

תולדות המתמטיקה

על בסיסים, סימנים ומספרים: מסע בין חמש שיטות כתיבה של מספרים טבעיים ואפס

פרופ' עטרה שריקי

מכללת סמינר הקיבוצים

מיזם TomorrowKidz



על בסיסים, סימנים ומספרים: מסע בין חמש שיטות כתיבה של מספרים טבעיים ואפס

עטרה שריקי

תקציר

המאמר עוסק בשיטות כתיבה של מספרים בתרבויות עתיקות - מצרים, מאיה, סין ורומא, ומציג את המאפיינים והעקרונות של כל שיטה, והשוואה ביניהן לבין השיטה העשרונית הנהוגה כיום. כמו כן, נדונה החשיבות הפדגוגית של חשיפת תלמידים לשיטות השונות, ובפרט הקשר שיש לכך לפיתוח חשיבה גמישה והבנת המושג "מספר".

מבוא

הדרך שבה אנחנו כותבים כיום מספרים היא רק אחת מתוך מגוון שיטות שפיתחו תרבויות שונות לאורך ההיסטוריה. במאמר "תולדות המתמטיקה - מבוא" תוכלו לקרוא על הסימנים הראשונים המעידים על ניסיונות ספירה. בהמשכו מופיע מידע על אסימוני החרס במסופוטמיה, שהובילו בהדרגה לרעיון של ייצוג מספרים באמצעות סמלים כתובים.

במאמר זה נציג שיטות כתיבה מארבע תרבויות עתיקות: מצרים, המאיה, סין ורומא. כל אחת מהן מציעה תפיסה שונה של מספר, סימן וערך. נבחן את העקרונות של כל שיטה, ובתוך כך נערוך השוואה ביניהן לבין שיטת הכתיבה המוכרת לנו כיום.

היכרות עם שיטות כתיבה שונות תורמת להבנה של מושג המספר, מפתחת גמישות מחשבתית, ומאפשרת לתלמידים לראות את המתמטיקה לא רק ככלי טכני, אלא גם כיצירה אנושית-תרבותית מרובת פנים. כמורים, תוכלו לשלב בכיתה פעילויות מעשיות כמו תרגום מספרים משיטת כתיבה אחת לאחרת, או משימות שבהן התלמידים פותרים בעיות באמצעות הסימנים של תרבות עתיקה - התנסויות המעוררות דיון על היתרונות והחסרונות של כל שיטה.

שיטת הכתיבה העשרונית הפוזיציונלית

שיטת ספירה היא אמצעי להצגת מספרים בעזרת קבוצה כלשהי של סימנים הנקראים "ספרות". השיטה הנפוצה ביותר כיום לכתיבת מספרים היא השיטה העשרונית הפוזיציונלית (מיקומית), המבוססת על העקרונות הבאים:

- בסיס הספירה הוא 10. כלומר, הקבוצה מכילה עשרה סימנים, עשר ספרות שונות שבעזרתן ניתן לכתוב כל מספר. הסימנים הם: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- המשמעות של עיקרון ערך המקום היא שהערך של כל ספרה במספר תלוי במיקומה. כל מיקום, מימין לשמאל, מייצג חזקה עולה של 10: אחדות (10^0), עשרות (10^1), מאות (10^2), אלפים (10^3), וכן הלאה. כל מספר נכתב כסכום של הספרות כפול החזקה המתאימה של 10. לדוגמה, משמעות המספר 7,509 היא:

$$7{,}509=7\times1000+5\times100+0\times10+9\times1=7\times10^3+5\times10^2+0\times10^1+9\times10^0$$

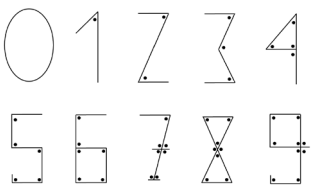
מכיוון ששיטת הכתיבה העשרונית היא פוזיציונלית, אפשר לכתוב מספרים גדולים או קטנים, כרצוננו, בהתאם למספר הספרות הרצוי.

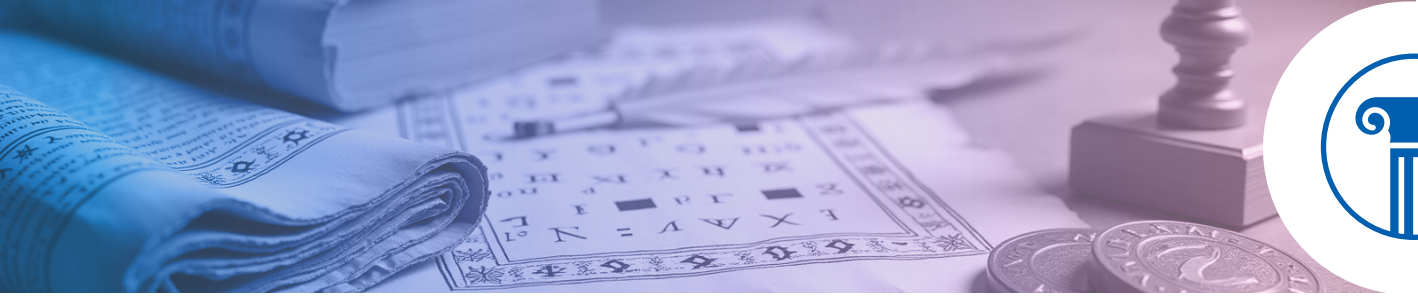
הרחבה על שיטת הכתיבה העשרונית הפוזיציונלית אפשר למצוא בגיליון אוגוסט, 2011.

