

זרקור על

כמויות רציפות בחינוך מתמטי - מבט בין תחומי

פרופ' טלי רוה
ראש ההתמחות להתפתחות וחשיבה מתמטית בגיל הרך
המחלקה לחינוך מתמטי, הפקולטה לחינוך
אוניברסיטת חיפה

סיימון גרג
בית הספר הבין־לאומי של טולוז,
טולוז, צרפת



כמויות רציפות בחינוך מתמטי - מבט בין־תחומי

טלי רוה[1] וסיימון גרג

תקציר

כיצד ילדים לומדים מיומנויות בסיסיות כמו הבחנה בין כמויות שונות וספירה? על פי התיאוריה הדומיננטית של מערכת לאומדן כמויות, (Approximate Number System - ANS) בני אדם נולדים עם היכולת להבחין בין כמויות בדידות (כלומר, מספרים). נובע מכך שתוכנית לימודים מוקדמת במתמטיקה יכולה או אף צריכה להתמקד בכמויות בדידות. תיאוריה זו מנחה תוכניות לימודים רבות במתמטיקה מוקדמת ברחבי העולם אשר מתחילות בספירה ואריתמטיקה. אנו מספקים סקירה של ראיות אמפיריות המאתגרות את תיאוריית ה־ANS ומציגים מסגרת תיאורטית עדכנית יותר מהקונצנזוס - מערכת לאומדן גדלים (Approximate Magnitude System - AMS). תיאוריה זו מציעה שגדלים רציפים (כמו שטח, צפיפות, נפח וכדומה) הם אינטואיטיביים יותר ונרכשים מוקדם יותר מאשר היכולת להבין מספרים. באמצעות דוגמאות מפרקטיקות של חינוך מתמטי מוקדם אנו דנים בתועלות הפוטנציאליות של אימוץ גישת ה־AMS ושימוש בגדלים רציפים כפיגומים להבנת מספרים ומושגים מתמטיים מורכבים (כפי שהוצע, למשל, על ידי Davydov). תובנות שהתקבלו ממחקרים המשלבים פסיכולוגיה קוגניטיבית ומחקר חינוכי, עם השתתפות פעילה ותרומה של מורים למתמטיקה בגיל הרך וגננות, עשויות לסייע, הן לפסיכולוגים קוגניטיביים המתעניינים באופן שבו מתפתחות יכולות מתמטיות, והן למחנכים וגננות המחפשים לשפר את תוכנית הלימודים שלהם במתמטיקה. אנו מקווים שמאמר זה יעורר השראה באחרים (בעיקר הבאים מתחום ההוראה) לשקול מחקר בכיוון זה, ויוביל לדיון פורה על תפקידם של גדלים רציפים בהוראת מתמטיקה.

1. tleibovi@univ.haifa.ac.il

מבוא

לפני מספר ימים התווכחו ביניהם הילדים של המחברת הראשונה (בגיל 4 ו־5) "מי גבוה יותר". הם בילו בערך רבע שעה בניסיון למדוד את גובהם בדרכים שונות, ולהוכיח את הטענה שלהם. יום קודם לכן, הבת של המחברת הראשונה כעסה כי אמרנו לה ש־4+4=8. היא רגזה על כך שהוכחנו לה שהסכום נכון כי מנינו אצבעות. אבל זה סתר את הניסיון שלה בגן, שם היא מנתה על האצבעות שלה ושל חברתה, והתוצאה שהתקבלה הייתה 6. לכן היא הציעה "אולי יצא לי 6 בגן כי אצבעות של ילדים קטנות יותר".

המקרים האלה מדגימים עד כמה אינטואיציה של ילדים על מתמטיקה, קשרים בין אובייקטים וחוקיות קיימת ומעסיקה אותם ביום־יום. בהתאם לכך, השאלות שנתמקד בהן במאמר הן - מהי האינטואיציה הזו? האם היא מושתתת על מספר או גודל רציף? וכמה היא משמשת בסיס שעליו בונים תובנות מתמטיות בתוכנית הלימודים הנוכחית בגיל הרך?

מחקרים רבים הנערכים במשך עשורים, מוקדשים לשאלה כיצד ילדים צעירים לומדים מתמטיקה. ידיעה כיצד נרכשות מיומנויות חשבון בסיסיות תאפשר לנו ללמד מתמטיקה ביעילות רבה יותר, באופן הדומה יותר לדרך שבה אנו לומדים מתמטיקה 'באופן טבעי'.

במאמר זה נסקור תחילה את הספרות הקוגניטיבית, ונציג את הקונצנזוס: תיאוריית מערכת לאומדן כמויות (Approximate Number System - ANS) והשלכותיה על תוכניות הלימודים בבתי הספר. לאחר מכן, נציג את הסתייגויותינו מתיאוריה זו ונדון בחלופה, תיאוריית מערכת לאומדן גדלים (Approximate Magnitude System - AMS). תיאוריית ה־AMS עולה בקנה אחד עם התיאוריות של V.V. Davydov (להלן דווידוב), אך מנקודת מבט קוגניטיבית. כמו כן, נדון ביתרונות של תוכנית לימודים ממוקדת גדלים, כפי שהוצעה על ידי דווידוב ותיאוריית ה־AMS, ונביא מספר דוגמאות



לפעילויות ליישום העקרונות הבסיסיים של התיאוריות של דווידוב וה־AMS בפרקטיקה. לבסוף נתמקד בהקשר הישראלי בשאלות: כיצד ואם ניתן ליישם את תיאוריית ה־AMS והתיאוריה של דווידוב בהקשר הרחב יותר, שהציע התחלה עם מדידה כדי להקנות מושגים אלגבריים בגיל צעיר.

תיאוריית מערכת לאומדן כמויות - ANS

מחקרים קוגניטיביים שחקרו את מקורן של מיומנויות מספריות בסיסיות במשך התפתחות הפרט ובין תרבויות יצרו קונצנזוס, שיכולות מתמטיות מבוססות על יכולות בסיסיות מולדות (כמו אמידה והשוואת כמויות). הטענה היא שמיומנויות בסיסיות כאלה מתאפשרות על ידי מנגנון עצבי ייעודי ('חוש מספר' מולד) המאפשר לאדם להשוות, לתפוס ולתמרן כמויות לא־סימבוליות (כמויות מספריות) מלידה. תיאוריה זו ידועה בשם תיאוריית 'מערכת לאומדן כמויות' (ANS). ה־ANS נחשבת כמנבאת מיומנויות מתמטיות מתקדמות יותר, כלמידת מספרים סימבוליים (למשל Cantlon, Platt, & Brannon, 2009).

אחת השיטות הנפוצות ביותר המשמשות לחקר מיומנויות ANS היא משימת השוואה של כמויות מספריות. במשימה כזו המשתתפים רואים שתי קבוצות של פריטים (בדרך כלל עיגולים), ובוחרים את הקבוצה המכילה יותר פריטים. לדוגמה, הלברדה ופייגנסון (Halberda & Feigenson, 2008) ביקשו מילדים בני 3-6 להשוות איזו קבוצה מכילה יותר פריטים, כדי לבדוק את התפתחות החדות של ה־ANS עם הגיל. משימה כזו אינה דורשת כל מיומנויות שפה מילולית או ידע פורמלי, מה שהופך אותה למתאימה מאוד לא רק למחקרים עם מבוגרים מערביים אלא גם למחקרים התפתחותיים ובין־תרבותיים.

