

משחקים מתמטיים

המשחק איקס עיגול

ד"ר סבינה סגרה
המכללה האקדמית אחוה
המכללה האקדמית חמדת

המשחק איקס-עיגול

סבינה סגרה

מבוא

מי לא מכיר את המשחק איקס-עיגול? המשחק זוכה לפופולריות רבה, כיוון שגם הכללים וגם הציוד הנדרשים פשוטים. ניתן לשחק בו בעיפרון ודף נייר, באצבעות על החול, ולעיתים אף מצויים מתקנים בגני השעשועים שמזמינים לשחק (ראו איור 1).

לפי כללי המשחק, אחד היריבים בוחר בסימן "האיקס" (X) והשני ב־"עיגול" (O). לוח המשחק הוא טבלה של 3×3 משבצות. השחקנים משחקים לסירוגין, וכל אחד מסמן בתורו את אחד התאים הפנויים בסימנו. המנצח הוא הראשון שמשלים שורה, עמודה או אלכסון של שלושה תאים (איור 2). "איקס־עיגול" הוא משחק אסטרטגי. זאת אומרת, ששני שחקנים (או יותר) בוחרים פעולות מתוך מספר אפשרויות, והתוצאה או ההצלחה של כל שחקן תלויה גם בבחירה שלו וגם בבחירות של השחקנים האחרים. לכן על כל שחקן לחשוב לא רק על בחירת הצעד שלו, אלא גם של השחקן השני.

למען הפשטות (אך ללא הגבלת הכלליות), נניח כאן ובהמשך שהשחקן הראשון מסמן באיקס, והשני בעיגול - בהתאם לסדר המילים בשם המשחק. מדובר במשחק בעל 'מידע מלא' (Mendelson, 2016), שכן שני היריבים רואים את לוח המשחק במלואו, ואין בו פרטים נסתרים (כמו קלפים הפוכים במשחק "מלחמה"). נוסף לכך, זהו משחק ללא גורם אקראי, כגון קוביות. במונחים מתמטיים, "איקס־עיגול" הוא משחק חסר תועלת, כיוון שהוא תמיד יסתיים בתיקו אם איש משני השחקנים לא יטעה. אבל מאחר שבני אדם אינם מושלמים - והם נוטים לטעות - המשחק מעניין, ולעיתים אף מפתיע. הוא ממש לא משעמם. השאלה אם המשחק "הוגן" תלויה בהגדרה של הוגנות. אם הכוונה היא שלשני השחקנים יש סיכויים שווים לנצח, אז לא בדיוק: השחקן הראשון (X) תמיד יכול להבטיח לפחות תיקו, ואם השחקן השני טועה - לנצח. לכן ישנו יתרון ברור לשחקן הראשון, כפי שנראה בהמשך.

למידה דרך משחק

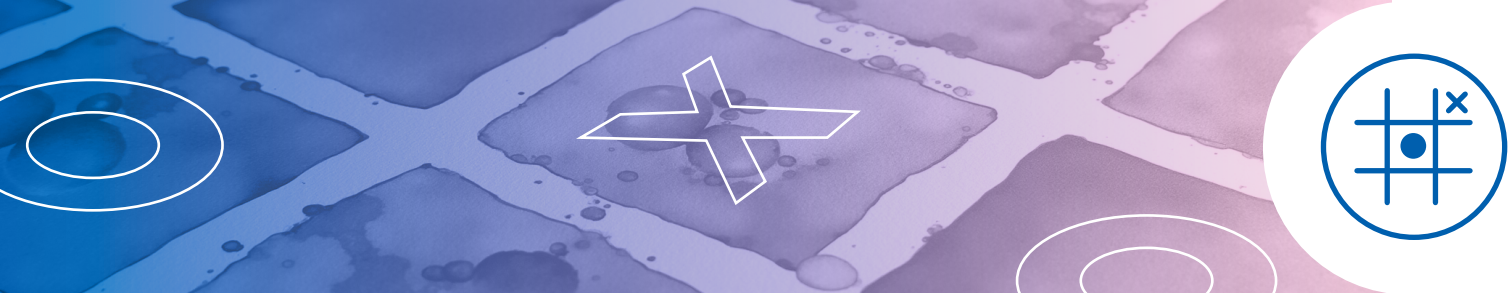
כדאי שמורים בבית הספר היסודי יכירו את המשחק "איקס-עיגול" לעומק, משום שהוא דוגמה מצוינת לפעילות פשוטה ומהנה, שדרכה ניתן לפתח כישורים מתמטיים ולוגיים כבר מגיל צעיר. המשחק מזמן שיח מתמטי טבעי סביב מושגים כמו תכנון מהלכים, דפוסים, סימטריה, חשיבה אסטרטגית והסקת מסקנות. הוא מתאים במיוחד לסביבות לימודיות שבהן רצוי לעודד תלמידים לחשוב קדימה, לשער השערות וללמוד מניסיון - והכול בצורה ידידותית, מוכרת וללא צורך באביזרים מיוחדים. יתרה מכך, המשחק מזמין את התלמידים לגלות בכוחות עצמם עקרונות מתמטיים בסיסיים מתוך התנסות, ולא דרך הסבר מופשט. עבור המורה זוהי הזדמנות מעולה ליצור מרחב של סקרנות, שיתוף וחקירה מתמטית (Clarkson, 2008).