מי המציא את סימני הספרות?

במשך שנים רבות חשבו, בטעות, שהספרות המוכרות לנו הן "ספרות ערביות". בצפון אפריקה נהגו לספר שהן הומצאו על ידי יצרני זכוכית מקומיים, אשר קבעו את צורתן, כך שמספר הזוויות של כל ספרה תואם את הערך המספרי שלה (ראו איור 1):

איור 1.





אבל בדיקה מדוקדקת מגלה שהשיטה הזאת איננה עקבית. לדוגמה, בספרה 9 האריכו את הקטע ה"אמצעי" כדי להוסיף שתי זוויות, בעוד שבמקרה של הספרה 4 נמנעו מכך, מה שמערער את הטיעון בנוגע לקשר שבין צורתה של הספרה לבין מספר הזוויות שיש בסמל שלה. וחשוב מכך: בכתבים הערביים אין כל עדות לעיצוב הזה של סמלי הספרות (שריקי, 2024).

היום החוקרים מסכימים שהמתמטיקאים ההודים הם שהמציאו את סימני הספרות, אף כי לא ברור מדוע בחרו דווקא בצורות אלה. הסיבה לסברה השגויה בנוגע למוצאם של סמלי הספרות היא העובדה שהם הגיעו לארצות מערב אירופה בסוף המאה העשירית לספירה דרך ארצות ערב. כיום הספרות הללו נקראות בשם "ספרות הודו־ערביות" (Ifrah, 2000).

כתיבת מספרים במצרים העתיקה

הציוויליזציה המצרית התקיימה כבר לפני יותר מששת אלפים שנה. מאחר שמרבית השטח של מצרים מדברי, רוב האוכלוסייה התרכזה אז (וגם כיום) באזורים הירוקים שסביב הנילוס, שבהם אפשר לעבד את האדמה.

החקלאים למדו לבנות מערכת השקיה מפותחת, ובעזרת מימיו המתוקים של הנילוס הצליחו לגדל יבול רב. המדבריות המקיפים את מצרים היו מחסום טבעי מפני אויבים ופולשים חיצוניים, והשקט ששרר באזור אִפשר לחברה המקומית להתפתח במהירות. בזכות כל אלה תרבות מצרים העתיקה האריכה ימים יותר מכל תרבות עתיקה אחרת. כדי לתעד ולנהל את חיי המסחר ואת האדמיניסטרציה הממשלתית שקשורה לגביית מיסים, ניהול המפעל הגדול של בניית הפירמידות ועוד, צריך לדעת לכתוב מספרים ולערוך חישובים מתמטיים (Burton, 2011).

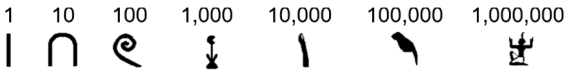
איך כתבו מספרים במצרים העתיקה?

הכתב המצרי התחיל להתפתח כ־3,250 שנים לפני הספירה. כיום הוא נקרא "כתב הירוגליפי" (ביוונית: הירוגליפיקה = גילוף מקודש) או "כתב החרטומים", על שמם של המכשפים המצרים שנקראו חרטומים.

מערכת הכתב ההירוגליפי מורכבת מתמונות ומסימנים שמספרם הלך וגדל עם השנים, עד שהגיע לכ־700 סימנים. בגלל האופי הציורי של כתב החרטומים, שמו נקשר בהילה של מסתורין וכשפים, עד אשר הצליחו לפענח אותו לפני כ־200 שנים.

האופן שבו כתבו המצרים את המספרים מעיד על כך שמדובר במערכת עשרונית לא־פוזיציונלית. כלומר, היא מבוססת על מספרים שהם חזקות של 10, אבל לא על ערך המקום של הספרות. כפי שאפשר לראות באיור 2, המצרים קבעו סימנים למספרים 1, 10, 100, 1,000, 10,000, 100,000 ו־1,000,000. את כל המספרים האחרים היה אפשר לבטא באמצעות צירוף של הסימנים הללו, ובכל סימן אפשר להשתמש תשע פעמים לכל היותר (כל עשרה סימנים זהים היו מוחלפים בסימן המייצג את החזקה הבאה של 10).

איור 2.



את המספרים כתבו המצרים בדרך כלל מימין לשמאל או מלמעלה למטה, מהמספרים בעלי הערך הגדול ביותר למספרים בעלי הערך הקטן יותר. אבל לא תמיד נשמרה שיטת הכתיבה הזאת. יתרה מכך, מכיוון שמערכת המספרים המצרית הייתה לא־פוזיציונלית, ולכל סימן היה ערך מספרי ספציפי קבוע, כל מספר אפשר היה לכתוב בדרכים שונות (Feldherr & Hardy, 2011). לדוגמה, את המספר 375 אפשר לכתוב לפי הכלל של "מימין לשמאל, מהגדול לקטן", כמו בחלק הימני של איור 3, ואפשר לכתוב שלא לפי הכלל, כמו בחלק השמאלי (אף כי מצב כזה היה נדיר מאוד).

