספר חזק 2000**, 30, 48-53.
- סיניצקי, א' ואילני ב' (2014). **שימור ושינוי: תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות.** תל-אביב: מכון מופ"ת.
- תירוש, ד', פישביין, א', צמיר, פ', אזהרי, נ', ברש, א' קליין ר' ושני, ב' (1999). **העקביות המתמטית של תלמידים: מיון, מקורות ואסטרטגיות טיפול.** תל-אביב: רמות.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carraher, D.W., Schliemann, A.D. & Schwartz, J. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum (pp. 235-272).
- Gowers, T. (Ed.). (2008). *The Princeton companion to mathematics*. Princeton: Princeton University Press.
- Lockhart, P. (2009). A mathematician's lament. *Mathematical Association of America Online*. https://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/rzut_oka/Zajecia_dla_MISH_2011-12/Lektury_files/LockhartsLament.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pokutta, S. (2012). Fundamental principles(?) in mathematics. *Sebastian Pokutta's Blog*. https://spokutta.wordpress.com/2012/01/02/fundamental-principles-in-mathematics/
- Schoenfeld, A., & Daro, P. (2024). More math, less "math war". *Science, 383*(6689), 1297-1299.
- Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13.

במבט אחר

מדוגמאות להכללה: משימה דינמית, משולש ישר־זווית לקידום שיח מתמטי

ד"ר חסן איוב
המחלקה לחינוך מתמטי
אוניברסיטת חיפה



מדוגמאות להכללה - משימה דינמית, משולש ישר־זווית לקידום שיח מתמטי

חסן איוב

תקציר

במאמר זה מוצג ניתוח מקרה פדגוגי של משימת הערכה אינטראקטיבית בגאומטריה, המבוססת על יישומון דינמי שעוצב לעידוד שיח מתמטי מושגי בכיתות ד'-ו'. המשימה מזמנת חקר ואינטראקציה תוך כדי יצירת דוגמאות מגוונות של משולשים ישרי זווית על ידי גרירת אחד הקודקודים. באמצעות המערכת מתאפשר איסוף אוטומטי של תשובות הלומדים והצגה חזותית של הדוגמאות במרחב כיתתי כמוקד לדיון וניתוח מושגי.

המאמר מבוסס על ניתוח אוסף התנסויות שבוצעו במערכת, ומתמקד באופן שבו דוגמאות מגוונות שיצרו הלומדים מממשות את הפוטנציאל לשיח מתמטי עשיר ומקדמות הבחנה והכללה. מוצג כיצד עיצוב המשימה בסביבה טכנולוגית (Example-Eliciting Tasks – EETs) תומך בהוראה מושתתת הבנה, דיאלוג ופיתוח חשיבה מתמטית.

מילות מפתח: שיח מתמטי, משימות פתוחות, סביבה גאומטרית דינמית DGE, דיאגרמות אינטראקטיביות, Example-Eliciting Tasks (EETs), נוף תפיסתי

מבוא

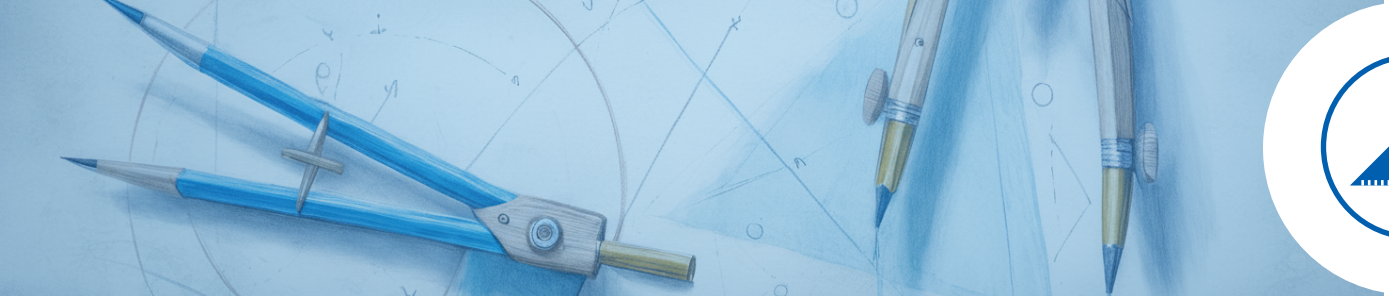
שיח מתמטי הוא אבן יסוד בלמידה משמעותית של מתמטיקה. הוא מאפשר לתלמידים להבנות את הבנתם דרך ניסוח טענות, נימוקים, השוואות ודוגמאות, ובכך לעבור מפתרון מכני להבנה מושגית (Sfard, 2008; NCTM, 2000). עם זאת, חיבור השיח המתמטי להוראה היום־יומית מצריך תכנון מושכל של סביבות למידה, המאפשרות הבחנה בדרכי החשיבה של הלומדים כפי שהיא משתקפת דרך עבודתם.

מאמר זה מציג ניתוח מקרה של סוג מסוים של משימות דינמיות, המעוצבות לפי עקרונות עיצוב ייחודיים שמטרתם לעודד חקירה, יצירת דוגמאות והובלה לשיח מתמטי מושגי בכיתה. המשימה, אשר עוצבה בסביבת GeoGebra, מזמנת ללומדים ליצור מגוון דוגמאות של משולשים ישרי זווית באמצעות גרירת קודקוד אחד בלבד. כל דוגמה נשמרת אוטומטית ומוצגת במפה חזותית הממחישה את "הנוף התפיסתי" של הלומדים.

המאמר מבוסס על ניתוח של אוסף דוגמאות והתנסויות שנאספו באמצעות המערכת, ומתמקד באופני הדיון וההכללה המושגית שצמחו ממרחב הדוגמאות הקולקטיבי. מנותחים דפוסי פתרון מגוונים, שאלות מנחות והכללות גאומטריות, תוך כדי הדגמת תרומת עיצוב המשימה האינטראקטיבית כמוקד לפיתוח שיח מתמטי עשיר וללמידה מבוססת חקירה בכיתה.

רקע תאורטי

שיח מתמטי מוגדר כתהליך שבו התלמידים והמורים משתתפים באופן פעיל בהעלאת טענות, נימוקים, הסברים והכללות (NCTM, 2000). מחקרים מצביעים על כך שמשימות פתוחות המאפשרות ריבוי דרכי פתרון מגבירות את מעורבות הלומדים, ומעודדות ביטוי של רעיונות מגוונים (Boaler & Staples, 2008). משימות המבוססות על דיאגרמות דינמיות עם אפשרות לגרירה מזמנות חקירה ויזואלית של יחסים גאומטריים. סביבות דינמיות אלו, כמו GeoGebra, תומכות בלמידה מושגית דרך אינטראקציה ישירה עם ייצוגים חזותיים - לא רק עבור תלמידים, אלא גם עבור מורים. גרירת נקודה ושינוי הצורה בזמן אמת מאפשרים למשתמש לעבור מהתבוננות סטטית להבנה פעילה של מושגים גאומטריים. תהליך זה מסייע לתלמידים לבנות משמעות מתמטית, ולמורים - לזהות דפוסי חשיבה, לחדד הבחנות ולהעשיר את ההנחיה הפדגוגית (Leung & Bolite-Frant, 2015).



עם זאת, כדי למצות את הפוטנציאל החינוכי של טכנולוגיות אלו נדרש תכנון מדוקדק של המשימה, כיוון ששילוב טכנולוגיה בהוראת מתמטיקה עלול להיות שטחי אם אינו מלווה בתכנון פדגוגי מושכל המותאם ליעדי הלמידה (Baccaglini-Frank & Leung, 2017).

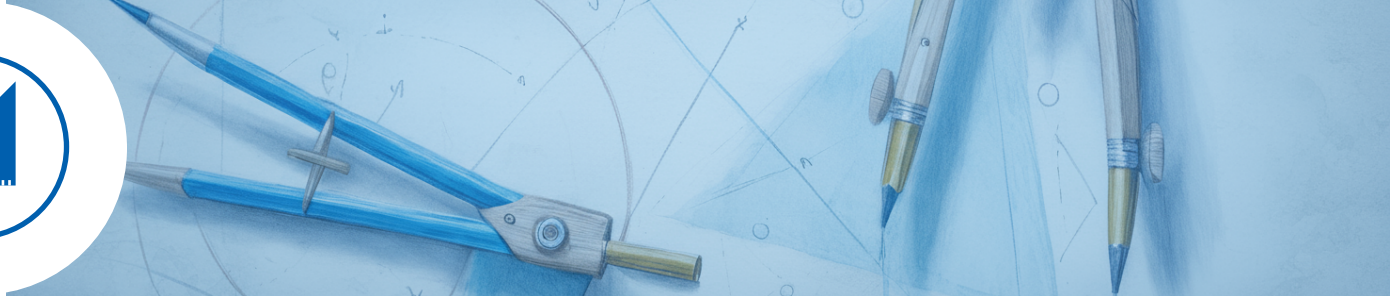
הטמעת משימות כאלו בתוך סביבות אינטראקטיביות - כדוגמת המרא"ה - מאפשרת יצירת מרחב פתרונות פתוח הנשמר אוטומטית ומוצג למורה ולתלמידים בזמן אמת. לפי Smith et al., (2009) יצירת שיח מתמטי איכותי נשענת על ניתוח עבודות תלמידים: חיזוי תגובות צפויות, מעקב אחר תוצרים, בחירה להצגה, סדר הצגת דוגמאות וקישור לרעיון המרכזי של השיעור. בהקשר זה, משימות מבוססות דוגמאות (example-based tasks) נחשבות כיום לכלי יעיל בהוראה מתוקשבת, המאפשר להציב את חשיבת התלמיד במרכז, ולהשתמש בה כבסיס לשיח מושגי. Ayoob & Olsher (2023) מראים כי ניתוח בזמן אמת של דוגמאות מגוונות - טיפוסיות, גבוליות וחריגות - מעשיר את ההוראה והופך אותה מממוקדת פתרון למכוונת הבנה והכללה.

מודלים כגון מרחב דוגמאות כיתתי (collective example space) ו"נוף תפיסתי" (task perceptual landscape) (Leung & Lee, 2013) מספקים תשתית תאורטית לניתוח ייצוגים חזותיים של תשובות תלמידים. נוף תפיסתי הוא ייצוג גרפי של כלל הדוגמאות או הפתרונות המוגשים על ידי משתתפים במשימה גאומטרית אחת, וכל תשובה מתקבלת על ידי גרירה של קודקוד (או נקודה) במערכת, ונשמר מיקומה המדויק של אותה נקודה במישור הגאומטרי. כל אחד מהמיקומים האלה מוצג כנקודה אחת, כך שניתן לראות את הפיזור של כלל הדוגמאות בכיתה, לזהות אזורים צפופים או דלילים, חריגות ודפוסים אופייניים. ייצוג זה מהווה בסיס לדיון מושגי ולניתוח משותף של פתרונות, ומספק "תמונה חזותית" של המגוון שנוצר במרחב הכיתתי (Leung & Lee, 2013).

יתר על כן, משימות של יצירת דוגמאות בסביבה טכנולוגית (EETs) יוצרות הרחבה טבעית של גישה זו. הן מזמנות את התלמידים ליצור דוגמאות רבות בהתאם לתנאי מתמטי מוגדר, ובכך לחשוף את דרכי החשיבה, ההבחנות והכללות שלהם (Olsher et al., 2016). בשילוב סביבות טכנולוגיות, EETs מאפשרות תיעוד מדויק של תהליכי עבודה, ובכך משמשות אמצעי חזק להערכה מעצבת ולפיתוח ידע מושגי. מחקר עדכני של Ayoob & Olsher (2024) מדגים כיצד מורים השתמשו במשימות מסוג זה כדי לנתח תוצרי תלמידים, להבין דפוסי פתרון ולהוביל דיון עשיר בכיתה. המסקנה המרכזית היא כי טכנולוגיה הופכת משמעותית רק כאשר היא מגויסת למטרות פדגוגיות ברורות. בפרק הבא יוצג תיאור המשימה הדינמית הנחקרת, ובתוך כך הדגשת הקשר הישיר בין העקרונות התאורטיים לבין היבטי העיצוב והיישום הפדגוגי במערכת.

תיאור משימה של יצירת משולשים ישרי זווית

המשימות עוצבו במסגרת פרויקט משותף של צוות מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי עם צוות פרויקט המרא"ה, כחלק מפיתוח משימות דיגיטליות אינטראקטיביות בגאומטריה בבית הספר היסודי. המשימות נבנו במטרה לעודד חקירה, ניסוח הכללות ופיתוח שיח מתמטי מושגי בכיתה. הן הוטמעו במערכת המרא"ה, סביבה אינטרנטית מבוססת GeoGebra, אשר מותאמת להערכה מעצבת ומאפשרת איסוף אוטומטי של תשובות, מעקב אחר פעולות הגרירה של הלומדים, ויצירת דוחות חזותיים מרוכזים. השילוב בין עיצוב פדגוגי מדויק לבין תשתית טכנולוגית תומכת מאפשר למורים לזהות תפיסות, לעורר דיון, ולכוון את ההוראה בהתאם. בכל משימה הלומדים פועלים מול ממשק גרפי אינטואיטיבי. מערכת ניתוח מרכזית מאחסנת את כל נקודות הגרירה וממפה את התשובות לפי קטגוריות שנקבעו מראש (תואם/לא תואם תנאי, חריגים, קצה). דוח ויזואלי מרכזי מאפשר להציג בפני כל תלמידי הכיתה את המגוון שנוצר. המאמר מתבסס על ניתוח אוסף דוגמאות שנאספו מהתנסויות משתמשים במערכת.



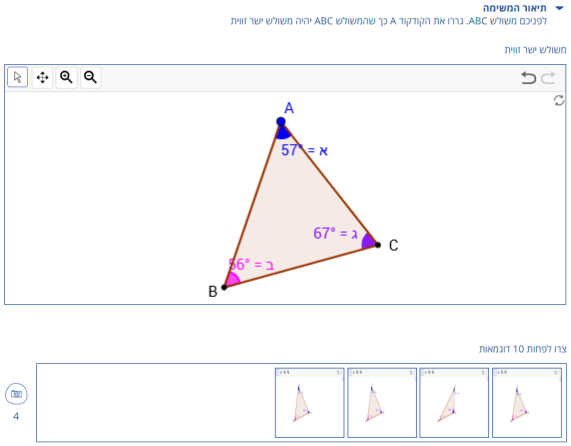
בחינת התשובות והדיונים שיכולים להתעורר בעקבותיהן מדגימה כיצד המשימות הדינמיות תורמות לניהול שיח מתמטי בכיתה - לא רק סביב השאלה אם התשובה נכונה, אלא גם דרך התבוננות באזורי פתרון מגוונים במרחב הדינמי ודיון בתכונות הגאומטריות שלהם.

תיאור ממשק המשימה משולשים ישרי־זווית במערכת

המשימה מוצגת ללומדים בתוך מערכת אינטראקטיבית (איור 1), ומעל ליישומון מופיעה ההנחיה המרכזית: גררו את הקודקוד A כך שהמשולש ABC יהיה משולש ישר־זווית. ביישומון ניתן לראות את המשולש, את מיקומי הקודקודים ואת מידות שלוש הזוויות בצבעים שונים. שניים מהקודקודים B ו־C מקובעים, והתלמידים נדרשים לגרור את הקודקוד A כדי ליצור דוגמאות מגוונות של משולשים, וכל תצורה חדשה מתקבלת כתגובה שונה על תנאי המשימה.

איור 1:

ממשק המשימה במערכת המרא"ה



לצורך שמירת ההגשות (כל הגשה כוללת מספר דוגמאות שונות) משתמשים בכפתור "מצלמה" המצוי בתחתית משמאל. בכל פעם שלוחצים על ה"מצלמה" - הדוגמה נשמרת ומתווספת לשורת דוגמאות (כפי שמופיע באיור 1, הדוגמאות השונות מופיעות מתחת ליישומון). תלמידים מתבקשים לשמור לפחות 10 דוגמאות שונות בטרם הגשת המשימה. כאשר המשתמשים "מצלמים" 10 משולשים יופיע חיווי מספרי (למשל: באיור 1 מופיע המספר 4 מתחת לאייקון המצלמה בצד שמאל למטה), והמשימה מוכנה לשליחה (הגשה).

דיון ראשוני בעקבות ההתנסות במשימה

לאחר איסוף הדוגמאות שיצרו המשתמשים במערכת, מומלץ לפתוח בניתוח דפוסי הפעולה ובחינה של דרכי הפתרון המגוונות - עוד לפני הצגת הדוחות הוויזואליים. ניתן, למשל, לשאול: כיצד בחר כל אחד מהלומדים למקם את הקודקוד A כדי ליצור משולש ישר־זווית? האם כל הדוגמאות נוצרו סביב אותו קודקוד, או שבוצע מעבר בין קודקודים שונים?