תוכנית לימודים ממוקדת מספרים

ספירה, מספרים וחישובים נתפסים בדרך כלל כדרך המלך בחינוך מתמטי מוקדם. יש המאמינים שצריך להדגיש זאת אף יותר (Ontario Ministry of Education, 2018). גם בתוכנית החדשה של משרד החינוך לבתי הספר היסודיים בישראל ניתן למצוא העדפה למספר: בכיתה א' למשל, מוקדשות 45 שעות הוראה להכרת מספרים טבעיים ואפס, עוד 45 שעות לפעולות חשבון בתחום ה־100, ולעומתם כ־13 שעות לגיאומטריה וקדם־אלגברה, ורק 15 שעות הוראה למדידות אורך (טיוטת תוכנית הלימודים 9.7.24).

דוגמה להשפעה כזו של תיאוריית ה־ANS על תוכנית הלימודים בבית הספר היא מודל הקוד המשולש של דהאן (Dehaene et al., 2003). קולס וסינקלר (Coles & Sinclair, 2017) דנו במודל הקוד המשולש שבו ההנחה היא שמשמעות המספר יכולה לבוא רק מכמויות לא־סימבוליות. מודל זה השפיע רבות על עיצוב תוכניות לימודים שבהן קרדינליות (כלומר מספר המתאר את גודל הקבוצה) נלמדת לפני עיקרון האורדינליות (מספר סידורי). במילים אחרות, מספרים נלמדים כמוחלטים ולא כיחסיים. באופן דומה, התיאוריות של דהאן ואחרים בנוגע לכך שבני האדם נולדים עם יכולת לתפוס כמויות בדידות קטנות (למשל, de Hevia & Spelke, 2009; Dehaene, 1997; Izard et al., 2009; Nieder, 2005) בגיבוי מחקר נוירו־קוגניטיבי, היטו גם הן את הכף לטובת עליונות המספר.

בעוד שמודל ה־ANS מקדם דגש על כמויות בדידות, יש גם סיבות היסטוריות לכך. טקסטים להוראת מתמטיקה וההוראה עצמה התפתחו, בין היתר, מהספר Liber Abaci של פיבונאצ'י, טקסט שצמח מתוך הצורך של סוחרים לחשב בקלות (Devlin, 2011). היו גם שינויים בחינוך מתמטי שמטרתם לקדם ספירה, מספרים וחישובים על פני היבטים אחרים של מתמטיקה, כנראה מסיבות הקשורות לערכים פוליטיים כמו שמרנות וסמכות. תנועות 'חזרה ליסודות' בחינוך, שהחלו בשנות השבעים בתגובה לתנועות חברתיות מתקדמות, השתמשו בדגש על מיומנויות בסיסיות כמו ספירה ושינון טבלאות כפל כדי לקדם מטרות פוליטיות רחבות יותר (Vickery & Smith, 1979). גישה זו מעדיפה הוראה מובנית ושמירה על סמכות המורה, ובתוך כך הגבלת החשיפה



לנושאים שעלולים לעורר מחלוקת או לאתגר מבנים חברתיים קיימים. כפי שמציינים החוקרים, דגש מוגבר על מיומנויות טכניות במתמטיקה יכול לבוא על חשבון פיתוח חשיבה ביקורתית ויכולת להשתמש במתמטיקה לניתוח נושאים חברתיים ופוליטיים מורכבים. לדוגמה, משרד החינוך באנגליה מציע יעדי למידה מוקדמת לגיל שלוש עד חמש. בגרסת 2013 יש יעד למספרים, וגם יעד לצורה, מרחב ומידות: "ילדים משתמשים בשפה יומיומית כדי לדבר על גודל, משקל, קיבולת, מיקום, מרחק, זמן וכסף כדי להשוות כמויות ועצמים ולפתור בעיות. הם מזהים, יוצרים ומתארים דפוסים. הם חוקרים מאפיינים של עצמים יום־יומיים וצורות ומשתמשים בשפה מתמטית כדי לתאר אותם". הגרסה שהוצעה בשנת 2021 על ידי ה־Early Years Foundation Stage (EYFS) כוללת שינוי ניכר אשר מדגיש הבנה של מספר וכמות, עם פחות דגש על מרחב ומדידה (Department of Education, 2021). יש לשים לב, שבעוד שמטרות התוכנית כוללות (עבור צעד ראשון - גיל 5 עד 7) גם זיהוי ומיון של צורות, הרי הלימודים עצמם כוללים דגש עצום על מספרים: ספירה מ־0, 1 או כל מספר עד 100; זיהוי, שיום וכתיבת מספרים עד 100; ספירה בקפיצות של 2 ו־5; קריאת של מספרים בין 1-20; ייצוג מספרים בעזרת אובייקטים; חיבור וחיסור מספרים עד 20; כפל וחילוק בצעד אחד, ושברים, ורק בסיומה תכונות של מצולעים (דו־ממד ותלת־ממד); תיאור כיוון, סיבוב ותנועה. כלומר, כמו בישראל, גם כאן ההתמקדות היא יותר במספר ופחות בגיאומטריה ומדידה.

תיאוריית מערכת לאומדן גדלים (AMS)

למשימות ממוחשבות שבאמצעותן בודקים השוואת כמויות מספריות, הנפוצות במחקרי ANS, יש חיסרון רציני: לכל קבוצת פריטים שיש לה כמות מספרית שונה, יש גם גדלים רציפים שונים. גדלים רציפים הם כל גודל שצריך למדוד אותו ולא לספור אותו, כמו צפיפות, נפח, שטח כולל וכדומה. לפריטים יש גדלים שונים, בעוד שקבוצות של פריטים תופסות שטחים שונים על המסך, יש להן צפיפות פריטים שונה וכדומה. לכן, כל עוד גם הגודל הרציף שונה, וגם הכמות שונה, בניסוי השוואת כמויות קשה להיות בטוחים מה עזר למשתתף או משתתפת להחליט בתהליך ההשוואה איפה יש יותר פריטים - שאלת הכמות, הגודל הרציף, או שילוב של שניהם. שימו לב שקשה עד בלתי אפשרי ליצור שתי קבוצות פריטים שיש להן כמות שונה אך אותם גדלים רציפים (איור 1).

איור 1:

גדלים רציפים משתנים עם כמות מספרית



איור 1א מדגים את הקשר בין כמויות מספריות לגדלים רציפים. העגלות משמאל מדגימות את המתאם החיובי הנפוץ: יותר פריטים תופסים יותר מקום בעגלת הקניות. העגלות מימין מראות שלעיתים מתאם זה מופר. איור 1ב קשור לכמות מספרית וגדלים רציפים בתכנון ניסוי (משימה ממוחשבת של השוואת כמות מספרית). כל מערך מכיל שש נקודות. הגדלים הרציפים של מערכים אלה, עם זאת, שונים זה מזה. איור 1ג מציג דוגמה שלמערכי נקודות שונים תמיד יהיו גדלים רציפים שונים. הצד השמאלי של כל מלבן מכיל שש נקודות והצד הימני מכיל עשר נקודות. כפי שניתן לראות בגרסאות השונות, מניפולציה של גודל אחד מובילה להבדלים בגדלים אחרים, מה שגורם לכך שבלתי אפשרי לשלוט בכל הגדלים הרציפים בו־זמנית.