איור 3.



הבדל נוסף בין כתיבת המספרים המצריים לבין הכתיבה העשרונית הפוזיציונלית קשור למספר הסימנים הדרושים לכתיבה של מספר. בעוד שבשיטת הכתיבה המוכרת לנו ברור שמספר בעל ארבע ספרות גדול ממספר בעל שלוש ספרות, לא כך הדבר בשיטה המצרית. שימו לב



שכדי לכתוב את המספר 375 נדרשו למצרים 15 סימנים: שלושה סימנים של 100, שבעה סימנים של 10 וחמישה סימנים של 1, וכדי לכתוב את המספר 1,000, למשל, היה צורך בסימן אחד בלבד (שריקי, 2024).

משימות:

- מצאו הצגה נוספת של המספר 375. בכמה סימנים הירוגליפיים השתמשתם?
- האם קיים קשר כלשהו בין ערכו של מספר לבין מספר הסימנים הדרושים כדי לרשום אותו בשיטה המצרית? אם כן - מהו הקשר?
- כמה סימנים הירוגליפיים נחוצים כדי לכתוב את המספר 9,307 ואת המספר 1,000,006? כתבו אותם ובדקו.
- מצאו שני מספרים עוקבים, כך שלצורך כתיבת המספר הקטן מביניהם משתמשים ב־27 סימנים הירוגליפיים, ואילו לצורך כתיבת המספר הגדול משתמשים רק בסימן הירוגליפי אחד.
- מהו המספר ההירוגליפי הגדול ביותר שאפשר לכתוב?

רוצים לכתוב מספרים הירוגליפיים נוספים? לחצו כאן.

מידע נוסף על המתמטיקה המצרית אפשר למצוא בגיליון יוני 2012, בגיליון ינואר 2013, ובגיליון יוני 2013.

כתיבת מספרים בתרבות המאיה

ה"מאיה" הוא כינוי לקבוצה אתנית גדולה שהחלה להתפתח במרכז אמריקה כ־1800 שנים לפני הספירה. בין המאה ה־3 למאה ה־9 לספירה חלה האצה בהתפתחות תרבות המאיה, ובתקופת השיא שלה היא מנתה כ־14,000,000 תושבים. אנשי המאיה בנו ערים גדולות עם מבני ציבור, ופיתחו את תעשיית הקרמיקה והצורפות, ואת אומנות הציור.

בדומה למצרים הקדמונים, גם אנשי המאיה בנו פירמידות, או ליתר דיוק - מבנים דמויי פירמידה. בעוד הפירמידות המצריות היו בעלות פאות חלקות ושימשו לקבורה, המבנים של המאיה נבנו כקומות עם מדרגות תלולות המובילות למקדש שבראש המבנה.

בתחילת המאה ה־16, כחלק מהכיבוש של יבשת אמריקה, הגיעו הספרדים גם לערי המאיה. אולם בניגוד לכיבוש המהיר יחסית של ערים אחרות, בערי המאיה הם נתקלו בהתנגדות עזה, והכיבוש הושלם רק לאחר כ־170 שנה. הספרדים נהגו לנהל מאבק בדתות המקומיות בעריה של דרום אמריקה ומרכזה, ולהשמיד את מרבית כתבי הקודש. מסיבה זאת כתב התמונות של תרבות המאיה עדיין לא פוענח במלואו. אולם מהכתבים ומהעדויות הארכאולוגיות שנמצאו אפשר ללמוד על הידע הרב שהיה להם באסטרונומיה ובמתמטיקה. כיום חיים במרכז אמריקה כתשעה מיליון בני מאיה. הם עדיין מדברים את שפות המאיה, ושומרים על המסורות העתיקות (Asselbergs & Restall, 2007).

איך כתבו מספרים בתרבות המאיה?

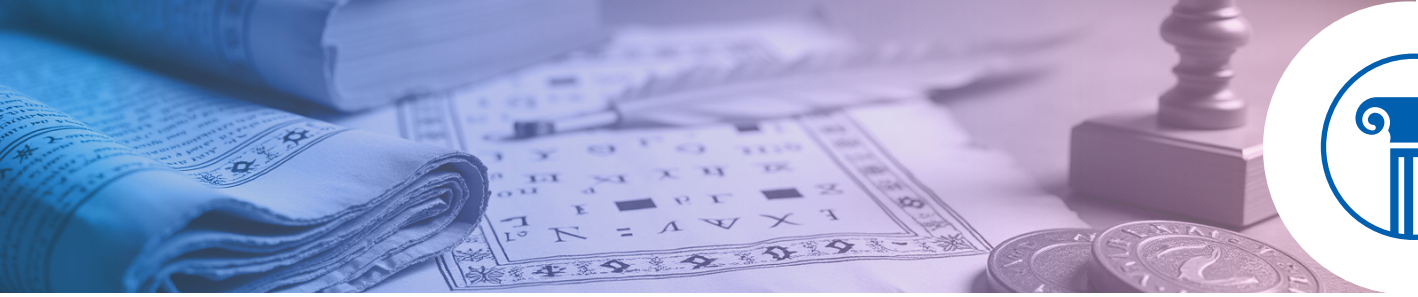
בדומה לכתב ההירוגליפי המצרי, גם הכתב של המאיה מורכב ממאות סימנים וציורים, וכולל סימנים למושגים וסימנים לייצוג עיצורים (אופן הגיית המילה). הממצאים הארכאולוגיים הקדומים ביותר של שימוש במערכת המספרים של המאיה מתוארכים למאה הרביעית-חמישית לפני הספירה, אך השימוש הרחב והמתקדם ביותר במערכת זו מתועד בעיקר בתקופה הקלאסית של המאיה (250-900 לספירה).