איור 1:

מתקן איקס-עיגול בגן שעשועים.

צילום מאת דוד שי, שיתוף דרך ויקימדיה קומונס CC BY-SA 3.0.

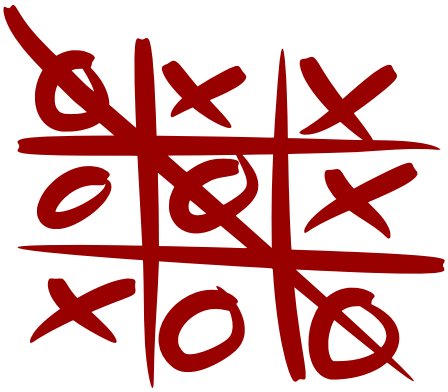




איור 2:

משחק שבו ניצח השחקן שמסמן עיגולים

מקור: Joeytje50, CC BY 4.0, via Wikimedia Commons



המתמטיקה שברקע המשחק

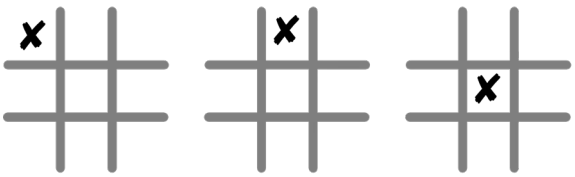
כיוון שלוח המשחק אינו גדול במיוחד המשחק איקס-עיגול מתאים להדגמה של ניתוח אסטרטגיות משחק. נפתח בשאלה: בכמה דרכים שונות יכול המשחק להתפתח עד למהלך החמישי? (זהו מספר המהלכים המינימלי שיכול להוביל לניצחון). התשובה היא $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15{,}120$. זאת כיוון שבמהלך הראשון ניתן לבחור אחת מתוך 9 משבצות, במהלך השני אחת מתוך 8, וכן הלאה. כיוון שכל אחת מתשע האפשרויות למהלך הראשון יכולה להתפתח לשמונה אפשרויות שונות למהלך השני, וכן הלאה, אנו כופלים את המספרים זה בזה. מספר זה אומנם גדול - וגדול מדי לניתוח ישיר של אסטרטגיות משחק. לכן נשאל בשלב זה: בכמה דרכים שונות, באופן ניכר, ניתן לפתוח את המשחק? שני מצבים של פתיחת משחק ייחשבו שקולים אם ניתן להגיע מאחד לשני על ידי סיבוב (בכפולות של 90 מעלות) או שיקוף של הלוח. כלומר, הם לא ייחשבו שונים באופן ניכר (Averbach & Chein, 2000). לדוגמה: אם השחקן הראשון מסמן איקס באחת מפינות הלוח, אין זה משנה באיזו פינה משום שניתן לסובב את הלוח כך שיתקבל אותו מצב. בנספח א' תמצאו תרגילים בנושא. ניתן להציע לתלמידים מראות קטנות ומספריים לגזור את לוחות המשחק, כדי להקל עליהם יותר לבדוק את הסימטריות. צורה, תבנית, או - במקרה שלנו - מצב לוח במשחק איקס-עיגול נחשבים סימטריים אם קיימת טרנספורמציה גאומטרית, כמו שיקוף או סיבוב, שמחזירה את המצב על עצמו.

מכאן נובע שניתן **לפתוח** את המשחק בשלושה אופנים שונים בלבד (איור 3):

1. סימון באחת הפינות
2. סימון באחד התאים שאינו מרכזי ואינו פינתי
3. סימון במרכז הלוח

איור 3:

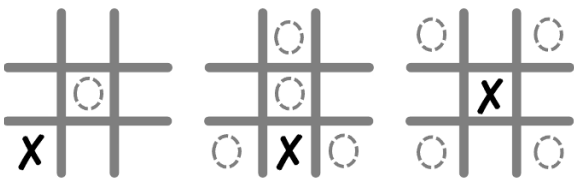
שלוש האפשרויות של פתיחת המשחק



באיור 4 ניתן לראות כיצד כדאי להגיב לכל אחת מפתיחות המשחק הללו.

איור 4:

העיגולים המקווקווים מתארים אילו תאים כדאי לסמן במהלך השני

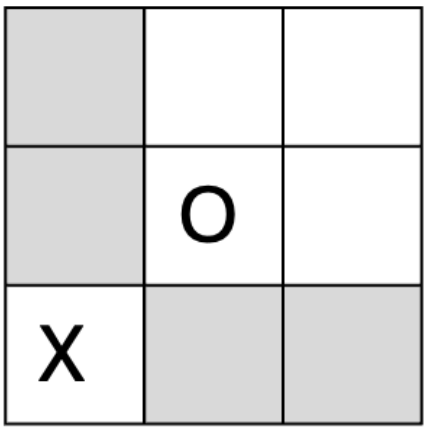


אם השחקן השני יגיב כפי שמתואר באיור 4, ואיש מבין השחקנים לא יטעה בהמשך המשחק, אזי יסתיים המשחק בתיקו (Gardner, 1988). אפשר לחשוב על התמונה הראשונה והאחרונה כמצבים הפוכים מבחינה אסטרטגית: אם השחקן הראשון בוחר פינה, השחקן השני מגיב במרכז; אם הוא בוחר מרכז, התגובה האופטימלית היא פינה. לדוגמה: אם