לעיתים מתגלה, בניתוח הנתונים, כי חלק מהלומדים התמקדו בזווית ישרה דווקא בקודקוד C, בעוד אחרים ראו בקודקוד A אפשרות יחידה ליצירת זווית ישרה - ורק התבוננות במכלול הדוגמאות חושפת דרכים גאומטריות מגוונות לפתרון המשימה.

במהלך דיון פדגוגי כזה מומלץ למורים או למנחים לעודד העלאת שאלות מנחות כגון:

- **האם קיימות תשובות אפשריות נוספות לאלו שהוצעו?**
- **מה נחשב כתשובה נכונה? ומה נחשב כתשובה לא נכונה?**

שאלות אלו תורמות לניהול שיח מתמטי: הן מסייעות ללומדים להבחין בין תשובות תקפות, לאתר דפוסים כלליים ולהעלות הכללות לגבי מיקום גאומטרי של תשובות נכונות.

מומלץ גם להעלות שאלות עומק, כגון "מה ניתן ללמוד על משולשים ישרי־זווית?", המובילות לבדיקה של מצבים מיוחדים, כמו משולש ישר־זווית שהוא גם שווה שוקיים, או בחינת דוגמאות גבוליות. שאלות מסוג זה מהוות בסיס לבירור פדגוגי מעמיק, ומאפשרות להעשיר

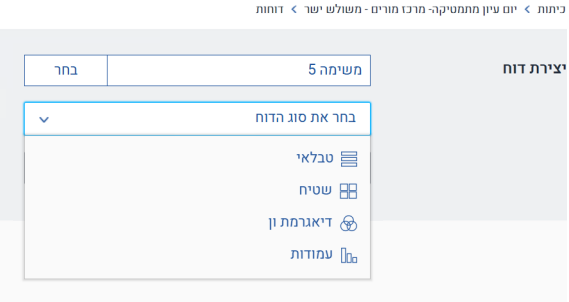
את הדיון הכיתתי ולכוון אותו להבניה מושגית עמוקה. באמצעות ניתוח הנתונים במערכת ניתן לבסס דיון איכותי ולהשוות בין הדוגמאות שנוצרו על ידי הלומדים, כחלק מתהליך למידה שיתופי ופתוח.

יצירת דוח - מבט מורה

לאחר השלמת המשימה והשתתפות בהצעת דוגמאות והדרכים שבהן השתמשו כדי לבחור וליצור את הדוגמאות השונות, נבנה מרחב דוגמאות קולקטיבי המאגד את כל ההצעות הגאומטריות של הלומדים. ניתן להציג את הנתונים בממשקים מגוונים - טבלאי, דיאגרמת וון, שטיח ועמודות - אך להלן נתמקד בממשק "דוח שטיח" (ראו איור 2).

איור 2:

דוח שטיח - ממשק מורה

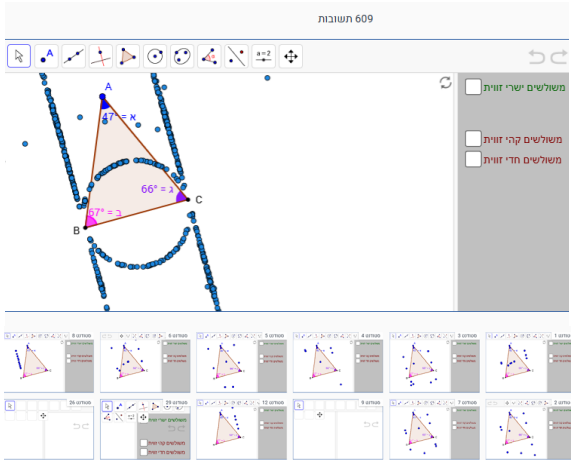


הצגת הדוח הקולקטיבי - הנוף התפיסתי

לאחר שלב ההתנסות הראשונית ניתן להציג ללומדים את ממשק מורה דוח השטיח (איור 3), המציג את כלל הדוגמאות שנשמרו עבור המשימה. לדוגמה, בדוח אחד הוצגו תשובות של כ־60 לומדים שונים. המערכת שומרת באופן אוטומטי את מיקומי הקודקוד A בכל דוגמה, וכל נקודה כחולה במישור מייצגת מיקום שנבחר והוגש. המספר 609 באיור 3 למעלה באמצע מציין את המספר הכולל של הדוגמאות שנשמרו, כלומר 609 נקודות A. דוח זה מכונה "הנוף התפיסתי" (task perceptual landscape) של הקבוצה, והוא משקף את הדרכים השונות שבהן הלומדים פירשו ויישמו את תנאי המשימה ליצירת משולש ישר־זווית.

איור 3:

ממשק מורה דוח שטיח - משימת משולש ישר־זווית



מתחת ליישומון מוצגים פתרונות הלומדים, וכל תצוגה כוללת את כל הדוגמאות של משתמש (לומד) אחד. ברירת המחדל היא הצגה אנונימית, אך קיימת אפשרות להצגת שמות כפי שהוזנו בכניסה למערכת. בעת הצגה בכיתה או בקבוצת לומדים מומלץ לשמור על אנונימיות, כדי להבטיח אקלים מיטבי ולעודד שיתוף חופשי, גם אם מתקבלות תשובות לא תקינות. בהצגת הדוח הקולקטיבי ניתן לעודד את הלומדים להתבונן בתמונה הכוללת, ולשאול שאלות כגון: מה מסמל אזור מסוים בדוח? מדוע יש ריכוז נקודות באזורים מסוימים? האם כל הנקודות מייצגות משולשים ישרי־זווית?

שיח כזה מסמן מעבר מחשיבה מקומית לחשיבה קולקטיבית מושגית, ופותח פתח לבחינת הכללות, הבחנות והגדרות גאומטריות ברמה כיתתית.

הנוף התפיסתי מאפשר מבט רוחבי ומעמיק על המגוון הקיים בכיתה, ומזמן שיח פדגוגי מושכל המבוסס על ייצוגים חזותיים אותנטיים מתוך עבודת הלומדים.

סינון וניתוח ממוקד של התשובות

בשלב ניתוח התשובות ניתן להפעיל בממשק הדוח מגוון אפשרויות סינון, המאפשרות לבודד קבוצות

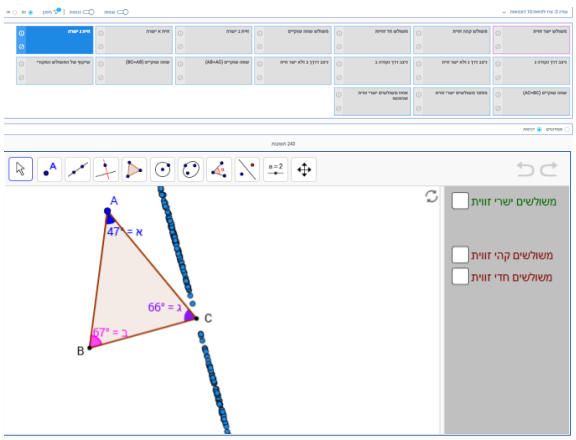
תשובות לפי מאפיינים גאומטריים. ממשק הסינון מבוסס על כפתורים המסווגים את התשובות לפי קריטריונים שנקבעו מראש במערכת - לדוגמה: משולש ישר־זווית, זווית ישרה בקודקוד A, שווה שוקיים ועוד.

באמצעות הפעלת סינון לפי זווית ישרה בקודקוד C (איור 4), מתקבלות לדוגמה 243 תשובות ייחודיות. באופן וויזואלי ניתן להבחין במבנה ברור - רצף הנקודות יוצר קו שמתמשך מקודקוד C כלפי חוץ, מה שמעיד על דפוס גאומטרי מאפיין בקבוצה.

שימוש בכפתורי הסינון ממחיש כיצד ניתן להיעזר בו ככלי פדגוגי: הן להבנת דפוסים מושגיים, הן להדגשה והמחשה בכיתה - אילו אזורים גאומטריים מרוכזים בתשובות, אילו מיקומים חוזרים על עצמם, והיכן נמצאות דוגמאות חריגות או מפתיעות.

איור 4:

סינון תשובות בדוח שטיח לפי מאפיינים שנקבעו מראש

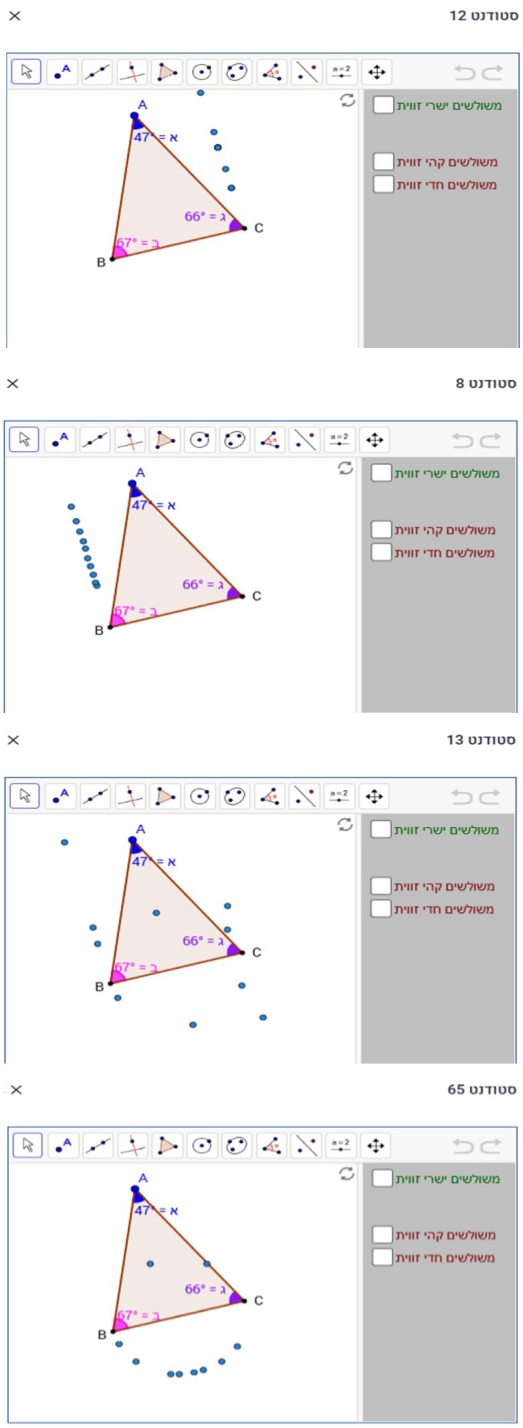


שונות בין המשתתפים - עקביות לעומת גיוון

מומלץ למורים או למנחי הדיון להבחין בדפוסי עבודה מגוונים ולהציג דוגמאות אישיות של לומדים מתוך דוח המשימה (איור 5). כל מסך במערכת מציג את אוסף הדוגמאות של לומד אחד, וממחיש את כלל מיקומי הקודקוד A שנשמרו במהלך המשימה.

איור 5:

דוח המשימה - עקביות לעומת גיוון



בהצגה כזו ניתן לגלות דפוסי עבודה מגוונים: לעיתים לומד אחד ממלא את כל הדוגמאות באזור ממוקד אחד (ומעיד בכך על אסטרטגיה עקבית או תפיסה חזותית ברורה), ולעומתו לומד אחר מציג פיזור רחב של נקודות–עם זווית ישרה בכל אחד מהקודקודים (A, B, C), ולעיתים גם דוגמאות גבוליות או חריגות.

מהשוואת המקרים (איור 5) עולות הבחנות מעניינות: חלק מהלומדים, (כמו לומדים ששמות המשתמש שלהם למשל "סטודנט 8", "סטודנט 12" ו-"סטודנט 65" - השמות ניתנו כברירת מחדל אוטומטית במערכת לשם שמירה על אנונימיות. קיימת גם אפשרות להצגת שם מלא כפי שהוזן במערכת), הציגו עקביות גבוהה - כל הדוגמאות שלהם התקבלו באזור ממוקד אחד במישור, מה שמעיד על אסטרטגיה קבועה או תפיסה חזותית ברורה לגבי מיקום הזווית הישרה. לעומתם, לומדים אחרים, כמו "סטודנט 13" (איור 5), הציג פיזור רחב של נקודות, שהכיל דוגמאות עם זווית ישרה בכל אחד מהקודקודים (A, B, C), ולעיתים אף דוגמאות גבוליות או חריגות.

הצגה פומבית של דפוסים אלו עשויה להפתיע לומדים, לחזק את ההבנה שיש יותר מדרך אחת נכונה לפתרון המשימה, ולעודד גיוון בניסיונות ובבדיקת רעיונות שונים.

מומלץ לעודד את הלומדים להביע סקרנות לגבי הדוגמאות שלהם - לשאול היכן בדיוק מופיעה כל דוגמה, מה המשמעות של מיקומה במרחב, ואם דוגמה מסוימת קרובה לגבול. הפיכת המרחב הוויזואלי לכיתה דיגיטלית משותפת מעודדת מעורבות, שייכות והבנה מעמיקה של התהליך.

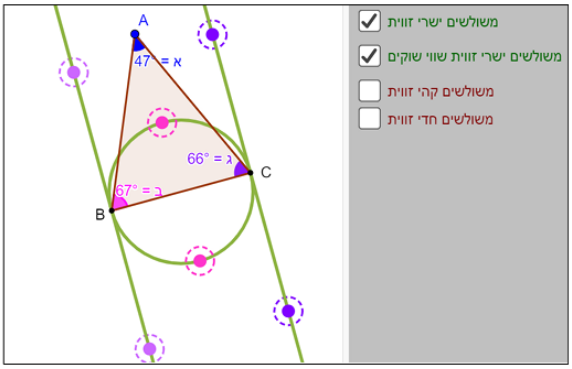
לעיתים קרובות כאשר לומדים רואים את הדוגמאות שלהם על גבי הדוח הקולקטיבי, הם מביעים עניין, מנסים לאתר את התשובה שלהם, ותוהים אם פעלו נכון. חיבור זה בין הייצוג החזותי לפעולה האישית הוא זרז לדיון מתמטי אותנטי ומשמעותי.

איור 6 מדגים כיצד הנוף התפיסתי החזותי מאפשר לנתח אזורי עניין מרכזיים:

- הקו הירוק הימני מציין את מיקומי הקודקוד A כאשר הזווית C ישרה.
- הקו הירוק השמאלי מציין זווית ישרה ב-B.
- המעגל הירוק המרכזי מתייחס לזווית ישרה ב-A.
- שש הנקודות הסגולות והוורודות המודגשות מייצגות דוגמאות של משולשים ישרי-זווית ושווי שוקיים, שעוררו עניין מיוחד.

איור 6:

אזורי העניין המרכזיים



מומלץ לשלב במהלך הדיון שאלות מנחות, כמו:

האם ייתכן משולש שהוא גם ישר-זווית וגם שווה שוקיים?

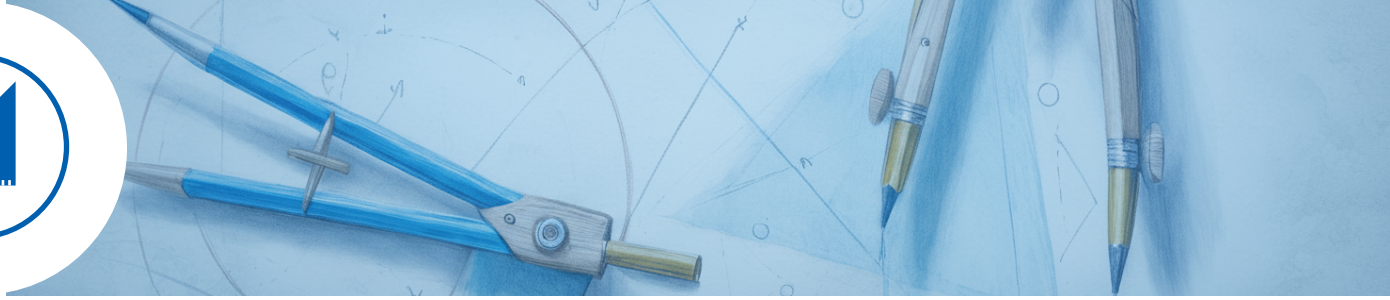
האם ניתן לבנות משולש שהוא גם ישר-זווית וגם שווה צלעות?

כיצד נראים דפוסים חריגים ומה אפשר ללמוד מהם?

שיח כזה מאפשר להעמיק בתכנים גאומטריים, לעודד הכללה ולהרחיב את הדיון מעבר לפתרון הנקודתי של המשימה. הצגת מגוון הדוגמאות בכיתה מעודדת את כל הלומדים לפתח הבנה רחבה ומעמיקה של המושגים הגאומטריים.