בסביבה הטבעית והיום־יומית כמות מספרית וגדלים רציפים לרוב תואמים: קבוצה עם יותר פריטים בדרך כלל תתפוס יותר מקום, תכסה יותר שטח ותהיה צפופה יותר מקבוצה עם פחות פריטים (איור 1א - משמאל מספק דוגמה יום־יומית). לכן, כאשר משתתפים צופים בשתי קבוצות של פריטים, כמו במחקר של הלברדה ופייגנסון שהוזכר לעיל, לא רק שמספר הפריטים משתנה, אלא יש שינוי בגודל רציף כמו השטח הכולל של כל הפריטים. בעקבות כך, אי אפשר להיות בטוחים שמשתתפים מסתמכים רק על כמות מספרית כשהם מחליטים, כפי שמציעים חלק מתומכי ה־ANS.

כדי להפחית את האפשרות שמשתתפים משתמשים בגדלים רציפים במקום להשתמש בכמות מספרית, חלק מהמחקרים ניסו "להפריע" למתאם בין כמות מספרית לגדלים רציפים. ההיגיון הוא שאם גדלים רציפים אינם מנבאים בתוך הניסוי באופן עקבי כמות מספרית, הם גם לא ישפיעו על הביצועים. שיטה פופולרית אחת להפחתת ההשפעה הפוטנציאלית של גדלים רציפים על הביצועים היא ליצור מתאם חיובי בין חלק מהגדלים הרציפים לבין הכמות המספרית בחצי מזוגות הגירויים המוצגים, ומתאם שלילי בחצי השני, וכך לבטל את המתאם הכולל בין כמות מספרית לגדלים רציפים (איור 1ג). כך, בחצי מהשאלות בניסוי, הקבוצה המכילה יותר נקודות תופסת שטח כולל גדול יותר, והקבוצה השנייה המכילה פחות נקודות תופסת שטח כולל קטן יותר. זהו המתאם החיובי הטבעי שאנו נתקלים בו בחיי היום־יום. במילים אחרות, מצב זה תואם את הציפיות שלנו ולכן נקרא מצב **תואם**. במחצית השנייה של השאלות בניסוי, הקבוצה עם פחות נקודות תופסת יותר שטח כולל, מה שמנוגד לציפיות שלנו ואינו תואם אותן, ולכן מצב זה נקרא מצב **לא תואם**. כאשר התבקשו לבחור את הקבוצה המכילה יותר נקודות, נמצא כי הן ילדים והן מבוגרים היו מהירים ומדויקים יותר במצבים תואמים מאשר במצבים לא תואמים (Gilmore et al., 2016). תופעה זו ידועה כ**אפקט תאומות הגודל**.

אפקט התאומות מרמז שגם כאשר גדלים רציפים אינם רמז מנבא של כמות מספרית לאורך כל הניסוי, הם בכל זאת משפיעים על הביצועים. בעקבות כך, קשה מאוד (אם לא בלתי אפשרי) לקבוע לפי איזה עיקרון משתתפים בוחרים את הכמות המספרית הגדולה יותר (לפרטים נוספים, Leibovich, Katzin, Harel & Henik, 2017). הדבר רומז על תפקיד חשוב אפשרי של גדלים רציפים במשימות אלה ובחיי היום־יום.

עדויות התומכות בתפקיד הגדלים הרציפים בעיבוד כמות מספרית

עדויות אמפיריות מציעות שגדלים רציפים מעובדים ומשפיעים על הביצועים גם כאשר הם אינם רלוונטיים למשימה ואינם מנבאים כמות מספרית (Clearfield & Mix, 1999; Mix et al., 2002; Szucs et al., 2013). לדוגמה, במחקר של ליבוביץ' והניק (Leibovich & Henik, 2014) השוו משתתפים בוגרים את מספר הנקודות בשתי קבוצות, והתבקשו לבחור את הקבוצה המכילה יותר נקודות. היחס בין מספר הנקודות בקבוצות אלה תומרן, כאשר היחס חושב כחלוקה של המספר הקטן יותר במספר הגדול יותר. לדוגמה, היחס המספרי בין קבוצה של חמש נקודות לקבוצה של 10 נקודות הוא 5/10 = 0.5. ככל שהיחס קרוב יותר לאחד, כך הגדלים המושווים דומים יותר זה לזה. נמצא כי הביצועים גרועים יותר כאשר היחס קרוב ל־1, תופעה הידועה כאפקט היחס (Moyer & Landauer, 1967). נוסף לכך, חושב היחס בין חמישה גדלים רציפים של קבוצות הנקודות המושוות. התוצאות הראו שהן יחס הכמות המספרית, והן יחס הגדלים הרציפים, משפיעים על זמני תגובה ואחוזי דיוק, למרות שהגדלים הרציפים לא היו רלוונטיים למשימה, ושום גודל מהגדלים הרציפים לא יכול היה לשמש כרמז לניבוי כמות מספרית. בהתאם לממצא זה, מחקרים אחרים עם ילדים ומבוגרים, הראו שכאשר המתאם בין מספר וגדלים רציפים הוא שלילי (כלומר בתנאים לא תואמים) (איור 1ג) זמן התגובה איטי יותר, והדיוק נמוך יותר מאשר כאשר המתאם בין מספר לגדלים רציפים הוא חיובי (כלומר בתנאי תואם) (Gilmore et al., 2016; Leibovich-Raveh et al., 2018).

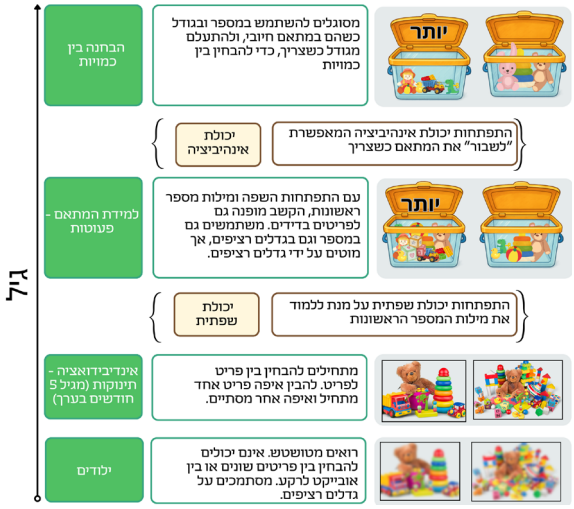


מודל תיאורטי חדש להתפתחות מושג המספר

בהתבסס על מחקרים אמפיריים וסקירת ספרות, ליבוביץ' ועמיתים (Leibovich et al., 2017) הציעו מודל תיאורטי חדש לתיאור התפתחות מושג המספר (איור 2).