השחקן הראשון סימן תא בפינה, והשחקן השני סימן את המרכז, אזי על השחקן הראשון לבחור באחד מהתאים הריקים שבשורה, או בעמודה של האיקס הראשון שלו, כך שיהיו לו שני איקסים באותה שורה, או באותה עמודה (איור 5). לאחר מכן, השחקן השני יסמן את התא השלישי הפנוי באותה שורה או עמודה – כדי לחסום. ומכאן ואילך, עד סוף המשחק, כל שחקן יבחר בתורו תא ריק בשורה או בעמודה שבה יריבו כבר סימן אחד או שני תאים, ללא סיכוי להשלים רצף של שלושה תאים.

איור 5:

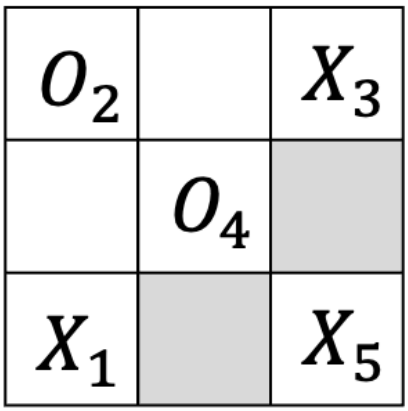
במהלך הבא השחקן הראשון (X) יצטרך לבחור באחד מהתאים האפורים



לעומת זאת - אם השחקן השני *לא* יבחר באחד מהתאים המסומנים בעיגולים המקווקווים, השחקן הראשון יכול לנצח אם לא יטעה בהמשך המשחק.
לדוגמה: אם השחקן הראשון בחר בפינה, ויריבו בחר בפינה שבאותה השורה, או באותה העמודה, כדאי לשחקן הראשון לסמן בהמשך את התא הפינתי שעל אותו האלכסון עם האיקס הראשון שלו. בהמשך, יריבו חייב לחסום אותו במרכז הלוח. השחקן הראשון (X) יבחר בתא הפינתי האחרון שעדיין פנוי, ויצר עם זאת מלכודת, כי יריבו (O) יוכל לחסום אותו רק באחד משני התאים האפורים כמתואר באיור 6.

איור 6:

השחקן הראשון (X) יכול לנצח, כיוון שהשחקן השני (O) יכול לחסום אותו רק באחד משני התאים האפורים. המספרים הקטנים מציינים את סדר המהלכים שהובילו למצב זה בלוח המשחק.



באופן כללי, אם השחקן השני לא יבחר באחד מהתאים המסומנים בעיגולים מקווקווים (איור 4), השחקן הראשון יוכל בהמשך המשחק לבנות "מלכודת". אז מהי מלכודת?

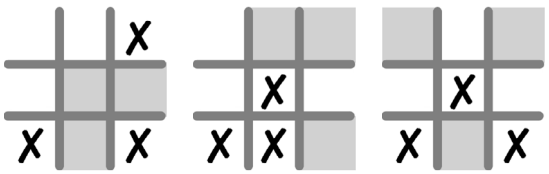
מלכודות

מלכודת במשחק איקס-עיגול היא מצב שבו לשחקן אחד יש שתי אפשרויות שונות להשלמת רצף של שלושה מסימניו - באותה שורה, באותו טור או באותו אלכסון - כך שהיריב יכול לחסום רק אחת מהן (ראו איור 7). מלכודות כאלה מזכירות משולשים, שכן אפשר לתפוס את שלושת סימני האיקס שבבסיס המלכודת כשלושת קודקודיו של משולש. סביבם ישנם תאים הצבועים באפור, ובהם היריב יכול לנסות לחסום את השלמת הרצף. אם היריב לא יבלום את בניית המלכודת מייד אחרי האיקס הראשון - כלומר, לא יסמן אחד מתאי המלכודת בעיגול - הוא ייקלע למצב בעייתי. אם הוא מסמן תא שצבוע באפור רק לאחר הופעת האיקס השני, יישארו אחרי המהלך השלישי של השחקן הראשון שני תאים פתוחים

צבועים באפור. כעת יהיו על הלוח שתי שלשות כמעט שלמות של איקסים, שכל אחת מהן חסרה רק תא אחד, ומאחר שהיריב לא יוכל לחסום את שתיהן במהלך אחד הוא יפסיד.

איור 7:

אם היריב (O) הצליח לסמן עד כה רק אחד מתוך שלושת התאים האפורים, השחקן שבנה את המלכודת (X) ינצח במהלך הבא, כיוון שנותרו לו שתי אפשרויות להשלמת רצף של שלושה מסימניו.
כמובן, קיימות מלכודות שקולות, שנוצרות על ידי סיבוב או שיקוף של לוח המשחק.