החישובים המתמטיים של בני המאיה נעשו בעזרת מספרים ייחודיים שנכתבו בבסיס 20 בשיטה פוזיציונלית. כלומר, המעבר ממקום למקום במספר משתנה כאשר מגיעים לחזקה הבאה של 20 (בשיטה שלנו המעבר הוא כשמגיעים לחזקה הבאה של 10). במקרה של מספרי המאיה, המספרים נכתבו אנכית, וכל שינוי בחזקה של 20 פירושו "עליית קומה" (Burton, 2011).

אגב, יש הסבורים שבסיס 10 נקבע מאחר שיש לנו עשר אצבעות בידיים, ואילו בסיס 20 נקבע מאחר שיש לנו עשרים אצבעות בידיים וברגליים יחד.

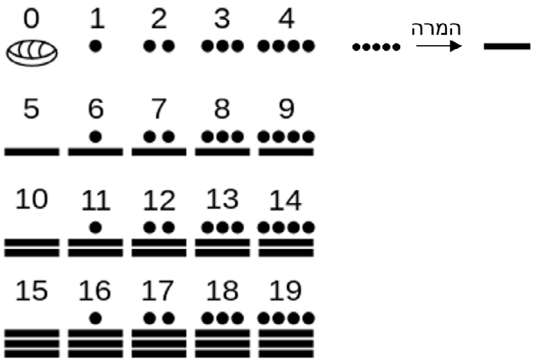
להבדיל ממערכת המספרים שלנו, שיש בה עשרה סימנים, במערכת המספרים של המאיה היו שלושה סימנים בלבד: נקודה מייצגת את הספרה 1, קטע אופקי קטן מייצג את הספרה 5, וקונכייה מסמלת את הספרה 0. מדובר באחת הדוגמאות המוקדמות בהיסטוריה של שימוש באפס, נוסף על ההודים.

בעזרת הסמלים עבור 1 ו־5 אפשר לכתוב באופן פשוט כל מספר (טבעי) בין 1 ל־19.



אלה הם סימלי המספרים 0-19 בספרות המאיה:

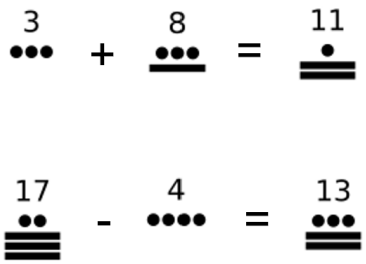
איור 4.



השיטה של המאיה לכתיבת מספרים אפשרה לבצע בקלות את פעולות החיבור והחיסור - פשוט לקבץ את הקטעים הקטנים ולקבץ את הנקודות, ולהמיר אותן במידת הצורך. מתי התבצעה המרה? בבסיס העשרוני אנחנו מבצעים המרה כאשר יש לנו 10 סימנים זהים למשל, כאשר מחברים את המספר 1 עשר פעמים, ממירים את התוצאה למספר 10. בשיטת המאיה המירו חמש נקודות לקטע קטן. לעומת זאת, בחיסור נדרשה לעיתים "פריטה" של קטע לחמש נקודות.

לדוגמה, באיור 5, כשרושמים את תוצאת החיבור של 3+8 מתקבלות שש נקודות. חמש מהן מחליפים לקטע, ונשארת נקודה אחת; כשרושמים את תוצאת החיסור של 17-4, ממירים קטע אחד של 17 לחמש נקודות, ומקבלים שני קטעים ושבע נקודות. משבע הנקודות מסירים ארבע נקודות, ומתקבלים שני קטעים ושלוש נקודות.

איור 5.



משימה:

כתבו את התרגילים הבאים באמצעות הספרות של המאיה, פתרו אותם בעזרת השיטה של המאיה, המירו את הסימנים למספרים עשרוניים, ובדקו את הפתרון:

- 2+7
- 6+11
- 4+12
- 13-5
- 11-6
- 12-3

כאן תוכלו לבדוק את התשובה שלכם.

איך נרשום את התוצאה של התרגיל 13+16?

מכיוון ש־19 הוא המספר (הטבעי) הגדול ביותר שעדיין קטן מ־20, כדי לרשום את התוצאה צריך "לעלות קומה" לחזקה הבאה של 20. לדוגמה, כדי לרשום את המספר 29, בקומה התחתונה יופיע המספר שיש לכפול ב־ 20^0 (תזכורת: כל מספר בחזקת 0 שווה 1, מלבד 0 בחזקת 0 שאיננו מוגדר), ובקומה שמעליו יופיע המספר שאותו יש לכפול ב־20^1.