איור 2:

מודל תיאורטי להתפתחות מושג המספר



מודל זה מציע שבני אדם נולדים עם היכולת להבחין בין גדלים רציפים כאשר ההבדל גדול דיו. על פי מודל זה, בלתי אפשרי לתינוק להבחין בין כמויות מספריות משתי סיבות עיקריות: האחת, החדות הוויזואלית של תינוקות גרועה פי 25 מזו של מבוגר, לכן, במרחק של יותר מ־40 ס"מ (מרחק הנקה) עבור תינוק מתחת לגיל חמישה חודשים, הסביבה נראית מטושטשת. שנית, עד גיל חמישה חודשים תינוקות אינם יכולים להבחין בין פריטים, כלומר הם חסרים יכולת שנקראת אינדיווידואציה - הם אינם יכולים לקבוע שעצם נפרד מהרקע, או היכן עצם אחד מסתיים ועצם אחר מתחיל. בתנאים אלה קשה לדמיין כיצד, גם אם היה קיים 'חוש מספר' מולד, הוא יכול היה להיות שימושי לפני שמערכות פיזיולוגיות וקוגניטיביות מרכזיות מבשילות. אחרי גיל חמישה חודשים בערך, שני דברים חשובים מתרחשים: האחד, התינוק מתחיל לפתח את יכולת האינדיווידואציה, כלומר מפתח את היכולת להבחין בין פריטים. שנית, התפתחות מיומנויות השפה, ובמיוחד רכישת מילות המספר הראשונות למספרים קטנים (פחות מ־5). שני אלה יחד מדגישים כמות מספרית, והקשב של התינוק מופנה כעת לא רק לקבוצת הפריטים כולה, אלא גם לפריטים הבודדים. בשלב זה, המודל מציע, ילדים לומדים באמצעות התנסות עם הסביבה את המתאם הטבעי שבין כמויות מספריות לגדלים רציפים. כלומר, יותר פריטים יתפסו יותר מקום, יהיו כבדים יותר להרמה וכדומה, בהשוואה לפחות פריטים. מובן שמתאם זה נפוץ בסביבה, אך איננו מושלם. בשלב ראשון, ילדים מכלילים יתר על המידה מתאם זה על כל מצב, גם על מצבים יוצאי דופן, כמו המצב המתואר באיור 1א. רק בשלב מאוחר יותר, עם התפתחות הבקרה הקוגניטיבית, ובמיוחד היכולת להתעלם ממידע לא רלוונטי, ילדים יכולים להתחיל "לשבור" את המתאם, ולהבין שבעוד שבדרך כלל קיים מתאם חיובי בין גדלים רציפים וכמות מספרית, יש יוצאים מן הכלל, ולעיתים (כמו במקרה של עגלת הסופרמרקט), מספר יהיה רלוונטי יותר מאשר גדלים רציפים למשימה הנתונה (למשל בבחירת תור לקופאית). רק אז הילד מוכן להבין את מושג המספר כמשהו שנמצא במתאם עם גדלים רציפים, אך עצמאי מהם. לדוגמה, שני מטבעות ושני בניינים הם בעלי אותה כמות מספרית למרות שהגדלים הרציפים שלהם שונים באופן ניכר. במילים אחרות, בשלב זה ילדים מוכנים להבין שמספר הוא מושג אבסטרקטי שיכול לייצג כל דבר.

אנו טוענים שלפני שהבנה זו מתרחשת, ילד אינו יכול להבין תכונות בסיסיות הנדרשות ללמידת מנייה ומספרים סימבוליים. לדוגמה, אם התפיסה של הילד לגבי "איפה יש יותר" קשורה לגודל רציף, אז הוא לא יכול להבין ש־3 נקודות הן יותר מ־2 נקודות, אם שתי הנקודות גדולות יותר פיזית. ואכן, יש מחקרים שהדגימו ישירות רעיון זה. למשל, נגן וסרנקה (Negen & Sarnecka, 2015) בדקו את הקשר בין רמת הידע המספרי של ילדים (knower level) לביצוע שלהם במטלות השוואת נקודות. הם מצאו שילדים שעדיין לא רכשו הבנה של פונקציית היורש (כלומר



שלכל מספר יש מספר עוקב שגדול ממנו ב־1) ועיקרון הקרדינליות (כלומר מספר המתאר גודל של קבוצה), הסתמכו בעיקר על גדלים רציפים (כמו גודל הנקודות או השטח הכולל) במקום להסתמך על כמות מספרית בעת השוואת קבוצות נקודות. לעומתם, ילדים עם ידע מספרי מתקדם, כלומר שרכשו את עיקרון הקרדינליות, הצליחו יותר להתעלם מהגדלים הרציפים ולהתמקד בכמות המספרית בלבד. לאחר שהחוקרים שינו את המטלה כדי לוודא שהילדים אכן מגיבים על בסיס מספר ולא על בסיס גדלים רציפים, אזי נעלם המתאם שדווח בעבר בין יכולות השוואה לידע מספרי - מה שמצביע על כך שילדים ללא ידע מספרי מתקדם אכן מסתמכים על גדלים רציפים (ולא על מספר) כאסטרטגיה עיקרית להערכת כמויות.

תוצאות חינוכיות של המודל המוצע

אם, כפי שאנו מציעים, גודל רציף ולא מספר הוא היסודי, במובן של היותו היסוד שעליו נבנה, הן הידע המרחבי והן הידע המספרי, יהיו לכך השלכות על ההוראה.

ילדים צעירים מפתחים עושר של ידע מעשי על גדלים עד שהם מגיעים לבית הספר. אנו בונים את תחושת הגדלים הרציפים שלנו כשאנחנו מושיטים יד או צועדים, שופטים מרחקים לקפיצה, או שופטים רווח כדי לקבוע אם נוכל לעבור דרכו. בזמן משחק במים, חול או בצק משחק, ילדים בונים תחושה לגבי 'איך כמויות מתנהגות'. הם חווים סיבוב כשהם רצים או רוכבים על קורקינט, אורך כשהם מסובבים חבל, זמן כשהם ממתינים או צריכים לעצור. אפשר לשאול לפיכך, כיצד כל זה משרת אותם במסעם דרך תוכנית הלימודים המתמטית בבית הספר?

גדלים נמצאים בכל מקום במשחק של ילדים צעירים. רשימה נפוצה של סכמות משחק (Grimmer, 2017) היא העברה, עטיפה, הקפה, מסלול, סיבוב, חיבור, מיקום והמרה. כל אחת מסכמות אלה כרוכה בגדלים רציפים מסוג כלשהו (כמו גם בסידורים, גיאומטריה, טופולוגיה ודפוסים - אבל לא כל כך במנייה). אם יש לנו תפיסה מוטת־מספרים כלפי מתמטיקה, איננו מעריכים את סוגי המשחק הללו על כל המתמטיקה שהם מכילים.

כפי שטוני קוטון (Cotton, 2019) כתב:

"תיארתי בעבר את ההנאה בצפייה בנכדיי יוצרים דפוסים, מתנסים במילוי וריקון מכלים או מעמיסים מוטות על משאיות צעצוע. מעניין שמה שהם לא עושים זה לספור. הם סופרים רק כאשר מורים או מבוגרים אחרים מבקשים מהם. ***ספירה היא העדיפות המתמטית הנמוכה ביותר שלהם.***"