בפתיחה פינתית (התמונה השמאלית באיור 3) סימון התא המרכזי יבלום את כל המלכודות האפשריות (ראו גם את כל האפשרויות של בניית מלכודת בנספח ג').
בפתיחה במרכזה של שורה חיצונית, כל התאים המסומנים בעיגולים מקווקווים באיור 4 עלולים לחסום בניית מלכודת (ראו גם את כל האפשרויות של בניית מלכודת בנספח ד').
במקרה של פתיחה במרכז הלוח, היריב השני (שמסמן עיגול) לא יוכל לחסום את כל האפשרויות לבניית מלכודת כבר במהלך הראשון (נספח ה'). עם זאת, אם יבחר לסמן עיגול באחת הפינות, הוא יוכל בהמשך למנוע בנייה של מלכודות נוספות, ובאותו מהלך גם להציב עיגול נוסף, כך ששני עיגולים יימצאו ברצף אחד עם תא ריק ביניהם. מצב זה ידרוש מהשחקן הראשון (שמסמן באיקס) להגיב כדי למנוע הפסד בְּמָקום להמשיך בבניית המלכודת.
נשאלת השאלה: כיצד כדאי לפתוח את המשחק? האם יש הבדל בין שלוש דרכי הפתיחה שצוינו למעלה (איור 3)? ובכן, בהנחה שהיריב אינו מושלם ועלול לטעות, כדאי לפתוח עם איקס באחת הפינות. כפי שניתן לראות באיור 4, קיימת רק דרך אחת להגיב לפתיחה זו באופן נכון - באמצעות סימון התא המרכזי. בשבעת המקרים האחרים ינצח השחקן הראשון. כלומר, אם היריב יבחר את המהלך שלו באופן אקראי, הסיכוי שיטעה הוא שבע מתוך שמונה.
עם קצת אימון, מורים יכולים ללמוד את פתיחות המשחק המומלצות ואת דרכי התגובה המתאימות, כך שיוכלו להבטיח לתלמידים שהם - המורים - לא יפסידו לעולם. דבר זה יוצר אתגר מהנה לתלמידים, שמעודד אותם לשחק, לחשוב ולהבין את מהלכי המשחק לעומק. בנספח ב' תמצאו תרגילים בנושא.

משחקים שרק נראים שונים

המשחק 3 ל־15

המשחק 3 ל־15 הוא משחק איקס-עיגול "בתחפושת" (Albert, Nowakowski, & Wolfe, 2019): שני שחקנים בוחרים לסירוגין באחד המספרים מ־1 עד 9. כל אחד מהמספרים יכול להיבחר פעם אחת בלבד. כל שחקן בתורו רושם בצבע שבחר מראש את המספר שבו בחר (כדי לזכור בסוף המשחק מי רשם איזה מספר). מי שמצליח לרשום שלושה מספרים שבהם הוא בחר (כלומר בצבע שלו) שמסתכמים ל־15, מנצח. באנגלית המשחק נקרא גם "סקראבל מספרי" (Number Scrabble). בדומה לאיקס-עיגול יסתיים משחק זה בתיקו אם איש משני השחקנים לא יטעה.
ברצף המספרים הבא ניתן לראות משחק שהסתיים בתיקו: 4, 5, 8, 3, 7, 9, 1, 6, 2. ייתכן שהשחקנים לא ירשמו את המספרים האחרונים 6 ו־2, כי כבר ברור שהמשחק הסתיים בתיקו. המספר 6 לא ישלים ל־15 שום זוג מספרים הצבועים בכחול, והמספר 2 לא ישלים ל־15 שום זוג של מספרים הצבועים באדום.
כדי להצליח במשחק זה בקלות (כלומר כדי לא להפסיד או כדי לנצח בתקווה שהיריב יטעה) כדאי לדמיין ריבוע קסם בגודל 3×3, שבו המספרים בכל שורה, עמודה ואלכסון מסתכמים ל־15. בכל מהלך יש לבחור במספר שנמצא בתא שבו היינו בוחרים אילו היינו משחקים איקס-עיגול. כדי להבין זאת טוב יותר, כדאי להשוות בין רצף המספרים הנ"ל לבין ריבוע הקסם באיור 8.

לעומת הדוגמה הקודמת, ניתן לראות ברצף המספרים הבא 4, 2, 6, 5, 8, 1, 3 משחק שבו השחקן הראשון ניצח, כיוון שהמספרים (האדומים) 4, 8 ו־3 מסתכמים ל־15 (איור 9). הטעות של השחקן השני: לפי האסטרטגיה שמופיעה באיור 4, ובהשוואה עם ריבוע הקסם באיור 8, השחקן השני היה צריך לבחור במספר שמופיע במרכזו של ריבוע הקסם, כלומר ב־5. כיוון שהוא לא עשה זאת, השחקן הראשון הצליח לבנות מלכודת עם הוספת המספרים 6 ו־8. אחרי שהשחקן הראשון רשם 4, 6 ו־8, היו לו שתי אפשרויות להשלמת שלשה שמסתכמת ל־15: הוספת המספר 1 (8+6+1) או 3 (8+4+3), כאשר השחקן השני היה יכול לחסום רק אחת משתיהן.

איור 8:

משחק 3 ל־15 שהסתיים בתיקו. המספרים הקטנים מציינים את סדר המהלכים.