לכן את הסכום של $13+16=29=20+9=1\times20^1+9\times20^0$ כתבו אנשי המאיה כך:

- כמה פעמים 20 (20^1) מופיע במספר? ●
- כמה פעמים 1 (20^0) מופיע במספר? ●●●●

איך נכתוב את המספר 73?

נפרק אותו לסכום חזקות של 20:

$73=3\times20 + 13\times1=3\times20^1 + 13\times20^0$

- כמה פעמים 20 (20^1) מופיע במספר? ●●●
- כמה פעמים 1 (20^0) מופיע במספר? ●●●

משימות:

- כתבו בשיטת המאיה את המספרים הבאים: 46, 53, 90, 117.
- מהו המספר הרשום כאן: ●●
- מהו המספר הגבוה ביותר שאפשר לכתוב באמצעות שתי "קומות"?
- מצאו מספר שכדי לכתוב אותו יש צורך בשלוש "קומות".

כאן תוכלו לבדוק את התשובות שלכם.



שימו לב לכך שהשיטה של המאיה לכתיבת מספרים היא שיטה פוזיציונלית, ולכן אין למעשה הגבלה על גודל המספרים.

כתיבת מספרים באימפריה הרומית

אחד המבנים הפוליטיים הנפוצים בעת העתיקה היה המבנה של "עיר-מדינה". כלומר, מדינה שהיא בעצם עיר אחת בלבד. חלק מערי-המדינה הפכו לאימפריות, וחלק מערי-מדינה קטנות כרתו ברית לצרכים פוליטיים, מדיניים וכלכליים. רומא העתיקה היא אחת מהדוגמאות לערי-מדינה שהפכו בהדרגה לאימפריה.

על פי המסורת הרומית, רומא החלה את דרכה בשנת 753 לפני הספירה כיישוב קטן שהוקם על־ידי רומולוס, לאחר שנלחם באחיו התאום רומוס והרג אותו. תהליך הפיכתה של רומא לאימפריה החל במאה החמישית לפני הספירה והסתיים במאה החמישית לספירה. בימיה הגדולים התפרשה רומא על מרביתה של מערב אירופה, על ארצות אגן הים התיכון, וגם על חלקים מהארצות שמסביב לים השחור.

השפה הלטינית הייתה השפה המדוברת באזור שבו נמצאת העיר רומא עצמה, אזור לטיום (כיום, מחוז לאציו באיטליה), ומכאן שמה של השפה. בהדרגה הפכה לטינית לשפה הרשמית של האימפריה הרומית, והיא הופצה בכל אזור שנכבש על־ידי האימפריה. כיום, הלטינית היא עדיין השפה הרשמית של הכנסייה הקתולית הרשמית ובוותיקן (Woolf, 2021).

איך כתבו מספרים באימפריה הרומית?

בטרם הפכה רומא לאימפריה, נהגו הרומאים לסמן מספרים, בעיקר לצורכי מסחר, באמצעות חריצים פשוטים על עץ או אבן. כל חריץ סימן יחידה אחת, ולעיתים השתמשו בארבעה חריצים עם קטע שחצה אותם כדי לסמן את המספר חמש.

ככל שהשפה והכתב הלטיני הלכו והתפשטו, כך החל להתגבש השימוש באותיות הלטיניות לצורך כתיבת מספרים. הספרות הרומיות הן למעשה שילוב של שבעה סימנים, שבע אותיות מהשפה הלטינית: I, V, X, L, C, D, M. בכתבים מתקופת ימי הביניים אפשר לראות שהרומאים השתמשו באות N, כדי לציין "שום דבר" (או בלטינית - nulla), אבל בשיטה הרומית עצמה לא היה סימן רשמי למספר "אפס".

הערכים הבסיסיים של סימני האותיות:

איור 6.

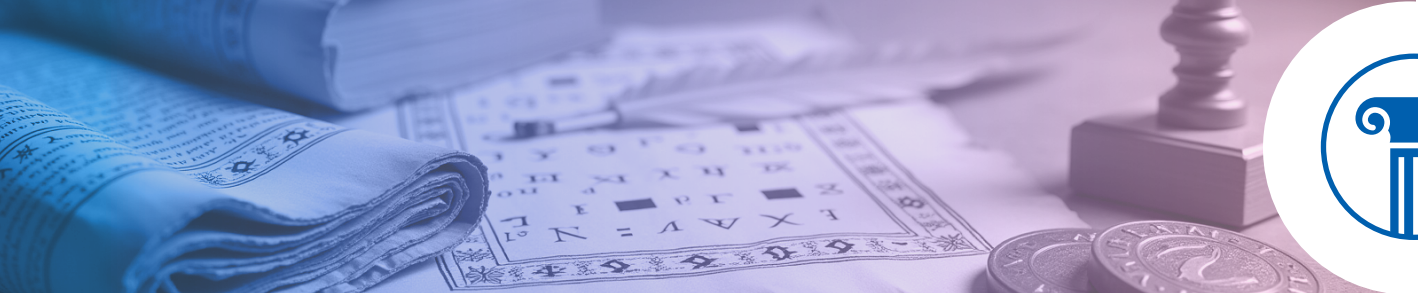
אות לטינית	I	V	X	L	C	D	M
ערך מספרי	1	5	10	50	100	500	1,000

בתקופות מאוחרות יותר, כשנוצר צורך לייצג מספרים גדולים במיוחד, הוסיפו קטע קטן מעל כל אות לציון העובדה שהערך מוכפל ב־1,000. כך, למשל, הערך של $\bar{V}$ הוא 5,000, והערך של $\bar{M}$ הוא 1,000,000.