היתרונות של הכללת גדלים רציפים בתוכנית הלימודים בבית הספר

ילדים נכנסים לבית הספר עם ידע לא פורמלי על אודות גדלים, שנרכש דרך התנסות עם הסביבה מגיל צעיר. לכן אנו מציעים, שמורים יעריכו ויבנו על בסיס ידע זה תשתית לידע פורמלי. לדוגמה, ילד בן ארבע הנמצא בארגז החול בונה מגדל מקוביות עץ. החלק העליון שלו כעת מעל ראשו, אבל הוא מנסה לבנות את המגדל גבוה יותר. הילד לא מראה סימן למניית הקוביות. מה שנראה כי מעניין אותו הוא הגובה של המגדל, אולי הגובה שלו בהשוואה אליו. אולי הוא רוצה לראות לאן הגבול של הישג ידו יכול להגיע. מה יאמרו המורים המעוניינים לדבר איתו, וגם לגעת במתמטיקה? כיוון שמספר ומנייה הם כל כך בחזית החשיבה שלנו, אולי מפתה לומר, 'מעניין בכמה קוביות השתמשת?' בעקבות העניין של הילד, יהיה מתאים יותר להעיר על הגודל: 'וואו, המגדל הזה ממש גבוה! אתה גבוה או נמוך מהמגדל? עמוד לידו; הבה נראה.' אנו גם רוצים לטעון שפעילויות עם גדלים רציפים בכלל, וחומרים מרחביים בפרט, יכולות לעזור לילדים לרכוש ביתר קלות מושגים מתמטיים מורכבים. מושגים כאלה עשויים לכלול ספירה, תפיסה מוקדמת של יחס ופרופורציות ואומדן של כמויות לא מדויקות. גישה זו אינה חדשה לחלוטין למי שמכיר את עבודתו והתיאוריה שהציע הפסיכולוג הרוסי דוויידוב (1930-1998). הוא טען שמספרים אינם יכולים להיות אבני



הבניין היסודיות של המתמטיקה, מכיוון שהם מוגדרים על בסיס מושגים מתמטיים יסודיים יותר. דווידוב הציע בשנות השבעים שחינוך מתמטי מוקדם צריך להתחיל בהשוואת תכונות הגודל הפיזיות של עצמים, כמו אורך, מסה, שטח ונפח. תחילה השאלות הן של שוויון או אי־שוויון (למשל, 'למי יש יותר חלב?'). הדרכה והוראה דרך התנסויות טבעיות אלה מלמדת ילדים על יחסים בין גדלים שונים, ותכונות חשובות כמו a+b = b+a, שיעזרו להם להבין אלגברה מורכבת יותר בעתיד. דווידוב גם טען שמספרים צריכים להיות מוצגים כאשר השאלה משתנה מ"למי יש יותר" ל"בכמה יותר", ויש צורך להגדיר במדויק את היחס בין כמויות. במילים אחרות, מספרים צריכים להילמד כיחסיים, לא מוחלטים, וכיחידות מדידה של גדלים (Venenciano & Dougherty, 2014) בהתאם לכך, דווידוב (1962) בחן ופיתח תוכנית לימודים מתמטית ברוסיה שהתבססה על גדלים רציפים.

דווידוב אינו היחיד שתכנן חומרים מובנים כדי לאפשר חקירה שיטתית של גדלים: ה"מתנות" של פרידריך פרבל במאה התשע־עשרה (למשל Lange, 2018) והחומרים הסנסוריים של מריה מונטסורי בתחילת המאה העשרים (Lillard & Stoll, 2006) הם דוגמאות המשפיעות על תוכניות הלימודים המבוססות-גדלים. דוגמה נוספת המדגימה את העקרונות של התיאוריות של דווידוב וה־AMS הם מקלות קוזינר (ידועים כ"בדידים" בישראל), שפותחו על ידי ג'ורג' קוזינר באמצע המאה העשרים. אלה הם מקלות עץ שבהם אורך (או שטח או נפח) מייצג גדלים בדידים. מקלות קוזינר אינם מסומנים כדי להראות יחידות ואינם מושווים דרך ספירה. במקום זאת, גדלים (אורך, נפח) מושווים זה לזה והיחסים בין גדלים שונים מודגשים לפני שמוצגים מספרים סימבוליים (De Bock, 2020) על פי שיטת הלימוד המקורית של גטנגו (De Bock, 2020), השלב הראשון בהוראה עם מקלות קוזינר הוא משחק חופשי, שבו הילדים פוגשים את המקלות בפעם הראשונה, והם צופים במאפיינים חשובים שלהם: מקלות באותו אורך הם באותו צבע, ולהיפך; מקלות באורך שונה הם בצבע שונה, ולהיפך; אורך כל מקל ניתן ליצירה על ידי "רכבת" של מקלות. זהו שלב שצריך להימשך זמן ממושך מאוד. בשלב זה אין להזכיר קשר למתמטיקה בכלל או מספרים בפרט.

השלב השני הוא שלב פיתוח השפה המתמטית. בשלב זה משולבים מונחים מתמטיים מדויקים, עם שימוש בשפה מתמטית מתאימה כמו "משוואה" או "שווה ערך", עד שהם הופכים לחלק טבעי מאוצר המילים של הילדים בכיתה א' (בישראל - גן חובה).

השלב השלישי הוא "יצירת רכבות" כדי לפתח הבנת יחסים ועקרונות בסיסיים. בגיל חמש ילדים מתבקשים ליצור "רכבות" שהן באותו אורך, ואז הם מתחילים לחוות יחסים כמו צהוב+ורוד = כחול (גם בזה אין עדיין קישור למספרים). הם מפתחים מודעות לקומוטטיביות (חוק החילוף): צהוב+ורוד = ורוד+צהוב. נוסף לכך, הם לומדים תכונות של חלוקה: 3 (ורוד+צהוב) = (3 ורוד+3 צהוב).

השלב הרביעי הוא הבנת יחסים מספריים. המטרה היא לקשר בין גדלים פיזיים למספרים. בשלב הזה הילדים מתחילים להבין שהמקל הכחול למשל, הוא ארוך פי תשעה מאורך המקל הקטן ביותר (לבן), והם חווים יחסים כמו 9=5+4 ו־ 9=4+5.

גטנגו טען שהגישה המסורתית להוראה המתבססת על ספירה, משאירה יותר מדי ילדים עם הבנה לא מספקת, כי הם מתמקדים בספירה במקום ביחסים, דבר שעלול למנוע מהם להבין תכונות מתמטיות בסיסיות כמו חילוף, חלוקה וכדומה, ולגרום להבנה שטחית של מתמטיקה. לכן בשיטה זו, מספרים יוצגו (יחוברו לבדידים) רק לאחר שהילדים מבינים לעומק את היחסים הפיזיים בין הבדידים. כך המספרים הופכים להיות משמעותיים ולא רק סמלים ריקים, או כמו שטען דווידוב, הם באים לעזור במדידה.

לדוגמה, כאשר ילדים בני חמש המתבקשים לבנות ממקלות קוזינר 'רכבות' שהן באותו אורך, יוצרים סידור כמו זה שבאיור 3, נוסף לחוויה של צהוב+ורוד = כחול, הם עשויים להיות מודעים לתכונות כגון חילוף וחלוקה שהוזכרו מעלה. אך הם עושים זאת ללא ספירה, ואכן אילו נדרשו לספור, נניח עם קוביות מתחברות,



החוויה הישירה של הגשטלטים (תפיסה של תמונה שלמה כיותר מסך חלקיה) האלה הייתה יכולה בקלות להיאבד בספירת יחידות.