2	7 5	6 8
9 6	5 2	1 7
4 1	3 4	8 3

איור 9:

משחק 3 ל־15, שבו השחקן הראשון (באדום) ניצח. המספרים הקטנים מציינים את סדר המהלכים.

2 2		6 3
	5 4	1 6
4 1	3 7	8 5

כעת ניתן להבין מדוע המשחק נקרא גם "איקס-עיגול בתחפושת". ניתן להמיר כל מצב של המשחק "איקס-עיגול" למצב של המשחק "3 ל־15" על־ידי החלפת הסימן (איקס או עיגול) במספר שנמצא במקום המתאים בריבוע קסם, וכל מצב במשחק "3 ל־15" ללוח איקס-עיגול, על־ידי החלפת המספר בסימן איקס או עיגול (לפי מספר השחקן) באותו המקום, שבו נמצא המספר בריבוע הקסם.

איקס-עיגול מילולי

כדי להכין משחק איקס-עיגול מילולי יש לבחור בשמונה אותיות ובתשע מילים, כך שכל אחת משמונה האותיות מופיעה בשלוש מילים בדיוק. לדוגמה: ברשימת המילים "בית", "ברק", "בוהו", "אתן", "וראי", "אלה", "תלו", "רעל", ו"ליה" מופיעות האותיות "א", "ב", "ה", "ו", "י", "ל", "ר", ו־"ת" בשלוש מילים בדיוק. אין זה חשוב שמופיעות אותיות נוספות, או שהאות "ו" מופיעה פעמיים במילה "בוהו". השחקנים בוחרים לסירוגין באחת מהמילים. אין לבחור פעמיים באותה המילה. כדי לוודא זאת, ניתן למחוק את המילים שנבחרו, או להשתמש בקלפים שעליהם רשומות המילים ולהניח את הקלפים הנבחרים בצד. הראשון שמצליח לבחור בשלוש מילים בעלות אות משותפת הוא המנצח. ניתן להבין שמדובר במשחק שקול למשחק "איקס-עיגול", כאשר מארגנים את המילים בטבלה במבנה 3×3 (איור 10). בכל מצב של המשחק "איקס-עיגול" ניתן להתאים בין כל אחד מהסימנים איקס ועיגול לבין המילה שנמצאת באותו המקום בטבלה, ועבור כל מילה שנבחרה במהלך מסוים, ניתן לסמן במקומה בטבלה איקס או עיגול לפי מספר השחקן.

איור 10:

ארגון המילים של המשחק "איקס-עיגול מילולי" בטבלה.

↖	↓ ב	↓ א	↓ ל
← ת	בית	אתן	תלו
← ר	ברק	וראי	רעל
← ה	בוהו	אלה	ליה
↖			

הכללות

הכללה טבעית היא לשחק איקס-עיגול בשלושה ממדים, כלומר במתקן או קובייה עם 27 תאים (איור 11).

מעניין לדעת, שבמקרה זה אין מצבי תיקו. ההוכחה היא בסתירה: נניח בשלב ראשון שיש מצב תיקו, ננסה "לבנות אותו" ונראה שאין אפשרות לשייך את התא המרכזי של הקובייה לאחד משני היריבים בלי ליצור בדרך זו רצף של שלושה סימנים (Tic-tac-toe game on the cube 3×3×3, 2018).

בגרסה התלת־ממדית השחקן הראשון ינצח, אם יבחר בצעד הראשון את מרכז הקובייה, ואם הוא לא יטעה בהמשך המשחק. אם מבטלים את האפשרות לסמן את מרכז הקובייה במהלך הראשון, ינצח השחקן השני. אם מבטלים את השימוש בתא המרכזי לאורך כל המשחק, ינצח שוב השחקן הראשון.

עוד על משחקי "איקס-עיגול" מיוחדים ניתן למצוא בכתבה מאת אבי סאייג (2013).

איור 11:

איקס-עיגול תלת־ממד

מקור: Eliran t, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons



קווארטו!

את משחק ה"קווארטו!" משחקים על לוח במבנה 4×4. ישנן 16 אבני משחק, ולכל אבן ארבע תכונות: כל אבן יכולה להיות גבוהה או נמוכה, בהירה או כהה, חלולה או מלאה, עגולה או מרובעת. כל אחת מהאבנים היא שילוב ייחודי של התכונות הללו (איור 12). במהלך המשחק היריבים מניחים לסירוגין אבנים על הלוח. המטרה היא ליצור שורה, טור או אלכסון שבהם כל ארבע האבנים חולקות תכונה משותפת (למשל: כולן בהירות, ראו איור 13). במובן זה, "קווארטו!" היא הכללה של המשחק "איקס-עיגול".

הטוויסט: בכל תור, כל שחקן מקבל מהיריב את האבן שהוא נדרש להניח על הלוח.

המשחק עדיין לא נחקר באופן מלא מבחינה מתמטית. ככל הנראה מדובר במשחק הוגן, שיסתיים בתיקו אם שני היריבים ישחקו באופן אופטימלי (Goossens, 2000).