עקרונות עיצוב המשימות

המשימות המוצעות עוצבו בשיתוף עם מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי, והן מבוססות על נושאים מתוך תוכנית הלימודים כגון סוגי משולשים, זוויות, מרובעים ויחסים. כל משימה כוללת אזורים מיוחדים (מקומות גאומטריים) בהם מופיעים פתרונות גבוליים, חריגים או מפתיעים, שמטרתם לעורר דיון מושגי. תכנון זה נועד לאפשר למורים



ולתלמידים להתמקד לא רק בפתרון הנכון, אלא במגוון האפשרויות וההבחנות הגאומטריות שהם מגלים דרך יצירת הדוגמאות. המשימות פותחו על בסיס שלושה עקרונות:

- אינטראקטיביות ודינמיות: המשימות מאפשרות גרירת קודקוד תוך כדי ניסיון ליצירה ושמירה על תנאי גאומטרי (למשל: גרירת נקודה אחת מתוך שלוש ליצירת משולש ישר־זווית).
- מרחב פתרונות: אין פתרון אחד נכון, אלא מרחב של אינסוף פתרונות נכונים אפשריים.
- הצגה ויזואלית של מרחב התשובות: תשובותיהם של כל התלמידים נרשמות ומופיעות כנקודות באזור במישור, כך שהמורים יכולים להציג את מגוון הדוגמאות בצורה אנונימית.

בהתאם לגישת הדוגמאות של Mason & Watson (2002), הדגש מושם על מעבר מדוגמה פרטית להכללה מושגית, ובתוך כך שימוש בדוגמאות ייחודיות של לומדים כבסיס לבניית מושגים. כל גרירת קודקוד יוצרת דוגמה חדשה, ומרחב הפתרונות מייצג את טווח ההשתנות (range of permissible change) של הלומדים עבור תנאי המשימה - מרחב אשר ניתן לנתח על פי ממדי השונות (dimensions of possible variation) כפי שמוצגים אצל Watson & Mason (2005) וגם Leung & Lee (2013).

בהתבסס על מודל חמשת הרעיונות היישומיים לניהול שיח מתמטי פורה (Smith et al., 2009), ניתן לזהות כיצד המשימות הדינמיות שתוארו במאמר זה מספקות מענה לכל שלב בתהליך:

1. צפייה מראש של תגובות הלומדים - עיצוב המשימות מבוסס על חיזוי של אזורי עניין במרחב, שבהם הלומדים צפויים להתמקד או לטעות (למשל, באזורים שבהם נוצרים משולשים קהי־זווית או גבוליים).
2. מעקב אחר תגובות תוך כדי ביצוע - מערכת האיסוף האוטומטי עוקבת בזמן אמת אחרי כל גרירת קודקוד ודוגמת משולש.
3. בחירה בתשובות להצגה - המורים יכולים לבחור דוגמאות מעניינות מתוך הדוח, להקרין אותן אנונימית ולהזמין את הכיתה לדיון.
4. קביעת סדר הצגת הדוגמאות - הדוח הגרפי מאפשר למורים לארגן את הדוגמאות מהטיפוסיות לחריגות ולהוביל תהליך של הכללה.
5. קישור לרעיון המרכזי - כל דוגמה נדונה בהקשר של תכונות גאומטריות (למשל: שווה שוקיים, חדות הזוויות), והדיון מכוון לקראת הבנה עמוקה של המושג המרכזי: משולש ישר־זווית.

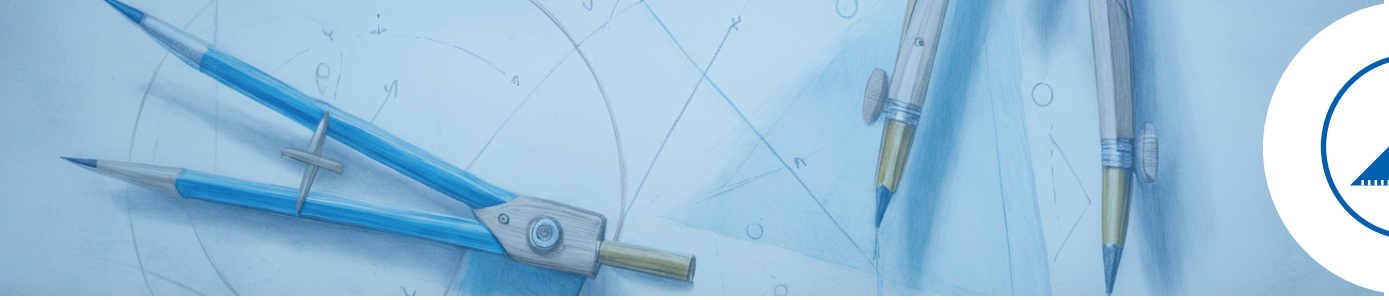
יישום מודל זה במסגרת המשימות תורם ליצירת שיח מתמטי מושגי, מבוסס ראיות ומכוון הבנה.

סיכום:
תרומת המשימה לפיתוח שיח מתמטי

המשימה מדגישה את הפוטנציאל הפדגוגי הטמון במשימות דיגיטליות אינטראקטיביות אשר עוצבו מלכתחילה לתמוך בשיח מתמטי מושגי בכיתה. המשימה בנויה כך שהיא מזמנת ריבוי דוגמאות, מאפשרת ללומדים לבחון את רעיונותיהם, מספקת ייצוגים חזותיים של עבודות הקבוצה, והיא הופכת למנוע מרכזי לדיון מתמטי משמעותי.

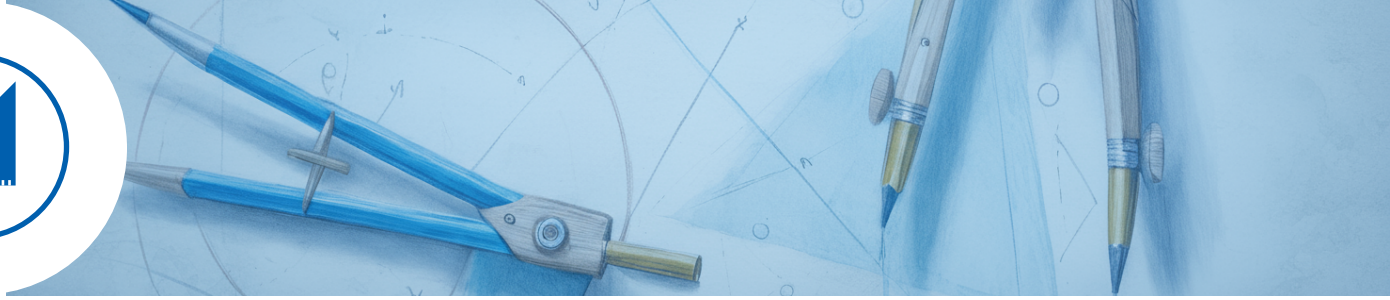
שיח קבוצתי סביב מרחב דוגמאות מעודד הכללה, הבחנה, השוואה והעמקה - בין תלמידים, מורים ומנחים. הסקרנות שנוצרת סביב הדוגמאות האישיות והקולקטיביות, והדינמיקה שמתפתחת מתוך ההתבוננות בדוחות מחזקות את ההבנה, כי המשימה אינה רק "אמצעי תרגול", אלא מהווה בסיס להוראה מושכלת ולחקירה משותפת של רעיונות מתמטיים.

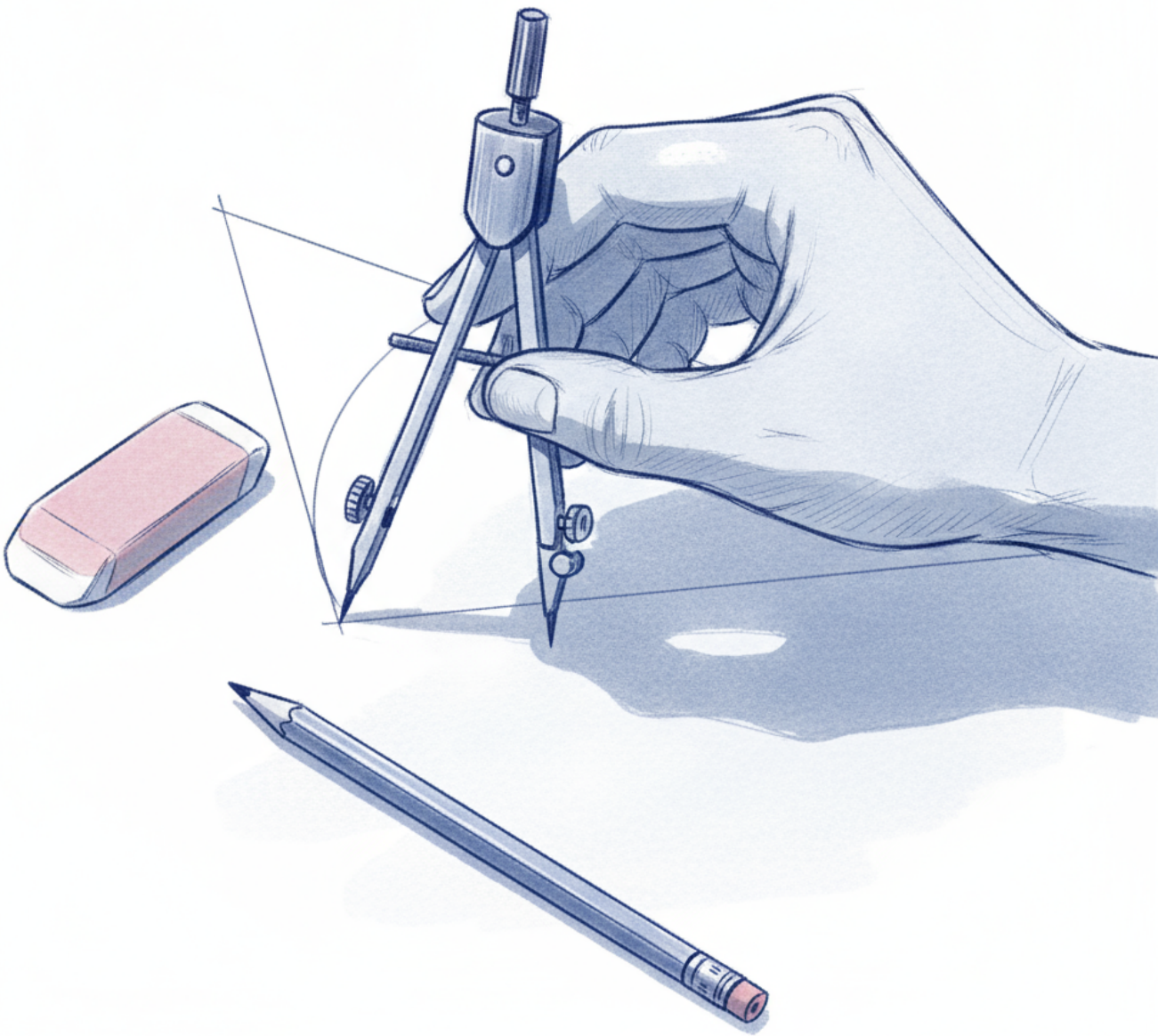
במטרה למצות את הפוטנציאל של משימות מסוג זה, מומלץ לצרף להן הנחיות מפורטות למורים: מהן מטרות המשימה, אילו שאלות לשאול ומתי, אילו דגשים חשוב להעלות במהלך הדיון ואילו דוגמאות כדאי להציג. הנחיות אלו נועדו לתמוך במורים, במיוחד בשלבי ההנחיה הראשונים. עם זאת, חשוב להדגיש כי מורים בעלי ידע תוכני פדגוגי (PCK, Pedagogical Content Knowledge; Shulman, 1987) עשיר, יכולים להרחיב ולפתח את השיח מעבר למה שמוגדר מראש, ולהתאים את ניהול הדיון למאפייני תלמידיהם וליעדי ההוראה הרחבים.



ביבליוגרפיה

- Ayoob, H., & Olsher, S. (2023). Curriculum-aligned digital formative assessment (DFA) for elementary school geometry. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1–9). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-04417260
- Ayoob, H., & Olsher, S. (2024). Exploring metrics: Elementary mathematics teachers' evaluation of digital geometry assessment activities technology. In P. Iannone, F. Moons, C. Drüke-Noe, E. Geraniou, F. Morselli, K. Klingbeil, M. Veldhuis, & S. Olsher (Eds.), *Proceedings of FAME 1 – Feedback & Assessment in Mathematics Education (ETC 14)* (pp. 47–55). Utrecht University and ERME. https://hal.science/hal-04807902v1/file/FAME1_Proceedings.pdf
- Baccaglini-Frank, A., & Leung, A. (Eds.). (2017). *Digital technologies in designing mathematics education tasks: Potential and pitfalls*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-43423-0
- Boaler, J., & Staples, M. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach. *Teachers College Record*, 110(3), 608-645.
- Leung, A., & Bolite-Frant, J. (2015). Tools and affordances in learning geometry: Insights from theory and practice. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of CERME 9* (pp. 279–285). Charles University & ERME.
- Leung, A., & Lee, A. M. S. (2013). Students' geometrical perception on a task-based dynamic geometry platform. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 361–377. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9433-7
- Mason, J., & Watson, A. (2002). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Routledge.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Olsher, S., Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2016). How might the use of technology in formative assessment support changes in mathematics teaching? *For the Learning of Mathematics, 36*(3), 11–18.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–23.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Smith, M. S., Hughes, E. K., Engle, R. A., & Stein, M. K. (2009). Orchestrating discussions. *Mathematics Teaching in the Middle School, 14*(9), 549-556.







תולדות המתמטיקה

על בסיסים, סימנים ומספרים: מסע בין חמש שיטות כתיבה של מספרים טבעיים ואפס

פרופ' עטרה שריקי

מכללת סמינר הקיבוצים

מיזם TomorrowKidz



על בסיסים, סימנים ומספרים: מסע בין חמש שיטות כתיבה של מספרים טבעיים ואפס

עטרה שריקי

תקציר

המאמר עוסק בשיטות כתיבה של מספרים בתרבויות עתיקות - מצרים, מאיה, סין ורומא, ומציג את המאפיינים והעקרונות של כל שיטה, והשוואה ביניהן לבין השיטה העשרונית הנהוגה כיום. כמו כן, נדונה החשיבות הפדגוגית של חשיפת תלמידים לשיטות השונות, ובפרט הקשר שיש לכך לפיתוח חשיבה גמישה והבנת המושג "מספר".

מבוא

הדרך שבה אנחנו כותבים כיום מספרים היא רק אחת מתוך מגוון שיטות שפיתחו תרבויות שונות לאורך ההיסטוריה. במאמר "תולדות המתמטיקה - מבוא" תוכלו לקרוא על הסימנים הראשונים המעידים על ניסיונות ספירה. בהמשכו מופיע מידע על אסימוני החרס במסופוטמיה, שהובילו בהדרגה לרעיון של ייצוג מספרים באמצעות סמלים כתובים.

במאמר זה נציג שיטות כתיבה מארבע תרבויות עתיקות: מצרים, המאיה, סין ורומא. כל אחת מהן מציעה תפיסה שונה של מספר, סימן וערך. נבחן את העקרונות של כל שיטה, ובתוך כך נערוך השוואה ביניהן לבין שיטת הכתיבה המוכרת לנו כיום.

היכרות עם שיטות כתיבה שונות תורמת להבנה של מושג המספר, מפתחת גמישות מחשבתית, ומאפשרת לתלמידים לראות את המתמטיקה לא רק ככלי טכני, אלא גם כיצירה אנושית-תרבותית מרובת פנים. כמורים, תוכלו לשלב בכיתה פעילויות מעשיות כמו תרגום מספרים משיטת כתיבה אחת לאחרת, או משימות שבהן התלמידים פותרים בעיות באמצעות הסימנים של תרבות עתיקה - התנסויות המעוררות דיון על היתרונות והחסרונות של כל שיטה.

שיטת הכתיבה העשרונית הפוזיציונלית

שיטת ספירה היא אמצעי להצגת מספרים בעזרת קבוצה כלשהי של סימנים הנקראים "ספרות". השיטה הנפוצה ביותר כיום לכתיבת מספרים היא השיטה העשרונית הפוזיציונלית (מיקומית), המבוססת על העקרונות הבאים:

- בסיס הספירה הוא 10. כלומר, הקבוצה מכילה עשרה סימנים, עשר ספרות שונות שבעזרתן ניתן לכתוב כל מספר. הסימנים הם: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- המשמעות של עיקרון ערך המקום היא שהערך של כל ספרה במספר תלוי במיקומה. כל מיקום, מימין לשמאל, מייצג חזקה עולה של 10: אחדות (10^0), עשרות (10^1), מאות (10^2), אלפים (10^3), וכן הלאה. כל מספר נכתב כסכום של הספרות כפול החזקה המתאימה של 10. לדוגמה, משמעות המספר 7,509 היא:

$$7{,}509=7\times1000+5\times100+0\times10+9\times1=7\times10^3+5\times10^2+0\times10^1+9\times10^0$$

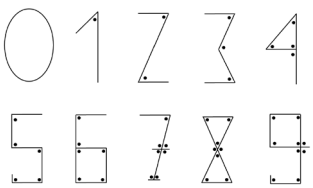
מכיוון ששיטת הכתיבה העשרונית היא פוזיציונלית, אפשר לכתוב מספרים גדולים או קטנים, כרצוננו, בהתאם למספר הספרות הרצוי.