בישראל שיטת הבדידים ידועה לשמצה. מכלי הוראה נפוץ בין שנות השישים-שמונים של המאה הקודמת, גם בזכות יועצות כגון פרופ' פרלה נשר (Nesher, 1988), לאחר שנת 2000 חל צמצום בשימוש בהם. בשנת 2002 קמה תנועה ציבורית של אנשי חינוך ומתמטיקאים שהתנגדו לגישה זו. מציין את הגישה הזו המאמר עם הכותרת המבהילה "אל תתנו להם בדידים! לעולם לא תוכלו לתקן את הנזק!" (גביש, 1999). אולם מחקרים חדשים מכל העולם מראים, הן את היתרונות שבשיטה הזו (אשר בדידים הם רק חלק ממנה). מחקרים אלו גם עשויים להסביר מדוע היא לא הוכיחה את עצמה בישראל. מחקר חדש של איאן בנסון ועמיתיו (Benson et al., 2022) הציג מטה־אנליזה, ניתוח כמותני של מחקרים קודמים על שימוש בבדידים בבתי ספר יסודיים שונים (כיתות א-ו) בארצות שונות בעולם, ומצא שיעילות השימוש בבדידים נמצאת בקשר ישיר עם נאמנות לעקרונות תוכנית הלימודים של גטנגו. נאמנות לעקרונות תוכנית הלימודים נמדדה באמצעות ארבעה קריטריונים:

א. תוכנית הלימודים עצמה: עד כמה הייתה קרובה לתוכנית הלימודים המקורית של גטנגו
ב. ניסיון המורים בהוראה בשיטה הזו
ג. הכשרת המורים, ואם היא כללה את התכנים המקוריים של גטנגו
ד. מוכנות צוות המחקר שערך את המחקר המקורי - עד כמה במחקר עצמו צוטטו מחקרים וטקסטים של גטנגו.

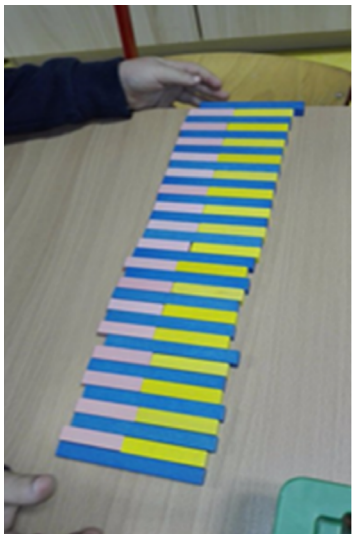
מתוך המחקרים עולה, שברובם האפקט של שיטת הלימודים שנחקרה היה חיובי בהשוואה לתלמידים שלמדו בשיטה המסורתית (בבית הספר היסודי). אולם גודל האפקט עלה ככל שמדד הנאמנות לעקרונות תוכנית הלימודים היה גבוה יותר. מכאן, שעצם השימוש בבדידים כשלעצמו אין בו די, לא כדי להניב תועלת. הרעיון הוא ליצור סביבת לימודים אשר תומכת בהבנת רעיונות אלגבריים מופשטים שיעזרו לתלמידים להבין יחסים בין אובייקטים, ולהפנים רעיונות מתמטיים מורכבים לעומק. שאם לא כן, כמו שגטנגו בעצמו טען, זהו סתם משחק במקלות צבעוניים.

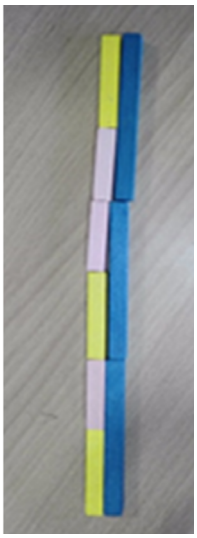
במחקר זה בדקו גם את רמת השיפור של תלמידים ברמות שונות של מתמטיקה. נמצא כי תלמידים עם הישגים נמוכים במתמטיקה השתפרו באריתמטיקה בעקבות השימוש בבדידים, לעומת תלמידים עם הישגים גבוהים במתמטיקה שהשתפרו באלגברה (כפי שנמדד במבחנים לפני, אחרי ובהשוואה לתלמידים בתוכנית המסורתית).

לאור מחקרים רבים בעולם, שמראים כי בשימוש הולם בבדידים תלמידים מראים הבנה מתקדמת של אלגברה, ייתכן כי הקושי או הכשל בשימוש בבדידים בישראל, לא נבע מעצם הכלי, אלא מאופן השימוש בו, שהתמקד כאמצעי להמחשה של כמות מספרית בדידה. למשל, במאמר "אל תתנו להם בדידים" (גביש, 1999) מוזכר מקרה שבו תלמידה אומרת שאצלם בכיתה "5 הוא רק צהוב". אבל אם משתמשים בבדידים בצורה נכונה כדי להראות בכמה דרכים שונות ניתן להרכיב 5, צימוד בין מספר וצבע לא אמור להיווצר.

איור 3:

מקלות קוזינר (בדידים)







גדלים רציפים משרתים למידה מתמטית מאוחרת יותר

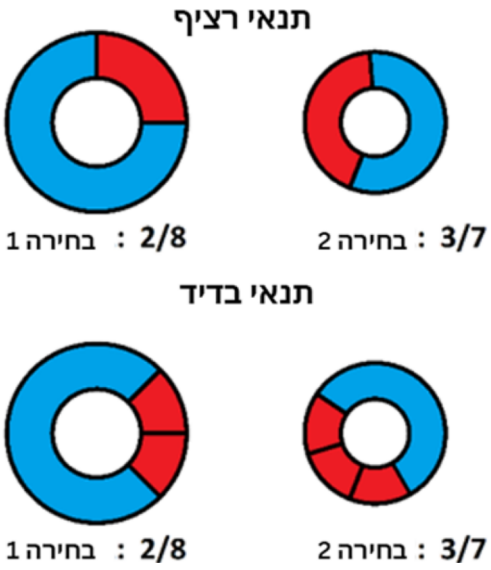
ספירה וחיבור נתפסים בדרך כלל כצעדים ראשונים בלמידת מספרים של ילדים. אבל אם נתמקד באלה תוך כדי הדרת גדלים רציפים, תישאל השאלה: האם לא נקשה על התפתחויות מאוחרות יותר? שקלו את התרחישים הבאים:

אנחנו מסתכלים על כמה גדלו שני צמחים. גם הקטן יותר וגם הגדול יותר גדלו בשני סנטימטרים. מי גדל יותר? בהליכה בנתיב הרגיל של ספירה ואז חיבור, ייתכן שילדים הניחו בצד כל מודעות שיש להם לכך, שהשוואות נערכות לעיתים קרובות באמצעות פעולת הכפל. תחושת הלוגריתם הטבעית שלנו היא, ששני כלבים הם באותו גובה אם יש הבדל של ס"מ אחד בגובהם, אבל שתי נמלים עם אותו הבדל הן שונות מאוד בגודלן. האם יש דרכים לשמר את תחושת היחס הטבעית שלנו שהתפתחה בצורה לא פורמלית, רק מתוך תצפית בסביבה שלנו?

ישנן ראיות שילדים צעירים יכולים לחשוב על מצב כפלי, כאשר הם שוקלים גדלים רציפים באופן שהם אינם יכולים עם גדלים בדידים. ג'אונג, לוין והוטנלוכר (Jeong et al., 2007) מצאו שילדים בני שש היו מסוגלים לבחור בחירה שתמקסם את הפרופורציה של צבע אחד במצב של הסתברות כאשר הצבע היה רציף, ללא יחידות שניתן לספור, ולא אם היו חלקים בדידים (ראו איור 4). הם מציעים שבמצב הבדיד, הספירה של הילדים עשויה להפריע לתפיסת הגשטלט של הפרופורציות. המצב הרציף כאן יכול להיות מאומץ בפרקטיקה הוראתית. ההשלכות חורגות מעבר לחומרים המסוימים שבהם משתמשים.

איור 4:

על פי ג'אונג, לוין והוטנלוכר, התפתחות החשיבה הפרופורציונלית: השפעת כמויות רציפות לעומת בדידות, 2007.