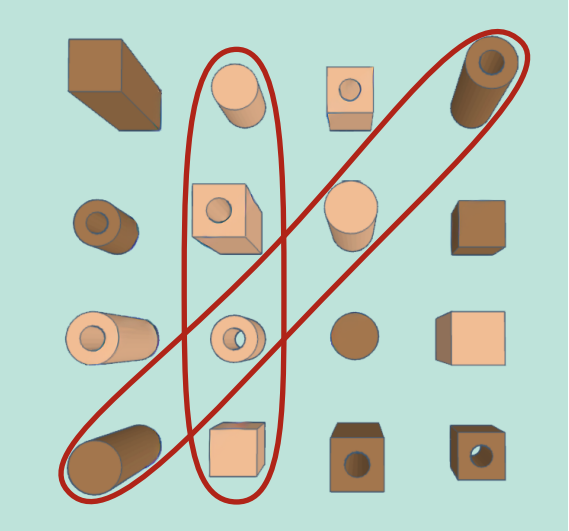
איור 12:

המשחק קווארטו במצב התחלתי.

צילום: עמנואל גיל ושיתוף דרך "ויקיפדיה קומונס" CC BY-SA 3.0.



איור 13:
לוח "קוואַרטו!" שבו הצליח השחקן האחרון ליצור טור שבו כל האבנים בהירות, ואלכסון שבו כל האבנים עגולות



קישורים

- משחק איקס-עיגול אונליין, אינטראקטיבי: https://g.co/kgs/8mtEY3R
- משחק "קוואַרטו!" אונליין, אינטראקטיבי (באנגלית): http://quarto.freehostia.com/en/

ביבליוגרפיה

- סאייג, א'. (2013). *משחקי איקס-עיגול מיוחדים*. אוחזר מתוך דוידסון אונליין: משחקי-איקס-עיגול-מיוחדים. נדלה מ- https://davidson.org.il/read-experience/scienceathome/משחקי-איקס-עיגול-מיוחדים/
- Albert, M. H., Nowakowski, R. J., & Wolfe, D. (2019). Change the Game. In M. H. Albert, R. J. Nowakowski, & D. Wolfe, *Lessons in Play* (p. 20). Boca Raton: CRC Press.
- Averbach, B., & Chein, O. (2000). Symmetry as a limiting factor. In B. Averbach, & O. Chein, *Problem Solving Through Recreational Mathematics* (pp. 234-238). Mineola, New York: Dover Publications.
- Clarkson, P. C. (2008). Exploring the Possibilities of Using Tic-Tac-Toe to Think and Communicate about Mathematics. *Australian Mathematics Teacher*, *64*(2), 28 - 33.
- Gardner, M. (1988). Ticktacktoe. In M. Gardner, *Hexaflexagons and other Mathematical Diversion* (pp. 37-46). Chicago and London: The University of Chicago Press.
- Goossens, L. (2000). *Quarto*. Retrieved from Internet Archive Way Back Machine: https://web.archive.org/web/20041012023358/http://ssel.vub.ac.be/Members/LucGoossens/quarto/quartotext.htm
- Mendelson, E. (2016). *Introducing Game Theory and its Applications*. Bocca Raton: CRC Press.
- *Tic-tac-toe game on the cube 3×3×3*. (2018). Retrieved from Mathematics Stack Exchange https://math.stackexchange.com/questions/2784654/tic-tac-toe-game-on-the-cube-3x3x3

נספח א' - דף עבודה בנושא "לוחות משחק שקולים"

לפניכם שמונה מצבים מתוך משחק "איקס-עיגול". כל שני מצבים שקולים זה לזה אם ניתן להפוך את האחד לשני על ידי סיבובים או שיקופים של לוח המשחק.
סמנו את הזוגות השקולים, והסבירו אילו פעולות סימטריה מחברות ביניהם.