השיטה הרומית לרישום מספרים אינה מבוססת על ערך המקום, ומתקיימים בה הכללים הבאים (Boyer & Merzbach, 2011):

1. בכתיבה של מספר, הספרות נרשמות משמאל לימין.
2. אם ספרה כלשהי רשומה משמאלה של ספרה הגדולה ממנה, המשמעות היא שצריך לחסר את ערך הספרה הקטנה מהערך של הספרה הגדולה. לדוגמה, את המספר 4 רושמים כך: IV (5-1). את המספר 90 רושמים כך: XC (100-10).
3. אם ספרה כלשהי רשומה מימינה של ספרה הגדולה ממנה, המשמעות היא שצריך לחבר את ערך הספרה הקטנה לערך של הספרה הגדולה. לדוגמה, את המספר 6, רושמים כך: VI (5+1). את המספר 70, רושמים כך: LXX (50+10+10).

   הערה: קיימת העדפה לרישום הספרות מהגדולה לקטנה (משמאל לימין). כך, לדוגמה, המספר 150 יירשם כ - 100+50 (CL) ולא כ - 200-50 (LCC).
4. אסור לחזור על אותה האות ברצף יותר מאשר 3 פעמים. לכן, את המספר 400, למשל, לא כותבים כ - CCCC אלא כ - CD (500-100). אגב, המספר 4 הוא חריג, שכן בעת העתיקה הירבו להשתמש בסימון IIII, במקום להשתמש בסימון IV. ניתן לראות זאת עד היום במגוון שעונים.



כעת, נראה דוגמאות למספרים נוספים הכתובים בשיטה הרומית. עבור כל אחד מהם בדקו לפי איזה מהכללים, הוא כתוב:

איור 7.

הסימון בספרות רומיות	XIV	XXX	XCIX	CCL	DC	MMXXV	$M\overline{V}$
ערך מספרי	14	30	99	250	600	2025	4,000

משימות:

- על הלוח בגשר קליוולנד בעיר באת' שבאנגליה מופיעה שנת הבנייה של הגשר. מהי השנה?



- כתבו באמצעות שיטת הכתיבה הרומית את המספרים הבאים:

19

378

945

3521

4870

7593

- מהו המספר הגדול ביותר שאפשר לכתוב בעזרת הספרות: I, V, X, L, C, D, M? (ללא שימוש בקטע קטן מעל האותיות)

כאן תוכלו לבדוק את התשובות שלכם.

מהו המספר הגדול ביותר שאפשר לכתוב באמצעות הספרות הרומיות ואלה עם הקטע הקטן מעליהן? המספר הגדול ביותר שיש לו סימון במערכת הספרות הרומיות הוא 1,000,000, המיוצג על־ידי $\overline{M}$. מכיוון שאסור לחזור על רצף של סימנים זהים יותר מאשר שלוש פעמים, נוכל לכתוב 3,000,000, $\overline{M}\overline{M}\overline{M}$, אבל לא 4,000,000. האם אפשר לכתוב 3,999,999? או במילים אחרות, האם אפשר לכתוב את המספר 999,999? התשובה היא חיובית, אף כי המספר מורכב מאוד: $\overline{CMXCIX}\overline{CMXCIX}$. נראה מדוע:

$\overline{CM}=(1{,}000-100)\cdot 1{,}000=900{,}000$; $CM=1{,}000-100=900$;

$\overline{XC}=(100-10)\cdot 1{,}000=90{,}000$; $XC=100-10=90$;

$\overline{IX}=(10-1)\cdot 1{,}000=9{,}000$; $IX=10-1=9$

לכן, המספר הגבוה ביותר שאפשר לכתוב באמצעות ספרות רומיות הוא 3,999,999: $\overline{MMM}\overline{CMXCIX}CMXCIX$

כתיבת מספרים בסין העתיקה

המתמטיקה הסינית היא אחת מתרבויות המתמטיקה הקדומות בעולם. במהלך ההיסטוריה מנעו השליטים הסינים מהאוכלוסייה המקומית מגע עם אוכלוסיות זרות. לכן, המתמטיקה הסינית המוקדמת התפתחה באופן עצמאי, והיא בעלת מאפיינים ייחודיים משלה, כולל ייחוס משמעויות פילוסופיות, תרבותיות ומיסטיות למספרים. המתמטיקה הסינית הייתה בעיקרה מעשית, ובין השאר נועדה לצורך קביעת לוח השנה וחישוב מיסים. ראוי לציין שהסינים היו הראשונים שעסקו במספרים שליליים ובריבועי קסם.

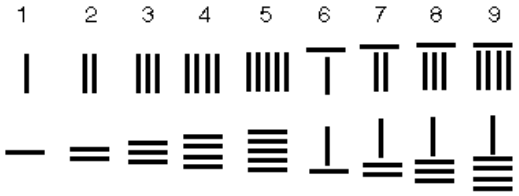
איך כתבו מספרים בסין העתיקה?