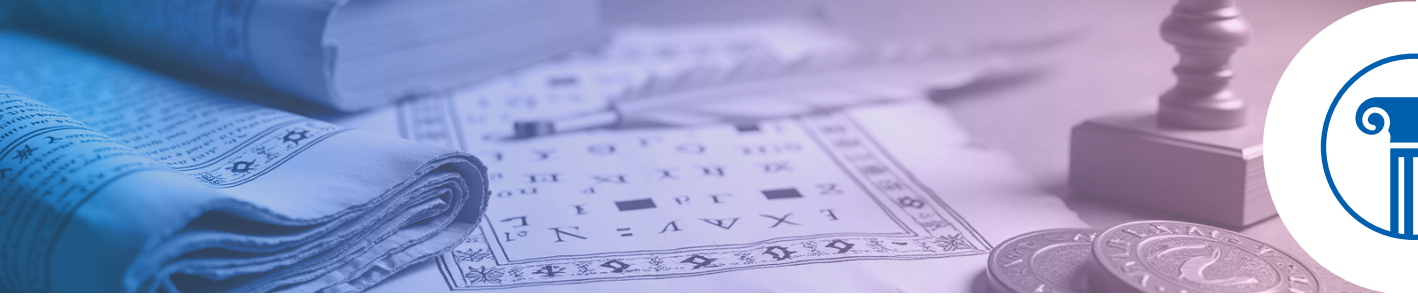
הרחבה על שיטת הכתיבה העשרונית הפוזיציונלית אפשר למצוא בגיליון אוגוסט, 2011.

מי המציא את סימני הספרות?

במשך שנים רבות חשבו, בטעות, שהספרות המוכרות לנו הן "ספרות ערביות". בצפון אפריקה נהגו לספר שהן הומצאו על ידי יצרני זכוכית מקומיים, אשר קבעו את צורתן, כך שמספר הזוויות של כל ספרה תואם את הערך המספרי שלה (ראו איור 1):

איור 1.





אבל בדיקה מדוקדקת מגלה שהשיטה הזאת איננה עקבית. לדוגמה, בספרה 9 האריכו את הקטע ה"אמצעי" כדי להוסיף שתי זוויות, בעוד שבמקרה של הספרה 4 נמנעו מכך, מה שמערער את הטיעון בנוגע לקשר שבין צורתה של הספרה לבין מספר הזוויות שיש בסמל שלה. וחשוב מכך: בכתבים הערביים אין כל עדות לעיצוב הזה של סמלי הספרות (שריקי, 2024).

היום החוקרים מסכימים שהמתמטיקאים ההודים הם שהמציאו את סימני הספרות, אף כי לא ברור מדוע בחרו דווקא בצורות אלה. הסיבה לסברה השגויה בנוגע למוצאם של סמלי הספרות היא העובדה שהם הגיעו לארצות מערב אירופה בסוף המאה העשירית לספירה דרך ארצות ערב. כיום הספרות הללו נקראות בשם "ספרות הודו־ערביות" (Ifrah, 2000).

כתיבת מספרים במצרים העתיקה

הציוויליזציה המצרית התקיימה כבר לפני יותר מששת אלפים שנה. מאחר שמרבית השטח של מצרים מדברי, רוב האוכלוסייה התרכזה אז (וגם כיום) באזורים הירוקים שסביב הנילוס, שבהם אפשר לעבד את האדמה.

החקלאים למדו לבנות מערכת השקיה מפותחת, ובעזרת מימיו המתוקים של הנילוס הצליחו לגדל יבול רב. המדבריות המקיפים את מצרים היו מחסום טבעי מפני אויבים ופולשים חיצוניים, והשקט ששרר באזור אִפשר לחברה המקומית להתפתח במהירות. בזכות כל אלה תרבות מצרים העתיקה האריכה ימים יותר מכל תרבות עתיקה אחרת. כדי לתעד ולנהל את חיי המסחר ואת האדמיניסטרציה הממשלתית שקשורה לגביית מיסים, ניהול המפעל הגדול של בניית הפירמידות ועוד, צריך לדעת לכתוב מספרים ולערוך חישובים מתמטיים (Burton, 2011).

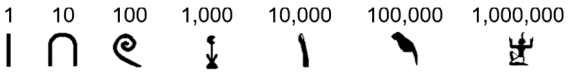
איך כתבו מספרים במצרים העתיקה?

הכתב המצרי התחיל להתפתח כ־3,250 שנים לפני הספירה. כיום הוא נקרא "כתב הירוגליפי" (ביוונית: הירוגליפיקה = גילוף מקודש) או "כתב החרטומים", על שמם של המכשפים המצרים שנקראו חרטומים.

מערכת הכתב ההירוגליפי מורכבת מתמונות ומסימנים שמספרם הלך וגדל עם השנים, עד שהגיע לכ־700 סימנים. בגלל האופי הציורי של כתב החרטומים, שמו נקשר בהילה של מסתורין וכשפים, עד אשר הצליחו לפענח אותו לפני כ־200 שנים.

האופן שבו כתבו המצרים את המספרים מעיד על כך שמדובר במערכת עשרונית לא־פוזיציונלית. כלומר, היא מבוססת על מספרים שהם חזקות של 10, אבל לא על ערך המקום של הספרות. כפי שאפשר לראות באיור 2, המצרים קבעו סימנים למספרים 1, 10, 100, 1,000, 10,000, 100,000 ו־1,000,000. את כל המספרים האחרים היה אפשר לבטא באמצעות צירוף של הסימנים הללו, ובכל סימן אפשר להשתמש תשע פעמים לכל היותר (כל עשרה סימנים זהים היו מוחלפים בסימן המייצג את החזקה הבאה של 10).

איור 2.



את המספרים כתבו המצרים בדרך כלל מימין לשמאל או מלמעלה למטה, מהמספרים בעלי הערך הגדול ביותר למספרים בעלי הערך הקטן יותר. אבל לא תמיד נשמרה שיטת הכתיבה הזאת. יתרה מכך, מכיוון שמערכת המספרים המצרית הייתה לא־פוזיציונלית, ולכל סימן היה ערך מספרי ספציפי קבוע, כל מספר אפשר היה לכתוב בדרכים שונות (Feldherr & Hardy, 2011). לדוגמה, את המספר 375 אפשר לכתוב לפי הכלל של "מימין לשמאל, מהגדול לקטן", כמו בחלק הימני של איור 3, ואפשר לכתוב שלא לפי הכלל, כמו בחלק השמאלי (אף כי מצב כזה היה נדיר מאוד).

איור 3.



הבדל נוסף בין כתיבת המספרים המצריים לבין הכתיבה העשרונית הפוזיציונלית קשור למספר הסימנים הדרושים לכתיבה של מספר. בעוד שבשיטת הכתיבה המוכרת לנו ברור שמספר בעל ארבע ספרות גדול ממספר בעל שלוש ספרות, לא כך הדבר בשיטה המצרית. שימו לב



שכדי לכתוב את המספר 375 נדרשו למצרים 15 סימנים: שלושה סימנים של 100, שבעה סימנים של 10 וחמישה סימנים של 1, וכדי לכתוב את המספר 1,000, למשל, היה צורך בסימן אחד בלבד (שריקי, 2024).

משימות:

- מצאו הצגה נוספת של המספר 375. בכמה סימנים הירוגליפיים השתמשתם?
- האם קיים קשר כלשהו בין ערכו של מספר לבין מספר הסימנים הדרושים כדי לרשום אותו בשיטה המצרית? אם כן - מהו הקשר?
- כמה סימנים הירוגליפיים נחוצים כדי לכתוב את המספר 9,307 ואת המספר 1,000,006? כתבו אותם ובדקו.
- מצאו שני מספרים עוקבים, כך שלצורך כתיבת המספר הקטן מביניהם משתמשים ב־27 סימנים הירוגליפיים, ואילו לצורך כתיבת המספר הגדול משתמשים רק בסימן הירוגליפי אחד.
- מהו המספר ההירוגליפי הגדול ביותר שאפשר לכתוב?

רוצים לכתוב מספרים הירוגליפיים נוספים? לחצו כאן.

מידע נוסף על המתמטיקה המצרית אפשר למצוא בגיליון יוני 2012, בגיליון ינואר 2013, ובגיליון יוני 2013.

כתיבת מספרים בתרבות המאיה

ה"מאיה" הוא כינוי לקבוצה אתנית גדולה שהחלה להתפתח במרכז אמריקה כ־1800 שנים לפני הספירה. בין המאה ה־3 למאה ה־9 לספירה חלה האצה בהתפתחות תרבות המאיה, ובתקופת השיא שלה היא מנתה כ־14,000,000 תושבים. אנשי המאיה בנו ערים גדולות עם מבני ציבור, ופיתחו את תעשיית הקרמיקה והצורפות, ואת אומנות הציור.

בדומה למצרים הקדמונים, גם אנשי המאיה בנו פירמידות, או ליתר דיוק - מבנים דמויי פירמידה. בעוד הפירמידות המצריות היו בעלות פאות חלקות ושימשו לקבורה, המבנים של המאיה נבנו כקומות עם מדרגות תלולות המובילות למקדש שבראש המבנה.

בתחילת המאה ה־16, כחלק מהכיבוש של יבשת אמריקה, הגיעו הספרדים גם לערי המאיה. אולם בניגוד לכיבוש המהיר יחסית של ערים אחרות, בערי המאיה הם נתקלו בהתנגדות עזה, והכיבוש הושלם רק לאחר כ־170 שנה. הספרדים נהגו לנהל מאבק בדתות המקומיות בעריה של דרום אמריקה ומרכזה, ולהשמיד את מרבית כתבי הקודש. מסיבה זאת כתב התמונות של תרבות המאיה עדיין לא פוענח במלואו. אולם מהכתבים ומהעדויות הארכאולוגיות שנמצאו אפשר ללמוד על הידע הרב שהיה להם באסטרונומיה ובמתמטיקה. כיום חיים במרכז אמריקה כתשעה מיליון בני מאיה. הם עדיין מדברים את שפות המאיה, ושומרים על המסורות העתיקות (Asselbergs & Restall, 2007).

איך כתבו מספרים בתרבות המאיה?

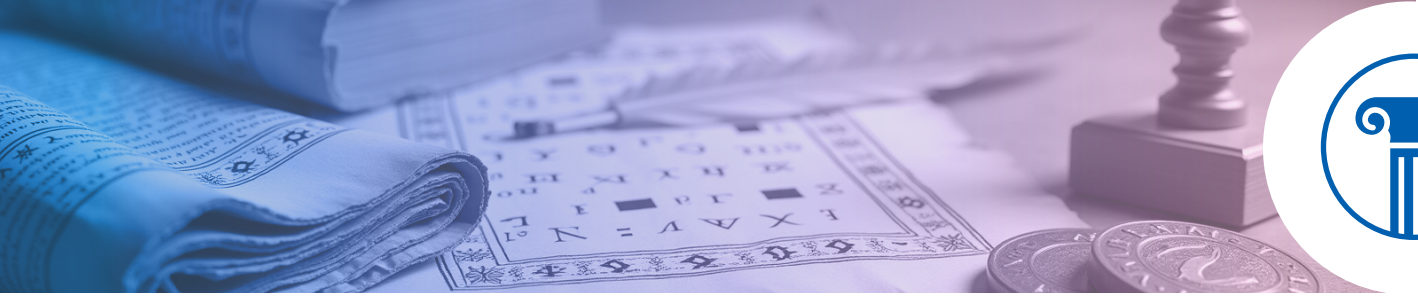
בדומה לכתב ההירוגליפי המצרי, גם הכתב של המאיה מורכב ממאות סימנים וציורים, וכולל סימנים למושגים וסימנים לייצוג עיצורים (אופן הגיית המילה). הממצאים הארכאולוגיים הקדומים ביותר של שימוש במערכת המספרים של המאיה מתוארכים למאה הרביעית-חמישית לפני הספירה, אך השימוש הרחב והמתקדם ביותר במערכת זו מתועד בעיקר בתקופה הקלאסית של המאיה (250-900 לספירה).

החישובים המתמטיים של בני המאיה נעשו בעזרת מספרים ייחודיים שנכתבו בבסיס 20 בשיטה פוזיציונלית. כלומר, המעבר ממקום למקום במספר משתנה כאשר מגיעים לחזקה הבאה של 20 (בשיטה שלנו המעבר הוא כשמגיעים לחזקה הבאה של 10). במקרה של מספרי המאיה, המספרים נכתבו אנכית, וכל שינוי בחזקה של 20 פירושו "עליית קומה" (Burton, 2011).

אגב, יש הסבורים שבסיס 10 נקבע מאחר שיש לנו עשר אצבעות בידיים, ואילו בסיס 20 נקבע מאחר שיש לנו עשרים אצבעות בידיים וברגליים יחד.

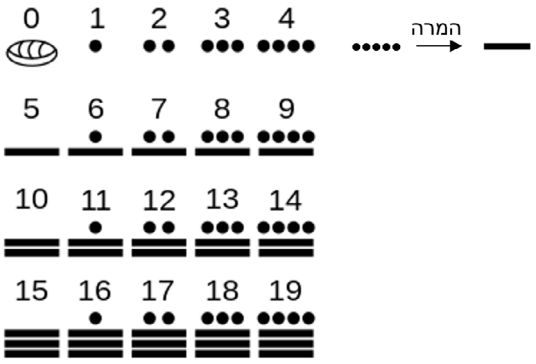
להבדיל ממערכת המספרים שלנו, שיש בה עשרה סימנים, במערכת המספרים של המאיה היו שלושה סימנים בלבד: נקודה מייצגת את הספרה 1, קטע אופקי קטן מייצג את הספרה 5, וקונכייה מסמלת את הספרה 0. מדובר באחת הדוגמאות המוקדמות בהיסטוריה של שימוש באפס, נוסף על ההודים.

בעזרת הסמלים עבור 1 ו־5 אפשר לכתוב באופן פשוט כל מספר (טבעי) בין 1 ל־19.



אלה הם סימלי המספרים 0-19 בספרות המאיה:

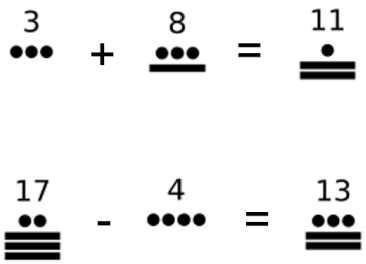
איור 4.



השיטה של המאיה לכתיבת מספרים אפשרה לבצע בקלות את פעולות החיבור והחיסור - פשוט לקבץ את הקטעים הקטנים ולקבץ את הנקודות, ולהמיר אותן במידת הצורך. מתי התבצעה המרה? בבסיס העשרוני אנחנו מבצעים המרה כאשר יש לנו 10 סימנים זהים למשל, כאשר מחברים את המספר 1 עשר פעמים, ממירים את התוצאה למספר 10. בשיטת המאיה המירו חמש נקודות לקטע קטן. לעומת זאת, בחיסור נדרשה לעיתים "פריטה" של קטע לחמש נקודות.

לדוגמה, באיור 5, כשרושמים את תוצאת החיבור של 3+8 מתקבלות שש נקודות. חמש מהן מחליפים לקטע, ונשארת נקודה אחת; כשרושמים את תוצאת החיסור של 17-4, ממירים קטע אחד של 17 לחמש נקודות, ומקבלים שני קטעים ושבע נקודות. משבע הנקודות מסירים ארבע נקודות, ומתקבלים שני קטעים ושלוש נקודות.

איור 5.



משימה:

כתבו את התרגילים הבאים באמצעות הספרות של המאיה, פתרו אותם בעזרת השיטה של המאיה, המירו את הסימנים למספרים עשרוניים, ובדקו את הפתרון:

- 2+7
- 6+11
- 4+12
- 13-5
- 11-6
- 12-3

כאן תוכלו לבדוק את התשובה שלכם.

איך נרשום את התוצאה של התרגיל 13+16?

מכיוון ש־19 הוא המספר (הטבעי) הגדול ביותר שעדיין קטן מ־20, כדי לרשום את התוצאה צריך "לעלות קומה" לחזקה הבאה של 20. לדוגמה, כדי לרשום את המספר 29, בקומה התחתונה יופיע המספר שיש לכפול ב־ 20^0 (תזכורת: כל מספר בחזקת 0 שווה 1, מלבד 0 בחזקת 0 שאיננו מוגדר), ובקומה שמעליו יופיע המספר שאותו יש לכפול ב־20^1.