X	O	
	O	
O	X	X

X	O	
O	X	
	X	

	O	X
O	X	O
	X	

O	X	
X	X	O
	O	

O	X	O
O	X	X
O	X	X

O	X	O
X	X	O
O	X	X

X	O	
	O	
O	X	X

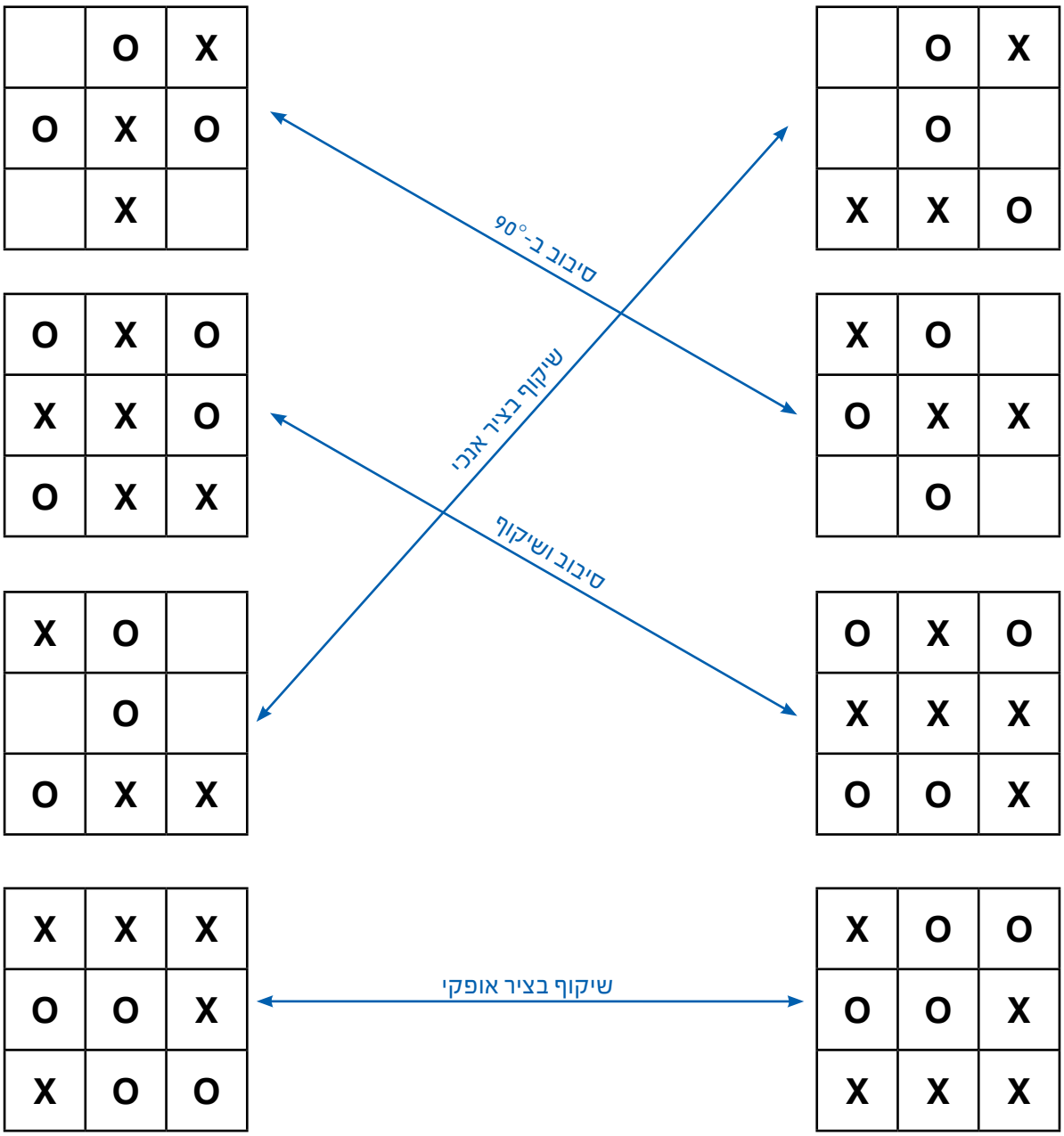
X	O	
	O	
X	X	O

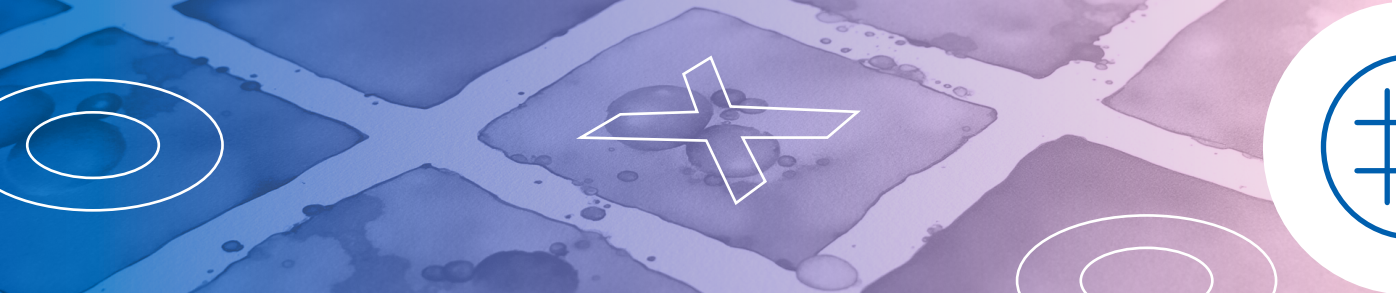
O	O	X
X	O	O
X	X	X

X	X	X
X	O	O
O	O	X

נספח א' - פתרונות לדף העבודה בנושא "לוחות משחק שקולים"

לפניכם שמונה מצבים מתוך משחק "איקס-עיגול". כל שני מצבים שקולים זה לזה אם ניתן להפוך את האחד לשני על ידי סיבובים או שיקופים של לוח המשחק.
סמנו את הזוגות השקולים, והסבירו אילו פעולות סימטריה מחברות ביניהם.





נספח ב'

אחרי הפתיחות הבאות של המשחק "איקס-עיגול" אפשר כבר לקבוע למי יש סיכוי לנצח, או אם המשחק יסתיים בתיקו.
סמנו מה לדעתכם יקרה, והסבירו - אם השחקן השני מפסיד - מה הוא היה יכול לעשות כדי להימנע מההפסד.

1.

	O	
X		

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

2.

X		O

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

3.

	O	
	X	

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

4.

	X	O

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

נספח ב' - פתרונות

1.