ילדים בני שש הצליחו יותר בבחירת האפשרות עם הפרופורציה הגבוהה יותר של אדום במצב הרציף.

דוגמה נוספת, יצירת דפוס גדל לדוגמה מנקודות: ילדים מסמנים נקודות על מערכת צירים. במקרה זה הם מחברים את הנקודות באמצעות קו ישר או קו שבור. האם רעיון החיבור של נקודות בקו ישר/שבור הגיוני לילדים?

עוד דוגמה לשימוש במצב רציף בפרקטיקה הוראתית, הפעם בדו־ממד, הוא אומדן שטח של צורה לא רגילה: אנחנו מסתכלים על איך ניתן לאמוד את שטח העלה על ידי העתקתו על נייר משבצות. אנחנו יכולים לספור את כל המשבצות בפנים כקירוב. אם נעשה את המשבצות קטנות, אנחנו רואים איך הקירוב שלנו נעשה מדויק יותר. אנחנו מדמיינים שנמשיך להקטין את המשבצות עד שבגבול יהיה לנו השטח הנכון של העלה. עברנו דרך ארוכה כדי להיות מסוגלים לדבר על הגודל של שטח לא רגולרי, משהו שכבר בגיל צעיר יש לנו 'תחושה' שלו.



השלכות על תוכנית הלימודים בהקשר הישראלי: מתיאוריה למעשה

בעקבות הדיון המחודש על הבסיסיות והראשוניות של תפיסת גודל רציף AMS לעומת גודל בדיד ANS, והאפשרות שמושג המספר מתבסס בעיקר על תהליך נרכש ולא על ידע מולד, עולה שוב שאלה ותיקה בחינוך מתמטי לגיל הרך: האם להתחיל ללמד מאריתמטיקה או מאלגברה? קראהר ועמיתיו (Carraher et al., 2006) מציינים במאמרם כי "יש הרבה סיבות לראות באלגברה מתקדמת יותר מאריתמטיקה, ולכן למקם אותה אחרי אריתמטיקה בתוכנית הלימודים במתמטיקה. אבל יש סיבות משכנעות יותר להציג אלגברה כחלק אינטגרלי של מתמטיקה מוקדמת". הם ממשיכים להזהיר "אם נתמקד יותר מדי בטבע הקונקרטי של אריתמטיקה, אנחנו מסתכנים בכך שנציע לתלמידים ראייה שטחית של מתמטיקה, ונרתיע את הנסיונות שלהם להכליל".

מעבר לכך, בסקירת הספרות שערכו קראהר ועמיתיו, שכללה התבוננות רחבה על קשיים נפוצים שתלמידים חווים במעבר מאריתמטיקה לאלגברה, ובהשוואה למקרים של רוסיה, שם תוכנית הלימודים התחילה באלגברה, מגיעים למסקנה שקשיים של תלמידים באלגברה עשויים לנבוע מהדרכים שבהן למדו אריתמטיקה ומתמטיקה יסודית, ושההפרדה בין אריתמטיקה ואלגברה גורמת למעבר חד בין הנושאים האלו. כלומר, מבחינת המורים והתלמידים כשמתחילים ללמוד אלגברה, אז האריתמטיקה "נגמרה". לעומת זאת, מחקרי הכיתה של הצוות של דוידוב שנסקרו באותו מאמר, אשר למדו בשיטת הוראה בייצוג אלגברי של בעיות מילוליות מכיתות א'-ד' הצליחו טוב יותר מעמיתיהם בתוכניות הלימוד המסורתיות גם בשנות הלימוד המאוחרות יותר.

התחלה עם אלגברה מקבלת חיזוק עקיף מראיות נוירו־קוגניטיביות כמו אלו שנסקרו במאמרם של ליבוביץ' ועמיתים מ־2017. אך ראיה אפילו ישירה יותר מוצאים במחקר שנערך בארה"ב בשנת 2004 (Schmittau & Morris, 2004), אשר שחזר בעצם את המחקר של דוידוב מ־1962. החוקרות תרגמו את תוכנית הלימודים של דוידוב לכיתות א'-ג' לאנגלית. תוכנית הלימודים הייתה ייחודית בכך שהיא כללה רצף של בעיות, ללא רמזים, פירוק לשלבים או הצגה דידקטית של החומר. המורים גם לא אישרו את נכונות הפתרונות. הילדים נדרשו להגיע למסקנות מתוך המתמטיקה עצמה, ולמדו לטעון את דעותיהם מבלי להפוך לווכחניים. בסיום שלוש השנים של התוכנית, ילדים אמריקאים הצליחו לנתח ולפתור בעיות באלגברה שבדרך כלל לא נתקלים בהן עד הכיתות התיכוניות בארה"ב, להשתמש בסימון אלגברי מתוחכם, ולעבוד עם יחסים בין כמויות ברמה תיאורטית. זהו רק מחקר אחד מיני רבים שהדגים את החוזק של שיטת לימוד שמבוססת על התחלה עם אלגברה במקום עם אריתמטיקה ומספרים (עוד מאמרים מוזכרים אצל Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006).

הבחנה חשובה בהקשר זה היא בין "קדם־אלגברה" (pre-algebra) לבין "תחילת לימודי האלגברה" (early algebra). בעוד שהמושג "תחילת לימודי האלגברה" מתייחס לשלבים מאוחרים יחסית בתוכנית הלימודים, לרוב בחטיבת הביניים, שבהם נלמדים פתרון משוואות פשוטות ושימוש במשתנים פורמליים - קדם־אלגברה היא גישה פדגוגית המשלבת אלמנטים של חשיבה אלגברית כבר בגיל הרך, דרך זיהוי דפוסים, שימוש ביחסים והבנה של שוויון, גם ללא סימון אלגברי (Kaput, 2008). גישה זו עולה בקנה אחד עם תיאוריות כמו זו של דוידוב ותואמת את עקרונות מערכת האומדן הרציפה (AMS), בכך שהיא מתמקדת בהבנה של יחסים בין גדלים ולא רק בחישוב תוצאות. מחקרים כמו אלו שתיארו קראהר ועמיתיו (2006), או השחזור שנערך בארה"ב לפי תוכנית דוידוב (Schmittau & Morris, 2004), מראים כי תלמידים שהחלו בלימוד מושגים אלגבריים בשלב מוקדם - דרך הבנה של יחסים, דפוסים ועקרונות - הגיעו להבנה מתמטית מעמיקה יותר גם בשלבים מאוחרים יותר של הלמידה.

אולם בהתחשב במורכבות השינוי התרבותי והחינוכי,



ברור שמעבר מיידי לגישת "קדם־אלגברה" אינו ריאלי. עם זאת, המחקר מלמד שאין צורך להתעכב עד שיקרה שינוי בתוכנית הלימודים להוספת הסוגיות הקשורות בקדם־אלגברה, אלא ניתן לטשטש את הגבול בין אלגברה לבין אריתמטיקה (Carraher, Schliemann, & Brizuela, 2006). נראה כי כבר בגיל הרך קיימת גם היכולת הקוגניטיבית, וקיימות גם ההזדמנויות להציג מושגים אלגבריים, ולטשטש את הגבול שבין אלגברה לבין אריתמטיקה. לכן במקום להניח שילדים לא יכולים ללמוד מושגים אלגבריים בגיל מוקדם, יש להתחיל בהדרגה ללמוד אלגברה כבר מגיל הגן. נוסף לכך כדאי להגביר את המודעות לכך, שתחושת הגדלים הרציפים וההבנה של היחסים ביניהם זמינים לילדים כבר מגיל מוקדם, ויכולים לשמש בסיס איתן לחשיבה אלגברית.