לכן את הסכום של $13+16=29=20+9=1\times20^1+9\times20^0$ כתבו אנשי המאיה כך:

- כמה פעמים 20 (20^1) מופיע במספר? ●
- כמה פעמים 1 (20^0) מופיע במספר? ●●●●

איך נכתוב את המספר 73?

נפרק אותו לסכום חזקות של 20:

$73=3\times20 + 13\times1=3\times20^1 + 13\times20^0$

- כמה פעמים 20 (20^1) מופיע במספר? ●●●
- כמה פעמים 1 (20^0) מופיע במספר? ●●●

משימות:

- כתבו בשיטת המאיה את המספרים הבאים: 46, 53, 90, 117.
- מהו המספר הרשום כאן: ●●
- מהו המספר הגבוה ביותר שאפשר לכתוב באמצעות שתי "קומות"?
- מצאו מספר שכדי לכתוב אותו יש צורך בשלוש "קומות".

כאן תוכלו לבדוק את התשובות שלכם.



שימו לב לכך שהשיטה של המאיה לכתיבת מספרים היא שיטה פוזיציונלית, ולכן אין למעשה הגבלה על גודל המספרים.

כתיבת מספרים באימפריה הרומית

אחד המבנים הפוליטיים הנפוצים בעת העתיקה היה המבנה של "עיר-מדינה". כלומר, מדינה שהיא בעצם עיר אחת בלבד. חלק מערי-המדינה הפכו לאימפריות, וחלק מערי-מדינה קטנות כרתו ברית לצרכים פוליטיים, מדיניים וכלכליים. רומא העתיקה היא אחת מהדוגמאות לערי-מדינה שהפכו בהדרגה לאימפריה.

על פי המסורת הרומית, רומא החלה את דרכה בשנת 753 לפני הספירה כיישוב קטן שהוקם על־ידי רומולוס, לאחר שנלחם באחיו התאום רומוס והרג אותו. תהליך הפיכתה של רומא לאימפריה החל במאה החמישית לפני הספירה והסתיים במאה החמישית לספירה. בימיה הגדולים התפרשה רומא על מרביתה של מערב אירופה, על ארצות אגן הים התיכון, וגם על חלקים מהארצות שמסביב לים השחור.

השפה הלטינית הייתה השפה המדוברת באזור שבו נמצאת העיר רומא עצמה, אזור לטיום (כיום, מחוז לאציו באיטליה), ומכאן שמה של השפה. בהדרגה הפכה לטינית לשפה הרשמית של האימפריה הרומית, והיא הופצה בכל אזור שנכבש על־ידי האימפריה. כיום, הלטינית היא עדיין השפה הרשמית של הכנסייה הקתולית הרשמית ובוותיקן (Woolf, 2021).

איך כתבו מספרים באימפריה הרומית?

בטרם הפכה רומא לאימפריה, נהגו הרומאים לסמן מספרים, בעיקר לצורכי מסחר, באמצעות חריצים פשוטים על עץ או אבן. כל חריץ סימן יחידה אחת, ולעיתים השתמשו בארבעה חריצים עם קטע שחצה אותם כדי לסמן את המספר חמש.

ככל שהשפה והכתב הלטיני הלכו והתפשטו, כך החל להתגבש השימוש באותיות הלטיניות לצורך כתיבת מספרים. הספרות הרומיות הן למעשה שילוב של שבעה סימנים, שבע אותיות מהשפה הלטינית: I, V, X, L, C, D, M. בכתבים מתקופת ימי הביניים אפשר לראות שהרומאים השתמשו באות N, כדי לציין "שום דבר" (או בלטינית - nulla), אבל בשיטה הרומית עצמה לא היה סימן רשמי למספר "אפס".

הערכים הבסיסיים של סימני האותיות:

איור 6.

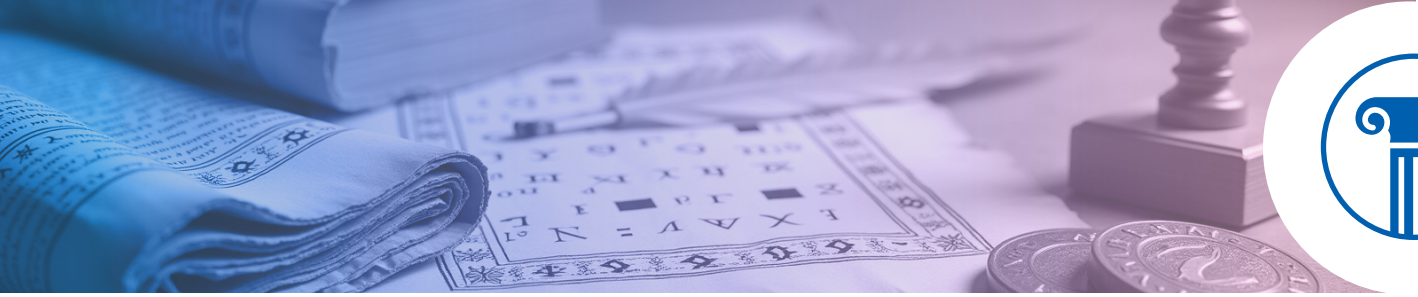
אות לטינית	I	V	X	L	C	D	M
ערך מספרי	1	5	10	50	100	500	1,000

בתקופות מאוחרות יותר, כשנוצר צורך לייצג מספרים גדולים במיוחד, הוסיפו קטע קטן מעל כל אות לציון העובדה שהערך מוכפל ב־1,000. כך, למשל, הערך של $\bar{V}$ הוא 5,000, והערך של $\bar{M}$ הוא 1,000,000.

השיטה הרומית לרישום מספרים אינה מבוססת על ערך המקום, ומתקיימים בה הכללים הבאים (Boyer & Merzbach, 2011):

1. בכתיבה של מספר, הספרות נרשמות משמאל לימין.
2. אם ספרה כלשהי רשומה משמאלה של ספרה הגדולה ממנה, המשמעות היא שצריך לחסר את ערך הספרה הקטנה מהערך של הספרה הגדולה. לדוגמה, את המספר 4 רושמים כך: IV (5-1). את המספר 90 רושמים כך: XC (100-10).
3. אם ספרה כלשהי רשומה מימינה של ספרה הגדולה ממנה, המשמעות היא שצריך לחבר את ערך הספרה הקטנה לערך של הספרה הגדולה. לדוגמה, את המספר 6, רושמים כך: VI (5+1). את המספר 70, רושמים כך: LXX (50+10+10).

   הערה: קיימת העדפה לרישום הספרות מהגדולה לקטנה (משמאל לימין). כך, לדוגמה, המספר 150 יירשם כ - 100+50 (CL) ולא כ - 200-50 (LCC).
4. אסור לחזור על אותה האות ברצף יותר מאשר 3 פעמים. לכן, את המספר 400, למשל, לא כותבים כ - CCCC אלא כ - CD (500-100). אגב, המספר 4 הוא חריג, שכן בעת העתיקה הירבו להשתמש בסימון IIII, במקום להשתמש בסימון IV. ניתן לראות זאת עד היום במגוון שעונים.



כעת, נראה דוגמאות למספרים נוספים הכתובים בשיטה הרומית. עבור כל אחד מהם בדקו לפי איזה מהכללים, הוא כתוב:

איור 7.

הסימון בספרות רומיות	XIV	XXX	XCIX	CCL	DC	MMXXV	$M\overline{V}$
ערך מספרי	14	30	99	250	600	2025	4,000

משימות:

- על הלוח בגשר קליוולנד בעיר באת' שבאנגליה מופיעה שנת הבנייה של הגשר. מהי השנה?



- כתבו באמצעות שיטת הכתיבה הרומית את המספרים הבאים:

19

378

945

3521

4870

7593

- מהו המספר הגדול ביותר שאפשר לכתוב בעזרת הספרות: I, V, X, L, C, D, M? (ללא שימוש בקטע קטן מעל האותיות)

כאן תוכלו לבדוק את התשובות שלכם.

מהו המספר הגדול ביותר שאפשר לכתוב באמצעות הספרות הרומיות ואלה עם הקטע הקטן מעליהן? המספר הגדול ביותר שיש לו סימון במערכת הספרות הרומיות הוא 1,000,000, המיוצג על־ידי $\overline{M}$. מכיוון שאסור לחזור על רצף של סימנים זהים יותר מאשר שלוש פעמים, נוכל לכתוב 3,000,000, $\overline{M}\overline{M}\overline{M}$, אבל לא 4,000,000. האם אפשר לכתוב 3,999,999? או במילים אחרות, האם אפשר לכתוב את המספר 999,999? התשובה היא חיובית, אף כי המספר מורכב מאוד: $\overline{CMXCIX}\overline{CMXCIX}$. נראה מדוע:

$\overline{CM}=(1{,}000-100)\cdot 1{,}000=900{,}000$; $CM=1{,}000-100=900$;

$\overline{XC}=(100-10)\cdot 1{,}000=90{,}000$; $XC=100-10=90$;

$\overline{IX}=(10-1)\cdot 1{,}000=9{,}000$; $IX=10-1=9$

לכן, המספר הגבוה ביותר שאפשר לכתוב באמצעות ספרות רומיות הוא 3,999,999: $\overline{MMM}\overline{CMXCIX}CMXCIX$

כתיבת מספרים בסין העתיקה

המתמטיקה הסינית היא אחת מתרבויות המתמטיקה הקדומות בעולם. במהלך ההיסטוריה מנעו השליטים הסינים מהאוכלוסייה המקומית מגע עם אוכלוסיות זרות. לכן, המתמטיקה הסינית המוקדמת התפתחה באופן עצמאי, והיא בעלת מאפיינים ייחודיים משלה, כולל ייחוס משמעויות פילוסופיות, תרבותיות ומיסטיות למספרים. המתמטיקה הסינית הייתה בעיקרה מעשית, ובין השאר נועדה לצורך קביעת לוח השנה וחישוב מיסים. ראוי לציין שהסינים היו הראשונים שעסקו במספרים שליליים ובריבועי קסם.

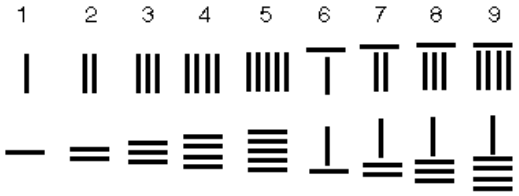
איך כתבו מספרים בסין העתיקה?

במשך כ־2,000 שנה, בין המאה הרביעית לפני הספירה ועד למאה ה־16 לספירה, הסינים השתמשו במקלות קטנים, "מוטות מנייה", כדי לייצג מספרים. מוטות אלה הם קווים אנכיים או אופקיים באורך של 3-16 ס"מ.

כך רשמו הסינים את הספרות 1 עד 9 באמצעות מוטות המנייה. שימו לב לכך שבמעבר מהמספר 5 למספר 6, הוחלפו חמישה מוטות מנייה אנכיים במוט מנייה אחד אופקי. כפי שאפשר לראות באיור 8, כל ספרה אפשר היה לכתוב בשני אופנים, וההבדל בין האופנים הוא כיוון המוטות (אופקי או אנכי). בהמשך נראה את הסיבה לכך.



איור 8.



מהאופן שבו רשמו הסינים את המספרים אפשר ללמוד על כך שהם סָפרו בבסיס עשרוני, תוך כדי שמירה על ערך המקום, אולם ללא שימוש בספרה אפס. בכתיבת מספר, הספרות נרשמו בעמודות, ובמקום אפס, הסינים השאירו עמודה ריקה. ספרת היחידות היא הספרה הימנית במספר, כפי שמקובל בשיטת הרישום שלנו.

כדי למנוע בלבול בין עמודות סמוכות הפכו הסינים את כיוון המקלות, לסירוגין: בעמודות היחידות, המאות, עשרות-האלפים וכדומה, המקלות מוצבים אנכית (כמו בשורה הראשונה של איור 8), ואילו בעמודות העשרות, האלפים, מאות-האלפים וכדומה, המקלות אופקיים (כמו בשורה השנייה של איור 8) (Martzloff, 1997). בהתאם לכללים הללו, איך, לדעתכם, רשמו הסינים את המספר 10?

במספר 10, הספרה 1 מופיעה בעמודת העשרות, והספרה 0 בעמודת היחידות. לכן, את המספר 10 כתבו הסינים באמצעות מוט אחד אופקי, כמו הספרה 1 המופיעה בשורה השנייה של איור 8. את עמודת היחידות הם השאירו ריקה. האם תוכלו לרשום את המספר 50 בעזרת המוטות הסיניים?

להלן כמה דוגמאות לרישום מספרים באמצעות מוטות המנייה:

המספר 17 הוא מספר דו־ספרתי שבו ספרת היחידות היא 7 וספרת העשרות היא 1. המספר מיוצג בשתי עמודות: בעמודה הימנית, עמודת היחידות, מופיע המספר 7 כמו בשורה הראשונה של איור 8, ובעמודה השמאלית, עמודת העשרות, מופיע המספר 1 (עשרת אחת) כמו בשורה השנייה של איור 8:

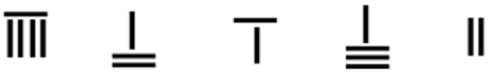


המספר 142 הוא מספר תלת־ספרתי, שבו ספרת היחידות היא 2, ספרת העשרות היא 4, וספרת המאות היא 1. המספר מיוצג בשלוש עמודות בהתאם לכיוון המקלות, לסירוגין:



הערה: אם המספר היה 140, העמודה הימנית הייתה ריקה, ואפשר היה לדעת שמדובר ב־ 140 ( ) ולא ב־14 לפי כיוון מקלות המנייה עבור המספר 4 והמספר 1 ( ).

המספר 97,682 הוא מספר בעל חמש ספרות, ובהתאם לשיטת הכתיבה הסינית ושינוי כיוון המקלות לסירוגין, הוא נראה כך:



- כתבו את הגיל שלכם (כמספר שלם) באמצעות מוטות המנייה הסיניים.
- כתבו את המספרים הבאים בעזרת מוטות המנייה:

73

269

1,054

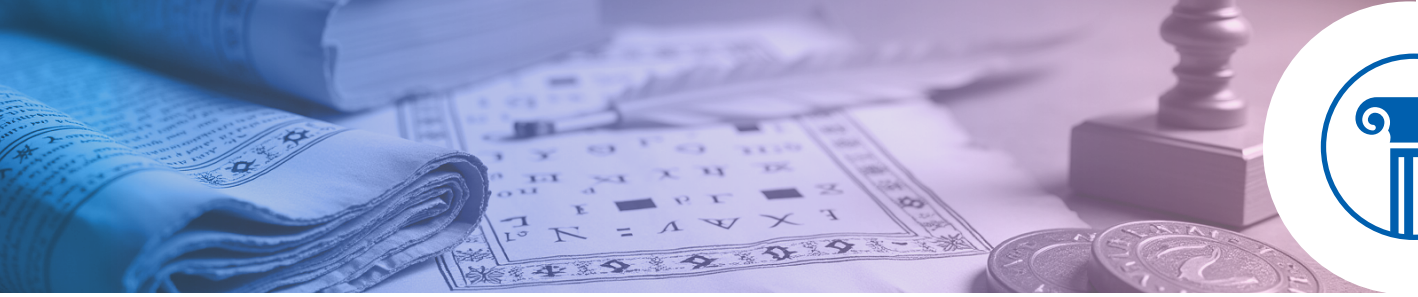
35,976

כאן תוכלו לבדוק את עצמכם.

שימו לב לכך שמכיוון שהשיטה הסינית לכתיבת מספרים היא פוזיציונלית, הרי שגם במקרה הזה אין הגבלה על גודל המספר שאותו כותבים.

הסינים השתמשו במוטות מנייה אדומים כדי לסמן מספרים חיוביים, ובמוטות שחורים כדי לסמן מספרים שליליים. המוטות השחורים סימלו חוב או חוסר. השימוש במספרים שליליים החל בסין במאה השנייה לפני הספירה, וכאמור, הסינים היו הראשונים שעסקו במספרים כאלה. רק כ־800 שנה לאחר מכן החלו מתמטיקאים הודים לנסח כללים לשימוש במספרים שליליים בפעולות חשבון. עברו כאלף שנים נוספות, ולפני כ־400 שנים גם המתמטיקאים המערביים הסכימו להכיר במספרים השליליים כמספרים "חוקיים".

כיום מקובלות בסין שלוש דרכים מרכזיות לכתיבת מספרים: אחת מהן היא המספרים ההינדו־ערביים המוכרים לנו, אחת מהן מושתתת על סימני הכתב הסיני, ואחת מבוססת על שפת הדיבור הסינית (Kane, 2006).