X_9	O_6	X_3
X_5	O_2	O_4
O_8	X_7	X_1

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[X] תיקו

השחקן השני מיקם את העיגול הראשון שלו לפי האסטרטגיה שמתוארת באיור 4. המספרים הקטנים מתארים מהלך משחק אפשרי.

2.

X_3		X_5
	O_4	
O_2		X_1

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[X] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

המספור מתאר מהלך משחק אפשרי. היריב השני יכול לחסום את היריב הראשון רק באחד משני התאים האפורים.

3.

O_4	O_2	X_5
	X_1	
		X_3

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[X] היריב הראשון ינצח

[ ] היריב השני ינצח

[ ] תיקו

המספור מתאר מהלך משחק אפשרי. היריב השני יכול לחסום את היריב הראשון רק באחד משני התאים האפורים.

4.

O_6	X_3	X_5
X_9	O_4	O_8
O_2	X_1	X_7

יריב ראשון: X

יריב שני: O

[ ] היריב הראשון ינצח

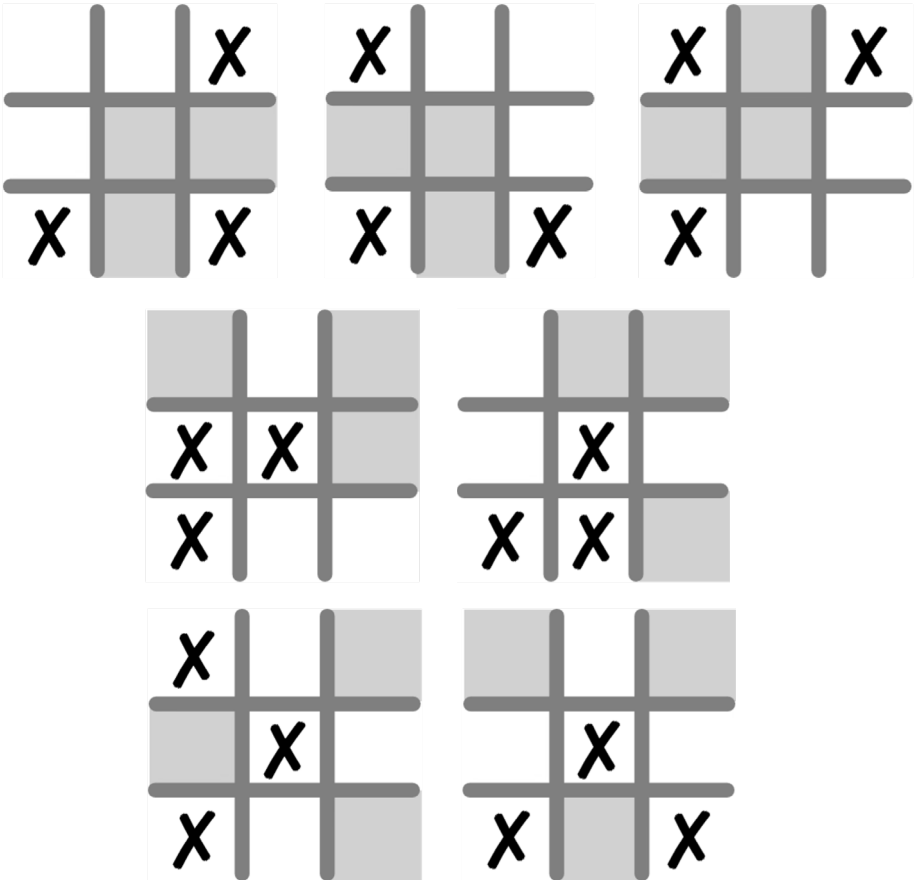
[ ] היריב השני ינצח

[X] תיקו

השחקן השני מיקם את העיגול הראשון שלו לפי האסטרטגיה שמתוארת באיור 4. המספרים הקטנים מתארים מהלך משחק אפשרי.

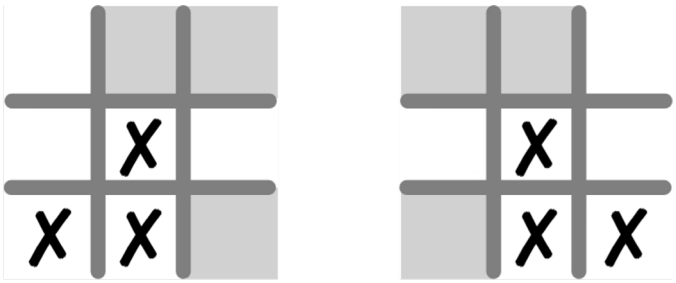
נספח ג'

מלכודות אפשריות כאשר הפתיחה מתבצעת מהפינה השמאלית התחתונה.
קיימות מלכודות שקולות כאשר הפתיחה מתבצעת מאחת הפינות האחרות.



נספח ד'

מלכודות אפשריות כאשר הפתיחה מתבצעת במרכז השורה התחתונה.
קיימות מלכודות שקולות כאשר הפתיחה מתבצעת מאחת הפינות האחרות.



נספח ה'

מלכודות אפשריות כאשר הפתיחה מתבצעת במרכז הלוח.
קיימות מלכודות שקולות כאשר הפתיחה מתבצעת מאחת הפינות האחרות.