במשך כ־2,000 שנה, בין המאה הרביעית לפני הספירה ועד למאה ה־16 לספירה, הסינים השתמשו במקלות קטנים, "מוטות מנייה", כדי לייצג מספרים. מוטות אלה הם קווים אנכיים או אופקיים באורך של 3-16 ס"מ.

כך רשמו הסינים את הספרות 1 עד 9 באמצעות מוטות המנייה. שימו לב לכך שבמעבר מהמספר 5 למספר 6, הוחלפו חמישה מוטות מנייה אנכיים במוט מנייה אחד אופקי. כפי שאפשר לראות באיור 8, כל ספרה אפשר היה לכתוב בשני אופנים, וההבדל בין האופנים הוא כיוון המוטות (אופקי או אנכי). בהמשך נראה את הסיבה לכך.



איור 8.



מהאופן שבו רשמו הסינים את המספרים אפשר ללמוד על כך שהם סָפרו בבסיס עשרוני, תוך כדי שמירה על ערך המקום, אולם ללא שימוש בספרה אפס. בכתיבת מספר, הספרות נרשמו בעמודות, ובמקום אפס, הסינים השאירו עמודה ריקה. ספרת היחידות היא הספרה הימנית במספר, כפי שמקובל בשיטת הרישום שלנו.

כדי למנוע בלבול בין עמודות סמוכות הפכו הסינים את כיוון המקלות, לסירוגין: בעמודות היחידות, המאות, עשרות-האלפים וכדומה, המקלות מוצבים אנכית (כמו בשורה הראשונה של איור 8), ואילו בעמודות העשרות, האלפים, מאות-האלפים וכדומה, המקלות אופקיים (כמו בשורה השנייה של איור 8) (Martzloff, 1997). בהתאם לכללים הללו, איך, לדעתכם, רשמו הסינים את המספר 10?

במספר 10, הספרה 1 מופיעה בעמודת העשרות, והספרה 0 בעמודת היחידות. לכן, את המספר 10 כתבו הסינים באמצעות מוט אחד אופקי, כמו הספרה 1 המופיעה בשורה השנייה של איור 8. את עמודת היחידות הם השאירו ריקה. האם תוכלו לרשום את המספר 50 בעזרת המוטות הסיניים?

להלן כמה דוגמאות לרישום מספרים באמצעות מוטות המנייה:

המספר 17 הוא מספר דו־ספרתי שבו ספרת היחידות היא 7 וספרת העשרות היא 1. המספר מיוצג בשתי עמודות: בעמודה הימנית, עמודת היחידות, מופיע המספר 7 כמו בשורה הראשונה של איור 8, ובעמודה השמאלית, עמודת העשרות, מופיע המספר 1 (עשרת אחת) כמו בשורה השנייה של איור 8:

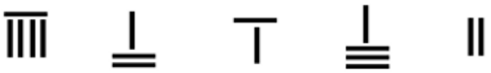


המספר 142 הוא מספר תלת־ספרתי, שבו ספרת היחידות היא 2, ספרת העשרות היא 4, וספרת המאות היא 1. המספר מיוצג בשלוש עמודות בהתאם לכיוון המקלות, לסירוגין:



הערה: אם המספר היה 140, העמודה הימנית הייתה ריקה, ואפשר היה לדעת שמדובר ב־ 140 ( ) ולא ב־14 לפי כיוון מקלות המנייה עבור המספר 4 והמספר 1 ( ).

המספר 97,682 הוא מספר בעל חמש ספרות, ובהתאם לשיטת הכתיבה הסינית ושינוי כיוון המקלות לסירוגין, הוא נראה כך:



- כתבו את הגיל שלכם (כמספר שלם) באמצעות מוטות המנייה הסיניים.
- כתבו את המספרים הבאים בעזרת מוטות המנייה:

73

269

1,054

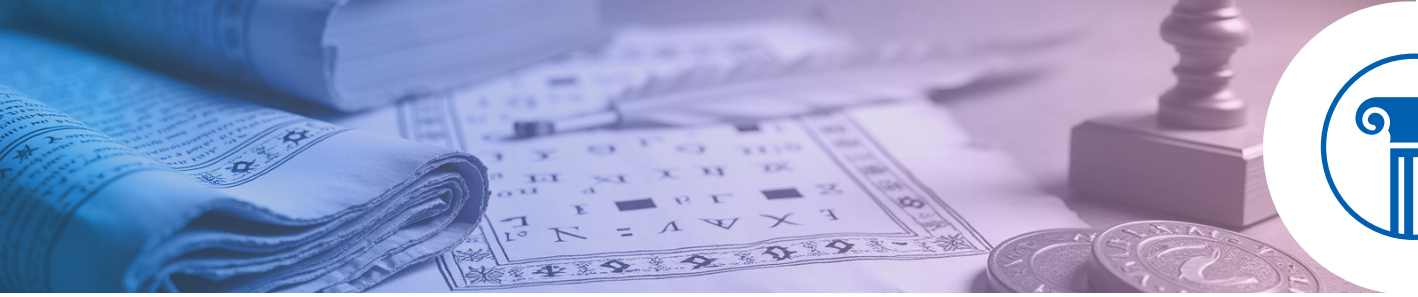
35,976

כאן תוכלו לבדוק את עצמכם.