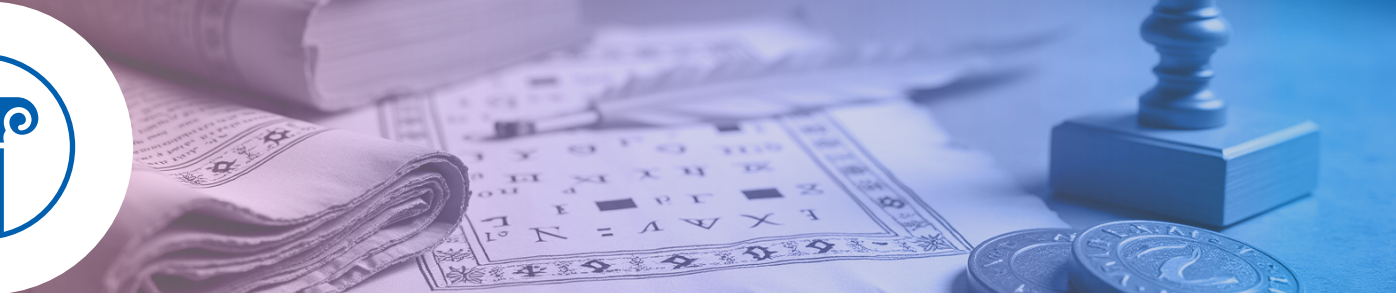


סיכום

במאמר סקרנו שיטות שונות לכתיבת מספרים שהתפתחו בתרבויות עתיקות. היכרות עם השיטות העתיקות לכתיבת מספרים והשוואה ביניהן מאפשרת הצצה מרתקת לעולמן של תרבויות קדומות. מעבר לכך, הוראת הנושא בכיתה מעוררת עניין, ותורמת להעמקת התובנות של תלמידים על אודות המושג "מספר". היכרות עם השיטות השונות מאפשרת גם לחשוף את התלמידים לעובדה שהמתמטיקה היא יצירה אנושית תלוית תרבות, ובכך לעודד שיח אודות הקשרים בין מתמטיקה, שפה ותרבות.

בטבלה שלהלן מופיע סיכום השיטות השונות, בהתאם לכמה קריטריונים, ובהמשך מופיעות הצעות לפעילויות בכיתה.

מאפיין	שיטת הכתיבה השכיחה כיום	מצרים העתיקה	תרבות המאיה	רומא העתיקה	סין העתיקה
בסיס השיטה	10	10	20	לא מוגדר	10
פוזיציונלית	כן	לא	כן	לא	כן
מספר הסימנים הבסיסיים	10 (0-9)	7 (1, 10, 100, 1,000, 10,000, 100,000, 1,000,000)	3 (0, 1, 5)	7 (I, V, X, L, C, D, M) (1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000)	2 (— , |) (יתד אנכית ויתד אופקית)
קיום סימן לאפס	כן	לא	כן (קונכייה)	לא	לא (השארת מקום ריק)
כיוון הכתיבה	אופקי משמאל לימין, מהגדול לקטן	אופקי מימין לשמאל, מהגדול לקטן (בדרך כלל)	אנכי מלמעלה למטה	אופקי משמאל לימין, מהגדול לקטן	אופקי משמאל לימין, מהגדול לקטן
עיקרון מנחה	ערך מקום וחזקות של 10	חזקות של 10 וסימנים מרובים	חזקות של 20 וערך מקום	דמוי חיבור-חיסור	ערך מקום, חילופי כיוון לסירוגין
הגבלת גודל המספרים	ללא הגבלה	9,999,999	ללא הגבלה	3,999,999	ללא הגבלה
מספרים שליליים	כן	לא	לא	לא	כן (מוטות שחורים)
מיקומה בהיסטוריה	פותחה בהודו החל מהמאה השלישית לפני הספירה. הועברה לאירופה דרך העולם הערבי	החלה להתפתח ב- 3,250 לפני הספירה	פותחה בין המאה ה-3 למאה ה-9 לספירה	פותחה החל מהמאה ה-5 לפני הספירה	פותחה החל מהמאה ה-4 לפני הספירה

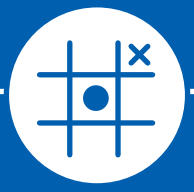


על בסיס המידע על אודות שיטות הכתיבה והסיכום התמציתי שבטבלה, אפשר לתת לתלמידים מגוון שאלות ומשימות. להלן כמה הצעות:

1. בחרו מספרים שונים, וכתבו כל אחד מהם בכל אחת מהשיטות. באיזו מהשיטות היה לכם קל יותר לכתוב את המספרים? מאתגר יותר? מדוע?
2. מהם, לדעתכם, היתרונות והחסרונות של כל אחת מהשיטות?
3. אילו קשיים היו יכולים להתעורר אצל סוחר במצרים העתיקה, לעומת סוחר ברומא, כאשר היה עליהם לערוך חישובים בסכומים גדולים של כסף?
4. האם קיים קשר בין העובדה ששיטה מסוימת היא פוזיציונלית לבין העובדה שאפשר לכתוב בה מספרים ללא הגבלת גודל? מדוע?
5. איך, לדעתכם, אפשר לכתוב שברים בכל אחת מהשיטות העתיקות?
6. א. המציאו שיטה משלכם לכתיבה של מספרים - בחרו בסיס, סמלים, וחוקים, והוסיפו אותה לטבלה.
   ב. מהם היתרונות של השיטה שלכם לעומת שיטות אחרות?
   ג. הציגו את השיטה שלכם בפני חבריכם לכיתה, כתבו כמה מספרים, ובקשו מהם לזהות אותם.

רשימת מקורות

- שריקי, ע. (2024). *פרקים נבחרים בתולדות המתמטיקה בעת העתיקה - מצרים, בבל והודו*. מכון מופ"ת.
- Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2011). *A History of Mathematics* (3rd ed.). NY: John Wiley & Sons.
- Burton, D. M. (2011). *The History of Mathematics: An Introduction*. NY: McGraw-Hill.
- Feldherr, A. & Hardy, G. (Eds.). (2011). *The Oxford History of Historical Writing. Volume 1*: *Beginnings to AD 600* (Oxford History of Historical Writing). Oxford: Oxford University Press.
- Ifrah, G. (2000). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*. NY: John Wiley & Sons.
- Kane, D. (2006). *The Chinese language: Its history and current usage*. Singapore: Tuttle Publishing.
- Martzloff, J. C. (1997). *A history of Chinese Mathematics*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Restall, M. & Asselbergs, F. (2007). *Invading Guatemala: Spanish, Nahua, and Maya accounts of the Conquest Wars*. University Park, PA: Penn State University Press.
- Woolf, G. (2021). *Rome: An Empire's Story* (2nd ed.). NY: Oxford University Press



משחקים מתמטיים

המשחק איקס עיגול

ד"ר סבינה סגרה
המכללה האקדמית אחוה
המכללה האקדמית חמדת

המשחק איקס-עיגול

סבינה סגרה

מבוא

מי לא מכיר את המשחק איקס-עיגול? המשחק זוכה לפופולריות רבה, כיוון שגם הכללים וגם הציוד הנדרשים פשוטים. ניתן לשחק בו בעיפרון ודף נייר, באצבעות על החול, ולעיתים אף מצויים מתקנים בגני השעשועים שמזמינים לשחק (ראו איור 1).

לפי כללי המשחק, אחד היריבים בוחר בסימן "האיקס" (X) והשני ב־"עיגול" (O). לוח המשחק הוא טבלה של 3×3 משבצות. השחקנים משחקים לסירוגין, וכל אחד מסמן בתורו את אחד התאים הפנויים בסימנו. המנצח הוא הראשון שמשלים שורה, עמודה או אלכסון של שלושה תאים (איור 2). "איקס־עיגול" הוא משחק אסטרטגי. זאת אומרת, ששני שחקנים (או יותר) בוחרים פעולות מתוך מספר אפשרויות, והתוצאה או ההצלחה של כל שחקן תלויה גם בבחירה שלו וגם בבחירות של השחקנים האחרים. לכן על כל שחקן לחשוב לא רק על בחירת הצעד שלו, אלא גם של השחקן השני.

למען הפשטות (אך ללא הגבלת הכלליות), נניח כאן ובהמשך שהשחקן הראשון מסמן באיקס, והשני בעיגול - בהתאם לסדר המילים בשם המשחק. מדובר במשחק בעל 'מידע מלא' (Mendelson, 2016), שכן שני היריבים רואים את לוח המשחק במלואו, ואין בו פרטים נסתרים (כמו קלפים הפוכים במשחק "מלחמה"). נוסף לכך, זהו משחק ללא גורם אקראי, כגון קוביות. במונחים מתמטיים, "איקס־עיגול" הוא משחק חסר תועלת, כיוון שהוא תמיד יסתיים בתיקו אם איש משני השחקנים לא יטעה. אבל מאחר שבני אדם אינם מושלמים - והם נוטים לטעות - המשחק מעניין, ולעיתים אף מפתיע. הוא ממש לא משעמם. השאלה אם המשחק "הוגן" תלויה בהגדרה של הוגנות. אם הכוונה היא שלשני השחקנים יש סיכויים שווים לנצח, אז לא בדיוק: השחקן הראשון (X) תמיד יכול להבטיח לפחות תיקו, ואם השחקן השני טועה - לנצח. לכן ישנו יתרון ברור לשחקן הראשון, כפי שנראה בהמשך.

למידה דרך משחק

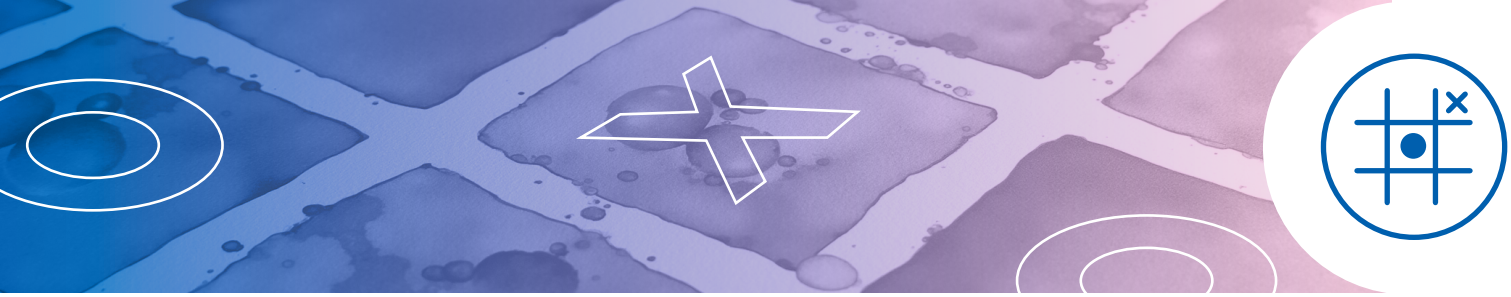
כדאי שמורים בבית הספר היסודי יכירו את המשחק "איקס-עיגול" לעומק, משום שהוא דוגמה מצוינת לפעילות פשוטה ומהנה, שדרכה ניתן לפתח כישורים מתמטיים ולוגיים כבר מגיל צעיר. המשחק מזמן שיח מתמטי טבעי סביב מושגים כמו תכנון מהלכים, דפוסים, סימטריה, חשיבה אסטרטגית והסקת מסקנות. הוא מתאים במיוחד לסביבות לימודיות שבהן רצוי לעודד תלמידים לחשוב קדימה, לשער השערות וללמוד מניסיון - והכול בצורה ידידותית, מוכרת וללא צורך באביזרים מיוחדים. יתרה מכך, המשחק מזמין את התלמידים לגלות בכוחות עצמם עקרונות מתמטיים בסיסיים מתוך התנסות, ולא דרך הסבר מופשט. עבור המורה זוהי הזדמנות מעולה ליצור מרחב של סקרנות, שיתוף וחקירה מתמטית (Clarkson, 2008).

איור 1:

מתקן איקס-עיגול בגן שעשועים.

צילום מאת דוד שי, שיתוף דרך ויקימדיה קומונס CC BY-SA 3.0.

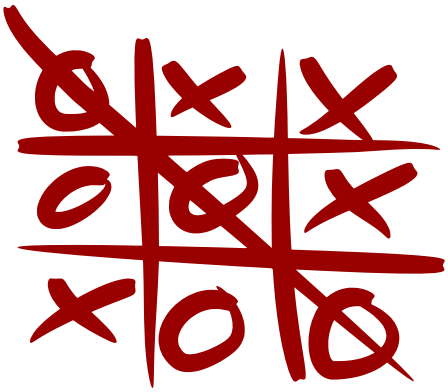




איור 2:

משחק שבו ניצח השחקן שמסמן עיגולים

מקור: Joeytje50, CC BY 4.0, via Wikimedia Commons



המתמטיקה שברקע המשחק

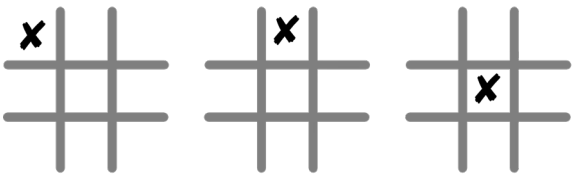
כיוון שלוח המשחק אינו גדול במיוחד המשחק איקס-עיגול מתאים להדגמה של ניתוח אסטרטגיות משחק. נפתח בשאלה: בכמה דרכים שונות יכול המשחק להתפתח עד למהלך החמישי? (זהו מספר המהלכים המינימלי שיכול להוביל לניצחון). התשובה היא $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15{,}120$. זאת כיוון שבמהלך הראשון ניתן לבחור אחת מתוך 9 משבצות, במהלך השני אחת מתוך 8, וכן הלאה. כיוון שכל אחת מתשע האפשרויות למהלך הראשון יכולה להתפתח לשמונה אפשרויות שונות למהלך השני, וכן הלאה, אנו כופלים את המספרים זה בזה. מספר זה אומנם גדול - וגדול מדי לניתוח ישיר של אסטרטגיות משחק. לכן נשאל בשלב זה: בכמה דרכים שונות, באופן ניכר, ניתן לפתוח את המשחק? שני מצבים של פתיחת משחק ייחשבו שקולים אם ניתן להגיע מאחד לשני על ידי סיבוב (בכפולות של 90 מעלות) או שיקוף של הלוח. כלומר, הם לא ייחשבו שונים באופן ניכר (Averbach & Chein, 2000). לדוגמה: אם השחקן הראשון מסמן איקס באחת מפינות הלוח, אין זה משנה באיזו פינה משום שניתן לסובב את הלוח כך שיתקבל אותו מצב. בנספח א' תמצאו תרגילים בנושא. ניתן להציע לתלמידים מראות קטנות ומספריים לגזור את לוחות המשחק, כדי להקל עליהם יותר לבדוק את הסימטריות. צורה, תבנית, או - במקרה שלנו - מצב לוח במשחק איקס-עיגול נחשבים סימטריים אם קיימת טרנספורמציה גאומטרית, כמו שיקוף או סיבוב, שמחזירה את המצב על עצמו.

מכאן נובע שניתן **לפתוח** את המשחק בשלושה אופנים שונים בלבד (איור 3):

1. סימון באחת הפינות
2. סימון באחד התאים שאינו מרכזי ואינו פינתי
3. סימון במרכז הלוח

איור 3:

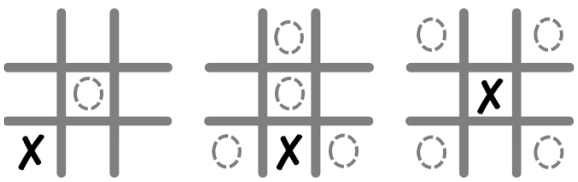
שלוש האפשרויות של פתיחת המשחק



באיור 4 ניתן לראות כיצד כדאי להגיב לכל אחת מפתיחות המשחק הללו.

איור 4:

העיגולים המקווקווים מתארים אילו תאים כדאי לסמן במהלך השני

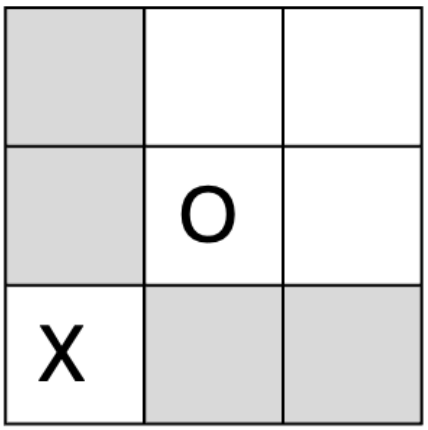


אם השחקן השני יגיב כפי שמתואר באיור 4, ואיש מבין השחקנים לא יטעה בהמשך המשחק, אזי יסתיים המשחק בתיקו (Gardner, 1988). אפשר לחשוב על התמונה הראשונה והאחרונה כמצבים הפוכים מבחינה אסטרטגית: אם השחקן הראשון בוחר פינה, השחקן השני מגיב במרכז; אם הוא בוחר מרכז, התגובה האופטימלית היא פינה. לדוגמה: אם

השחקן הראשון סימן תא בפינה, והשחקן השני סימן את המרכז, אזי על השחקן הראשון לבחור באחד מהתאים הריקים שבשורה, או בעמודה של האיקס הראשון שלו, כך שיהיו לו שני איקסים באותה שורה, או באותה עמודה (איור 5). לאחר מכן, השחקן השני יסמן את התא השלישי הפנוי באותה שורה או עמודה – כדי לחסום. ומכאן ואילך, עד סוף המשחק, כל שחקן יבחר בתורו תא ריק בשורה או בעמודה שבה יריבו כבר סימן אחד או שני תאים, ללא סיכוי להשלים רצף של שלושה תאים.