השינוי הנדרש מורכב מאוד, ומצריך הכשרה מעמיקה של גננות ומורים עבור כל שכבות הגיל. אולם הפוטנציאל לשיפור ניכר בהבנה המתמטית של הדור הבא, שכולנו שואפים אליו, עשוי בהחלט להצדיק את ההשקעה הזו.

לסיכום, אנו רוצים להציע שהוראה המגבילה את למידת הילדים בכיתה לבדיד, למספרי ולחיבורי, מצמצמת את חוויית הלומדים, הופכת את המעבר לרציף לקשה יותר. יתרה מזאת, היא נכשלת בשימוש במשאב חזק שכבר קיים אצל התלמידים, ושעליו מבוססת הלמידה המספרית שלהם. מחקרים נוספים, המשלבים פסיכולוגיה קוגניטיבית ומחקר חינוכי עם השתתפות פעילה ותרומה של מורים למתמטיקה בגיל הרך יאפשרו לנו לפתח את טענותינו. התובנות שיושגו ממאמץ כזה יכולות לסייע, הן לפסיכולוגים קוגניטיביים, המתעניינים באופן שבו מתפתחות יכולות מתמטיות, והן למחנכים המחפשים לשפר תוכניות לימודים במתמטיקה. אנו מקווים שסקירה זו תעורר השראה באחרים לשקול מחקר בכיוון זה, ותתרום לדיון פורה על תפקידם של גדלים רציפים בהוראת מתמטיקה.

רשימת מקורות:

- גביש, ת' (1999). אל תתנו להם בדידים. *מספר חזק*, *18*.
- Benson, I., Marriott, N., & McCandliss, B. D. (2022). Equational reasoning: A systematic review of the Cuisenaire–Gattegno approach. *Frontiers in Education*, *7*. https://doi.org/10.3389/feduc.2022.902899
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(2), 87–115.
- Clearfield, M., & Mix, K. (1999). Number versus contour length in infants' discrimination of small visual sets. *Psychological Science*, *10*(5), 408. https://doi.org/10.1111/1467-9280.00177
- Coles, A., & Sinclair, N. (2017). Re-thinking place value: From metaphor to metonym. *For the Learning of Mathematics, 2*, *37*, 3–8.
- Cotton, T. (2019). *Why do we count? Mathematics teaching blog*. https://mathematicsteachingblog.wordpress.com/2019/01/29/why-do-we-count/
- Davydov, V. V. (1962). An Experiment in Introducing Elements of Algebra in Elementary School. *Soviet Education*, *5*(1), 27–37. https://doi.org/10.2753/RES1060-9393050127
- De Bock, D. (2020). Georges Cuisenaire's numbers in colour. A teaching aid that survived the 1950s. In É. Barbin, K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, A. Karp, G. Moussard, J. Prytz, & G. Schubring (Eds.), *"DIG WHERE YOU STAND" 6. Proceedings of the Sixth International Conference on the History of Mathematics Education* (1st ed., pp. 355–368). WTM-Verlag Münster. https://doi.org/10.37626/GA9783959871686.0.27



- Izard, V. R., Sann, C., Spelke, E. S., & Streri, A. (2009). Newborn infants perceive abstract numbers. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *106*(25), 10382–10385. https://doi.org/10.1073/pnas.0812142106
- Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development, 8*(2), 237-256.
- Kaput, J. J. (2008). What Is Algebra? What Is Algebraic Reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M.L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5–17). Routledge.
- Lange, A. (2018). Lange, A. (2018). *The design of childhood: How the material world shapes independent kids*. Bloomsbury Publishing USA.
- Leibovich, T., & Henik, A. (2014). Comparing Performance in Discrete and Continuous Comparison Tasks. *Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *67*(5), 899–917. https://doi.org/10.1080/17470218.2013.837940
- Leibovich, T., Katzin, N., Harel, M., & Henik, A. (2017). From “sense of number” to “sense of magnitude”: The role of continuous magnitudes in numerical cognition. *Behavioral and Brain Sciences*, *40*, e164. https://doi.org/10.1017/S0140525X16000960
- Leibovich-Raveh, T., Stein, I., Henik, A., & Salti, M. (2018). Number and Continuous Magnitude Processing Depends on Task Goals and Numerosity Ratio. *Journal of Cognition*, *1*(1), 19. https://doi.org/10.5334/joc.22
- Lillard, A. S., & Stoll, A. (2006). Montessori: The science behind the genius. *Choice Reviews Online*, *43*(09), 43-5409-43–5409.
- de Hevia, M.-D., & Spelke, E. S. (2009). Spontaneous mapping of number and space in adults and young children. *Cognition*, *110*(2), 198–207. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2008.11.003
- Dehaene, S. (1997). *The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics* (S. Dehaene, Ed.). Oxford University Press.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, *20*(3–6), 487–506. https://doi.org/10.1080/02643290244000239
- Department of Education. (2021). *National curriculum in England: Mathematics programmes of study*. GOV.UK. https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study
- Devlin, K. J. (2011). *The man of numbers: Fibonacci’s arithmetic revolution*. Walker & Co.
- Gilmore, C., Cragg, L., Hogan, G., & Inglis, M. (2016). Congruency effects in dot comparison tasks: Convex hull is more important than dot area. *Journal of Cognitive Psychology*, *5911*(September), 923–931. https://doi.org/10.1080/20445911.2016.1221828
- Halberda, J., & Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the “Number Sense”: The Approximate Number System in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1457–1465. https://doi.org/10.1037/a0012682



- Vickery, T. R., & Smith, C. G. (1979). *The Back to Basics Curriculum as a Social Control Mechanism*. NY: Syracuse University, School of Education.
- Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). Multiple Cues for Quantification in Infancy: Is Number One of Them? *Psychological Bulletin*, *128*(2), 278–294. https://doi.org/10.1037/0033-2909.128.2.278
- Moyer, R. S., & Landauer, T. K. (1967). Time Required for Judgements of Numerical Inequality. *Nature*, *215*(5109), 1519–1520. https://doi.org/10.1038/2151519a0
- Negen, J., & Sarnecka, B. W. (2015). Is there really a link between exact-number knowledge and approximate number system acuity in young children? *The British Journal of Developmental Psychology*, *33*(1), 92–105. https://doi.org/10.1111/bjdp.12071
- Nesher, P. (1988). Beyond constructivism: Learning mathematics at school. *Proceedings of the 12th PME International Conference*, *1*, 54–74.
- Nieder, A. (2005). Counting on Neurons: The Neurobiology of Numerical Competence. *Nature Reviews. Neuroscience*, *6*(3), 177–190. https://doi.org/10.1038/nrn1626
- Ontario Ministry of Education. (2018). *Focusing on the fundamentals of math: A teachers' guide* (p. 8).
- Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 60–87.
- Szucs, D., Devine, A., Soltesz, F., Nobes, A., & Gabriel, F. (2013). Developmental dyscalculia is related to visuo-spatial memory and inhibition impairment. *Cortex*, *49*(10), 2674–2688. https://doi.org/10.1016/j.cortex.2013.06.007
- Venenciano, L., & Dougherty, B. (2014). Addressing priorities for lementary school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *34*(1), 18–24.