איור 5:

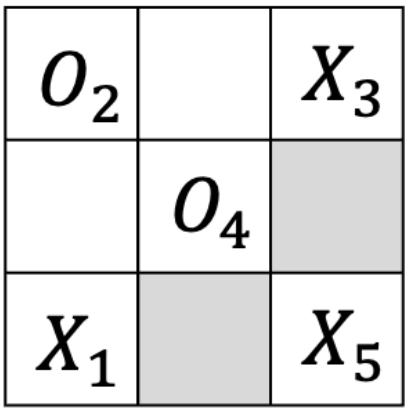
במהלך הבא השחקן הראשון (X) יצטרך לבחור באחד מהתאים האפורים



לעומת זאת - אם השחקן השני *לא* יבחר באחד מהתאים המסומנים בעיגולים המקווקווים, השחקן הראשון יכול לנצח אם לא יטעה בהמשך המשחק.
לדוגמה: אם השחקן הראשון בחר בפינה, ויריבו בחר בפינה שבאותה השורה, או באותה העמודה, כדאי לשחקן הראשון לסמן בהמשך את התא הפינתי שעל אותו האלכסון עם האיקס הראשון שלו. בהמשך, יריבו חייב לחסום אותו במרכז הלוח. השחקן הראשון (X) יבחר בתא הפינתי האחרון שעדיין פנוי, ויצר עם זאת מלכודת, כי יריבו (O) יוכל לחסום אותו רק באחד משני התאים האפורים כמתואר באיור 6.

איור 6:

השחקן הראשון (X) יכול לנצח, כיוון שהשחקן השני (O) יכול לחסום אותו רק באחד משני התאים האפורים. המספרים הקטנים מציינים את סדר המהלכים שהובילו למצב זה בלוח המשחק.



באופן כללי, אם השחקן השני לא יבחר באחד מהתאים המסומנים בעיגולים מקווקווים (איור 4), השחקן הראשון יוכל בהמשך המשחק לבנות "מלכודת". אז מהי מלכודת?

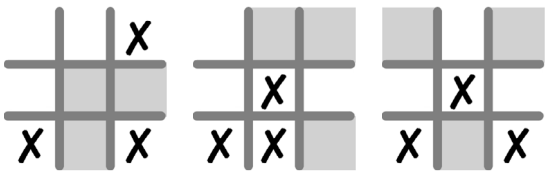
מלכודות

מלכודת במשחק איקס-עיגול היא מצב שבו לשחקן אחד יש שתי אפשרויות שונות להשלמת רצף של שלושה מסימניו - באותה שורה, באותו טור או באותו אלכסון - כך שהיריב יכול לחסום רק אחת מהן (ראו איור 7). מלכודות כאלה מזכירות משולשים, שכן אפשר לתפוס את שלושת סימני האיקס שבבסיס המלכודת כשלושת קודקודיו של משולש. סביבם ישנם תאים הצבועים באפור, ובהם היריב יכול לנסות לחסום את השלמת הרצף. אם היריב לא יבלום את בניית המלכודת מייד אחרי האיקס הראשון - כלומר, לא יסמן אחד מתאי המלכודת בעיגול - הוא ייקלע למצב בעייתי. אם הוא מסמן תא שצבוע באפור רק לאחר הופעת האיקס השני, יישארו אחרי המהלך השלישי של השחקן הראשון שני תאים פתוחים

צבועים באפור. כעת יהיו על הלוח שתי שלשות כמעט שלמות של איקסים, שכל אחת מהן חסרה רק תא אחד, ומאחר שהיריב לא יוכל לחסום את שתיהן במהלך אחד הוא יפסיד.

איור 7:

אם היריב (O) הצליח לסמן עד כה רק אחד מתוך שלושת התאים האפורים, השחקן שבנה את המלכודת (X) ינצח במהלך הבא, כיוון שנותרו לו שתי אפשרויות להשלמת רצף של שלושה מסימניו.
כמובן, קיימות מלכודות שקולות, שנוצרות על ידי סיבוב או שיקוף של לוח המשחק.



בפתיחה פינתית (התמונה השמאלית באיור 3) סימון התא המרכזי יבלום את כל המלכודות האפשריות (ראו גם את כל האפשרויות של בניית מלכודת בנספח ג').
בפתיחה במרכזה של שורה חיצונית, כל התאים המסומנים בעיגולים מקווקווים באיור 4 עלולים לחסום בניית מלכודת (ראו גם את כל האפשרויות של בניית מלכודת בנספח ד').
במקרה של פתיחה במרכז הלוח, היריב השני (שמסמן עיגול) לא יוכל לחסום את כל האפשרויות לבניית מלכודת כבר במהלך הראשון (נספח ה'). עם זאת, אם יבחר לסמן עיגול באחת הפינות, הוא יוכל בהמשך למנוע בנייה של מלכודות נוספות, ובאותו מהלך גם להציב עיגול נוסף, כך ששני עיגולים יימצאו ברצף אחד עם תא ריק ביניהם. מצב זה ידרוש מהשחקן הראשון (שמסמן באיקס) להגיב כדי למנוע הפסד בְּמָקום להמשיך בבניית המלכודת.
נשאלת השאלה: כיצד כדאי לפתוח את המשחק? האם יש הבדל בין שלוש דרכי הפתיחה שצוינו למעלה (איור 3)? ובכן, בהנחה שהיריב אינו מושלם ועלול לטעות, כדאי לפתוח עם איקס באחת הפינות. כפי שניתן לראות באיור 4, קיימת רק דרך אחת להגיב לפתיחה זו באופן נכון - באמצעות סימון התא המרכזי. בשבעת המקרים האחרים ינצח השחקן הראשון. כלומר, אם היריב יבחר את המהלך שלו באופן אקראי, הסיכוי שיטעה הוא שבע מתוך שמונה.
עם קצת אימון, מורים יכולים ללמוד את פתיחות המשחק המומלצות ואת דרכי התגובה המתאימות, כך שיוכלו להבטיח לתלמידים שהם - המורים - לא יפסידו לעולם. דבר זה יוצר אתגר מהנה לתלמידים, שמעודד אותם לשחק, לחשוב ולהבין את מהלכי המשחק לעומק. בנספח ב' תמצאו תרגילים בנושא.

משחקים שרק נראים שונים

המשחק 3 ל־15

המשחק 3 ל־15 הוא משחק איקס-עיגול "בתחפושת" (Albert, Nowakowski, & Wolfe, 2019): שני שחקנים בוחרים לסירוגין באחד המספרים מ־1 עד 9. כל אחד מהמספרים יכול להיבחר פעם אחת בלבד. כל שחקן בתורו רושם בצבע שבחר מראש את המספר שבו בחר (כדי לזכור בסוף המשחק מי רשם איזה מספר). מי שמצליח לרשום שלושה מספרים שבהם הוא בחר (כלומר בצבע שלו) שמסתכמים ל־15, מנצח. באנגלית המשחק נקרא גם "סקראבל מספרי" (Number Scrabble). בדומה לאיקס-עיגול יסתיים משחק זה בתיקו אם איש משני השחקנים לא יטעה.
ברצף המספרים הבא ניתן לראות משחק שהסתיים בתיקו: 4, 5, 8, 3, 7, 9, 1, 6, 2. ייתכן שהשחקנים לא ירשמו את המספרים האחרונים 6 ו־2, כי כבר ברור שהמשחק הסתיים בתיקו. המספר 6 לא ישלים ל־15 שום זוג מספרים הצבועים בכחול, והמספר 2 לא ישלים ל־15 שום זוג של מספרים הצבועים באדום.
כדי להצליח במשחק זה בקלות (כלומר כדי לא להפסיד או כדי לנצח בתקווה שהיריב יטעה) כדאי לדמיין ריבוע קסם בגודל 3×3, שבו המספרים בכל שורה, עמודה ואלכסון מסתכמים ל־15. בכל מהלך יש לבחור במספר שנמצא בתא שבו היינו בוחרים אילו היינו משחקים איקס-עיגול. כדי להבין זאת טוב יותר, כדאי להשוות בין רצף המספרים הנ"ל לבין ריבוע הקסם באיור 8.

לעומת הדוגמה הקודמת, ניתן לראות ברצף המספרים הבא 4, 2, 6, 5, 8, 1, 3 משחק שבו השחקן הראשון ניצח, כיוון שהמספרים (האדומים) 4, 8 ו־3 מסתכמים ל־15 (איור 9). הטעות של השחקן השני: לפי האסטרטגיה שמופיעה באיור 4, ובהשוואה עם ריבוע הקסם באיור 8, השחקן השני היה צריך לבחור במספר שמופיע במרכזו של ריבוע הקסם, כלומר ב־5. כיוון שהוא לא עשה זאת, השחקן הראשון הצליח לבנות מלכודת עם הוספת המספרים 6 ו־8. אחרי שהשחקן הראשון רשם 4, 6 ו־8, היו לו שתי אפשרויות להשלמת שלשה שמסתכמת ל־15: הוספת המספר 1 (8+6+1) או 3 (8+4+3), כאשר השחקן השני היה יכול לחסום רק אחת משתיהן.

איור 8:

משחק 3 ל־15 שהסתיים בתיקו. המספרים הקטנים מציינים את סדר המהלכים.

2	7 5	6 8
9 6	5 2	1 7
4 1	3 4	8 3

איור 9:

משחק 3 ל־15, שבו השחקן הראשון (באדום) ניצח. המספרים הקטנים מציינים את סדר המהלכים.

2 2		6 3
	5 4	1 6
4 1	3 7	8 5

כעת ניתן להבין מדוע המשחק נקרא גם "איקס-עיגול בתחפושת". ניתן להמיר כל מצב של המשחק "איקס-עיגול" למצב של המשחק "3 ל־15" על־ידי החלפת הסימן (איקס או עיגול) במספר שנמצא במקום המתאים בריבוע קסם, וכל מצב במשחק "3 ל־15" ללוח איקס-עיגול, על־ידי החלפת המספר בסימן איקס או עיגול (לפי מספר השחקן) באותו המקום, שבו נמצא המספר בריבוע הקסם.

איקס-עיגול מילולי

כדי להכין משחק איקס-עיגול מילולי יש לבחור בשמונה אותיות ובתשע מילים, כך שכל אחת משמונה האותיות מופיעה בשלוש מילים בדיוק. לדוגמה: ברשימת המילים "בית", "ברק", "בוהו", "אתן", "וראי", "אלה", "תלו", "רעל", ו"ליה" מופיעות האותיות "א", "ב", "ה", "ו", "י", "ל", "ר", ו־"ת" בשלוש מילים בדיוק. אין זה חשוב שמופיעות אותיות נוספות, או שהאות "ו" מופיעה פעמיים במילה "בוהו". השחקנים בוחרים לסירוגין באחת מהמילים. אין לבחור פעמיים באותה המילה. כדי לוודא זאת, ניתן למחוק את המילים שנבחרו, או להשתמש בקלפים שעליהם רשומות המילים ולהניח את הקלפים הנבחרים בצד. הראשון שמצליח לבחור בשלוש מילים בעלות אות משותפת הוא המנצח. ניתן להבין שמדובר במשחק שקול למשחק "איקס-עיגול", כאשר מארגנים את המילים בטבלה במבנה 3×3 (איור 10). בכל מצב של המשחק "איקס-עיגול" ניתן להתאים בין כל אחד מהסימנים איקס ועיגול לבין המילה שנמצאת באותו המקום בטבלה, ועבור כל מילה שנבחרה במהלך מסוים, ניתן לסמן במקומה בטבלה איקס או עיגול לפי מספר השחקן.

איור 10:

ארגון המילים של המשחק "איקס-עיגול מילולי" בטבלה.

↖	↓ ב	↓ א	↓ ל
← ת	בית	אתן	תלו
← ר	ברק	וראי	רעל
← ה	בוהו	אלה	ליה
↖			

הכללות

הכללה טבעית היא לשחק איקס-עיגול בשלושה ממדים, כלומר במתקן או קובייה עם 27 תאים (איור 11).

מעניין לדעת, שבמקרה זה אין מצבי תיקו. ההוכחה היא בסתירה: נניח בשלב ראשון שיש מצב תיקו, ננסה "לבנות אותו" ונראה שאין אפשרות לשייך את התא המרכזי של הקובייה לאחד משני היריבים בלי ליצור בדרך זו רצף של שלושה סימנים (Tic-tac-toe game on the cube 3×3×3, 2018).

בגרסה התלת־ממדית השחקן הראשון ינצח, אם יבחר בצעד הראשון את מרכז הקובייה, ואם הוא לא יטעה בהמשך המשחק. אם מבטלים את האפשרות לסמן את מרכז הקובייה במהלך הראשון, ינצח השחקן השני. אם מבטלים את השימוש בתא המרכזי לאורך כל המשחק, ינצח שוב השחקן הראשון.

עוד על משחקי "איקס-עיגול" מיוחדים ניתן למצוא בכתבה מאת אבי סאייג (2013).

איור 11:

איקס-עיגול תלת־ממד

מקור: Eliran t, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons



קווארטו!

את משחק ה"קווארטו!" משחקים על לוח במבנה 4×4. ישנן 16 אבני משחק, ולכל אבן ארבע תכונות: כל אבן יכולה להיות גבוהה או נמוכה, בהירה או כהה, חלולה או מלאה, עגולה או מרובעת. כל אחת מהאבנים היא שילוב ייחודי של התכונות הללו (איור 12). במהלך המשחק היריבים מניחים לסירוגין אבנים על הלוח. המטרה היא ליצור שורה, טור או אלכסון שבהם כל ארבע האבנים חולקות תכונה משותפת (למשל: כולן בהירות, ראו איור 13). במובן זה, "קווארטו!" היא הכללה של המשחק "איקס-עיגול".

הטוויסט: בכל תור, כל שחקן מקבל מהיריב את האבן שהוא נדרש להניח על הלוח.

המשחק עדיין לא נחקר באופן מלא מבחינה מתמטית. ככל הנראה מדובר במשחק הוגן, שיסתיים בתיקו אם שני היריבים ישחקו באופן אופטימלי (Goossens, 2000).

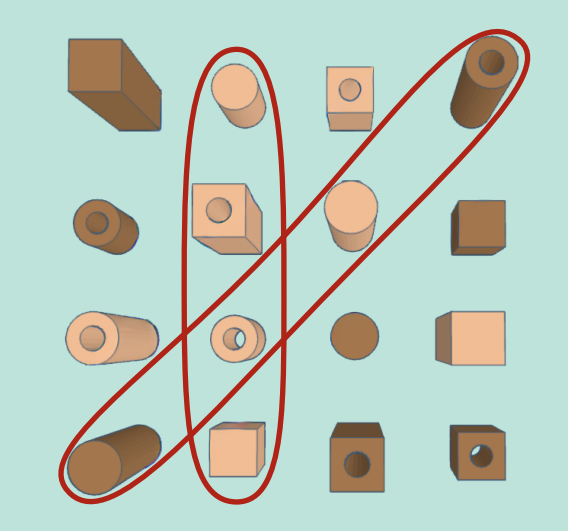
איור 12:

המשחק קווארטו במצב התחלתי.

צילום: עמנואל גיל ושיתוף דרך "ויקיפדיה קומונס" CC BY-SA 3.0.



איור 13:
לוח "קוואַרטו!" שבו הצליח השחקן האחרון ליצור טור שבו כל האבנים בהירות, ואלכסון שבו כל האבנים עגולות



קישורים

- משחק איקס-עיגול אונליין, אינטראקטיבי: https://g.co/kgs/8mtEY3R
- משחק "קוואַרטו!" אונליין, אינטראקטיבי (באנגלית): http://quarto.freehostia.com/en/

ביבליוגרפיה

- סאייג, א'. (2013). *משחקי איקס-עיגול מיוחדים*. אוחזר מתוך דוידסון אונליין: משחקי-איקס-עיגול-מיוחדים. נדלה מ- https://davidson.org.il/read-experience/scienceathome/משחקי-איקס-עיגול-מיוחדים/
- Albert, M. H., Nowakowski, R. J., & Wolfe, D. (2019). Change the Game. In M. H. Albert, R. J. Nowakowski, & D. Wolfe, *Lessons in Play* (p. 20). Boca Raton: CRC Press.
- Averbach, B., & Chein, O. (2000). Symmetry as a limiting factor. In B. Averbach, & O. Chein, *Problem Solving Through Recreational Mathematics* (pp. 234-238). Mineola, New York: Dover Publications.
- Clarkson, P. C. (2008). Exploring the Possibilities of Using Tic-Tac-Toe to Think and Communicate about Mathematics. *Australian Mathematics Teacher*, *64*(2), 28 - 33.
- Gardner, M. (1988). Ticktacktoe. In M. Gardner, *Hexaflexagons and other Mathematical Diversion* (pp. 37-46). Chicago and London: The University of Chicago Press.
- Goossens, L. (2000). *Quarto*. Retrieved from Internet Archive Way Back Machine: https://web.archive.org/web/20041012023358/http://ssel.vub.ac.be/Members/LucGoossens/quarto/quartotext.htm
- Mendelson, E. (2016). *Introducing Game Theory and its Applications*. Bocca Raton: CRC Press.
- *Tic-tac-toe game on the cube 3×3×3*. (2018). Retrieved from Mathematics Stack Exchange https://math.stackexchange.com/questions/2784654/tic-tac-toe-game-on-the-cube-3x3x3

נספח א' - דף עבודה בנושא "לוחות משחק שקולים"

לפניכם שמונה מצבים מתוך משחק "איקס-עיגול". כל שני מצבים שקולים זה לזה אם ניתן להפוך את האחד לשני על ידי סיבובים או שיקופים של לוח המשחק.
סמנו את הזוגות השקולים, והסבירו אילו פעולות סימטריה מחברות ביניהם.

X	O	
	O	
O	X	X

X	O	
O	X	
	X	

	O	X
O	X	O
	X	

O	X	
X	X	O
	O	

O	X	O
O	X	X
O	X	X

O	X	O
X	X	O
O	X	X

X	O	
	O	
O	X	X

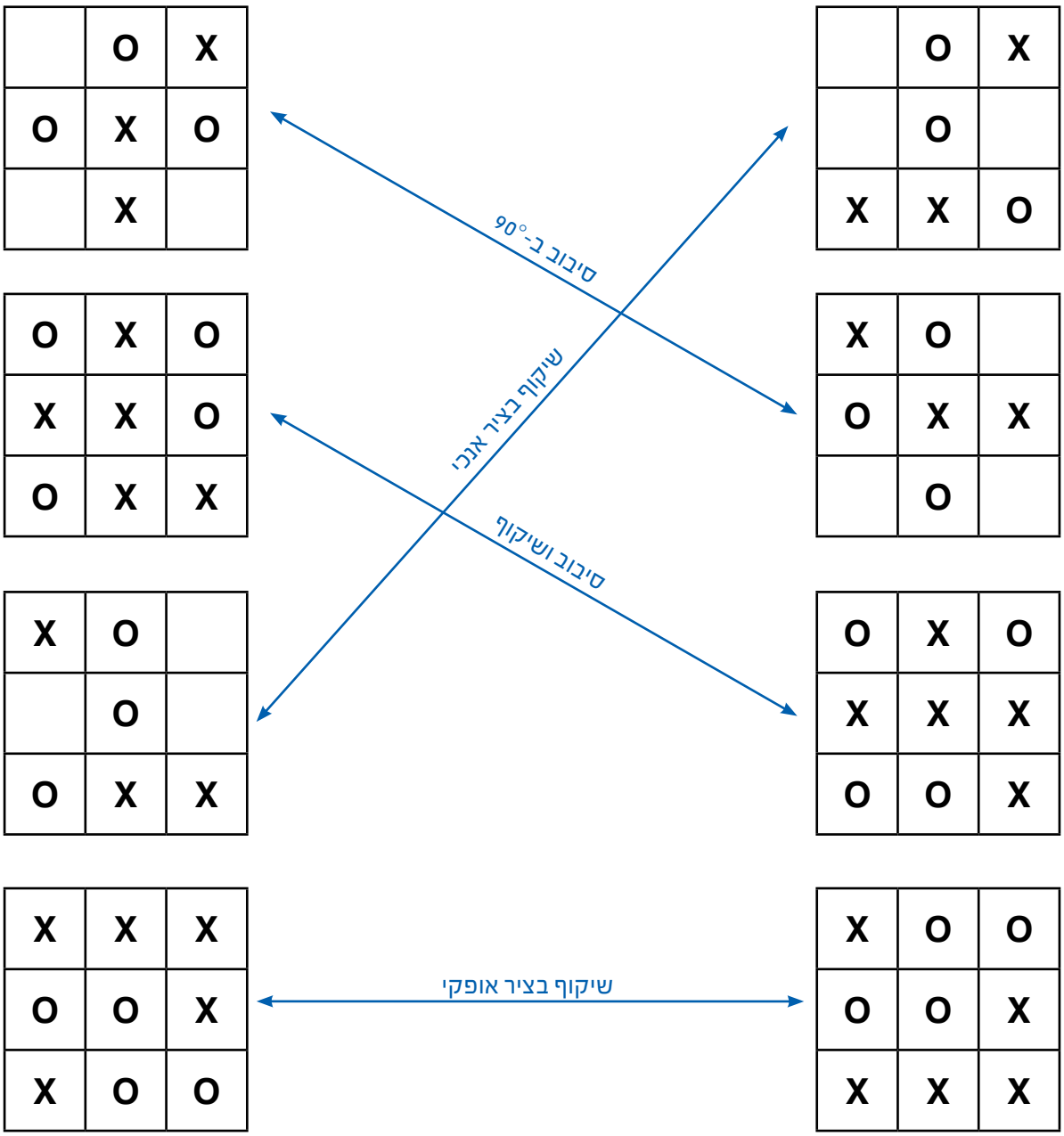
X	O	
	O	
X	X	O

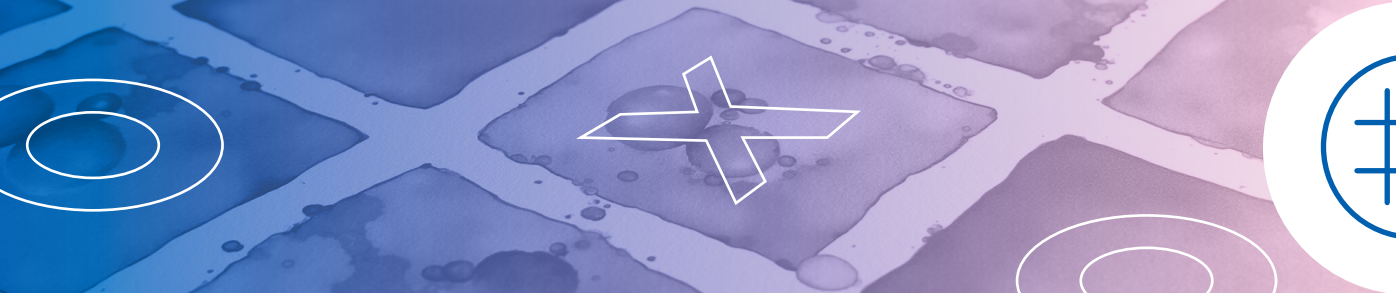
O	O	X
X	O	O
X	X	X

X	X	X
X	O	O
O	O	X

נספח א' - פתרונות לדף העבודה בנושא "לוחות משחק שקולים"

לפניכם שמונה מצבים מתוך משחק "איקס-עיגול". כל שני מצבים שקולים זה לזה אם ניתן להפוך את האחד לשני על ידי סיבובים או שיקופים של לוח המשחק.
סמנו את הזוגות השקולים, והסבירו אילו פעולות סימטריה מחברות ביניהם.





נספח ב'

אחרי הפתיחות הבאות של המשחק "איקס-עיגול" אפשר כבר לקבוע למי יש סיכוי לנצח, או אם המשחק יסתיים בתיקו.
סמנו מה לדעתכם יקרה, והסבירו - אם השחקן השני מפסיד - מה הוא היה יכול לעשות כדי להימנע מההפסד.

1.

	O	
X		

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

2.

X		O

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

3.

	O	
	X	

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

4.

	X	O

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

נספח ב' - פתרונות

1.

X_9	O_6	X_3
X_5	O_2	O_4
O_8	X_7	X_1

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[X] תיקו

השחקן השני מיקם את העיגול הראשון שלו לפי האסטרטגיה שמתוארת באיור 4. המספרים הקטנים מתארים מהלך משחק אפשרי.

2.

X_3		X_5
	O_4	
O_2		X_1

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[X] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

המספור מתאר מהלך משחק אפשרי. היריב השני יכול לחסום את היריב הראשון רק באחד משני התאים האפורים.

3.

O_4	O_2	X_5
	X_1	
		X_3

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[X] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

המספור מתאר מהלך משחק אפשרי. היריב השני יכול לחסום את היריב הראשון רק באחד משני התאים האפורים.

4.

O_6	X_3	X_5
X_9	O_4	O_8
O_2	X_1	X_7

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

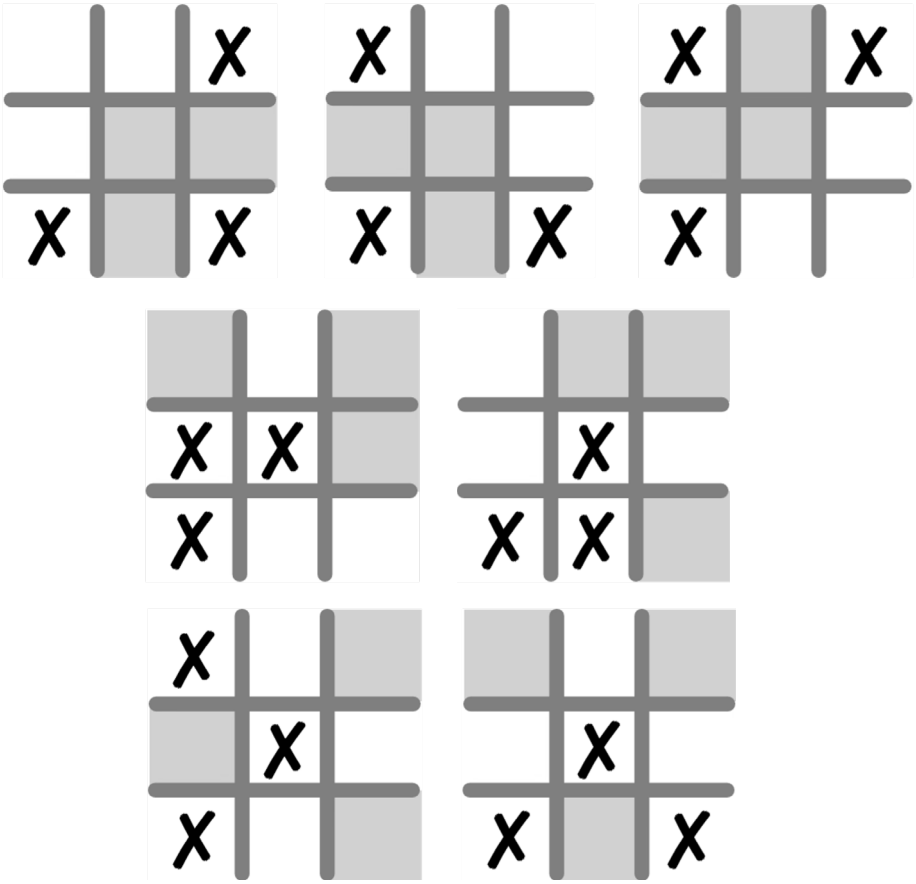
[ ] היריב השני ינצח

[X] תיקו

השחקן השני מיקם את העיגול הראשון שלו לפי האסטרטגיה שמתוארת באיור 4. המספרים הקטנים מתארים מהלך משחק אפשרי.

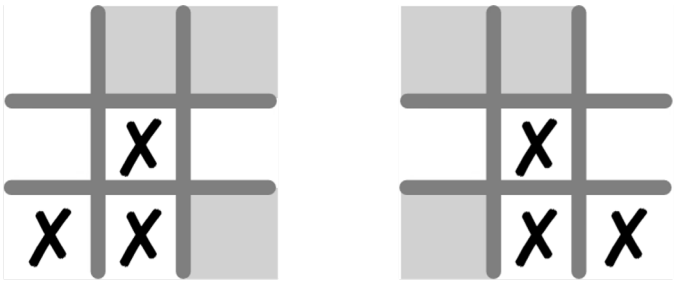
נספח ג'

מלכודות אפשריות כאשר הפתיחה מתבצעת מהפינה השמאלית התחתונה.
קיימות מלכודות שקולות כאשר הפתיחה מתבצעת מאחת הפינות האחרות.



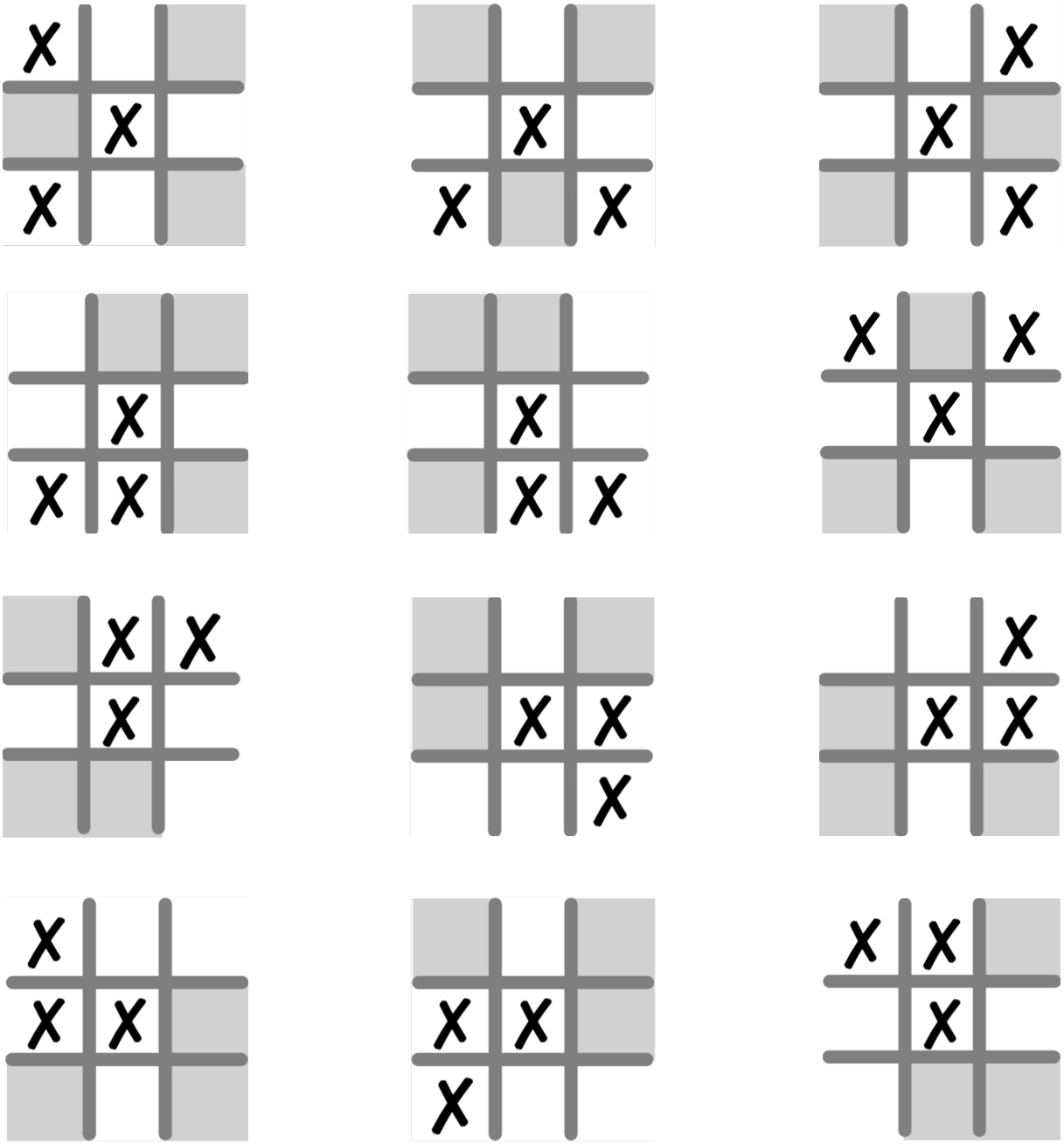
נספח ד'

מלכודות אפשריות כאשר הפתיחה מתבצעת במרכז השורה התחתונה.
קיימות מלכודות שקולות כאשר הפתיחה מתבצעת מאחת הפינות האחרות.



נספח ה'

מלכודות אפשריות כאשר הפתיחה מתבצעת במרכז הלוח.
קיימות מלכודות שקולות כאשר הפתיחה מתבצעת מאחת הפינות האחרות.



נשמח לשמוע את דעתכם

כניסה לטופס משוב מקוון