שימו לב לכך שמכיוון שהשיטה הסינית לכתיבת מספרים היא פוזיציונלית, הרי שגם במקרה הזה אין הגבלה על גודל המספר שאותו כותבים.

הסינים השתמשו במוטות מנייה אדומים כדי לסמן מספרים חיוביים, ובמוטות שחורים כדי לסמן מספרים שליליים. המוטות השחורים סימלו חוב או חוסר. השימוש במספרים שליליים החל בסין במאה השנייה לפני הספירה, וכאמור, הסינים היו הראשונים שעסקו במספרים כאלה. רק כ־800 שנה לאחר מכן החלו מתמטיקאים הודים לנסח כללים לשימוש במספרים שליליים בפעולות חשבון. עברו כאלף שנים נוספות, ולפני כ־400 שנים גם המתמטיקאים המערביים הסכימו להכיר במספרים השליליים כמספרים "חוקיים".

כיום מקובלות בסין שלוש דרכים מרכזיות לכתיבת מספרים: אחת מהן היא המספרים ההינדו־ערביים המוכרים לנו, אחת מהן מושתתת על סימני הכתב הסיני, ואחת מבוססת על שפת הדיבור הסינית (Kane, 2006).

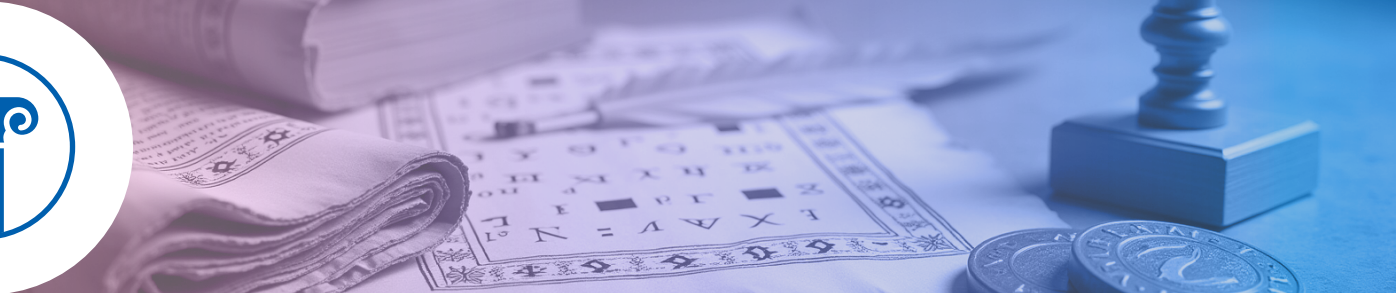


סיכום

במאמר סקרנו שיטות שונות לכתיבת מספרים שהתפתחו בתרבויות עתיקות. היכרות עם השיטות העתיקות לכתיבת מספרים והשוואה ביניהן מאפשרת הצצה מרתקת לעולמן של תרבויות קדומות. מעבר לכך, הוראת הנושא בכיתה מעוררת עניין, ותורמת להעמקת התובנות של תלמידים על אודות המושג "מספר". היכרות עם השיטות השונות מאפשרת גם לחשוף את התלמידים לעובדה שהמתמטיקה היא יצירה אנושית תלוית תרבות, ובכך לעודד שיח אודות הקשרים בין מתמטיקה, שפה ותרבות.

בטבלה שלהלן מופיע סיכום השיטות השונות, בהתאם לכמה קריטריונים, ובהמשך מופיעות הצעות לפעילויות בכיתה.

מאפיין	שיטת הכתיבה השכיחה כיום	מצרים העתיקה	תרבות המאיה	רומא העתיקה	סין העתיקה
בסיס השיטה	10	10	20	לא מוגדר	10
פוזיציונלית	כן	לא	כן	לא	כן
מספר הסימנים הבסיסיים	10 (0-9)	7 (1, 10, 100, 1,000, 10,000, 100,000, 1,000,000)	3 (0, 1, 5)	7 (I, V, X, L, C, D, M) (1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000)	2 (— , |) (יתד אנכית ויתד אופקית)
קיום סימן לאפס	כן	לא	כן (קונכייה)	לא	לא (השארת מקום ריק)
כיוון הכתיבה	אופקי משמאל לימין, מהגדול לקטן	אופקי מימין לשמאל, מהגדול לקטן (בדרך כלל)	אנכי מלמעלה למטה	אופקי משמאל לימין, מהגדול לקטן	אופקי משמאל לימין, מהגדול לקטן
עיקרון מנחה	ערך מקום וחזקות של 10	חזקות של 10 וסימנים מרובים	חזקות של 20 וערך מקום	דמוי חיבור-חיסור	ערך מקום, חילופי כיוון לסירוגין
הגבלת גודל המספרים	ללא הגבלה	9,999,999	ללא הגבלה	3,999,999	ללא הגבלה
מספרים שליליים	כן	לא	לא	לא	כן (מוטות שחורים)
מיקומה בהיסטוריה	פותחה בהודו החל מהמאה השלישית לפני הספירה. הועברה לאירופה דרך העולם הערבי	החלה להתפתח ב- 3,250 לפני הספירה	פותחה בין המאה ה-3 למאה ה-9 לספירה	פותחה החל מהמאה ה-5 לפני הספירה	פותחה החל מהמאה ה-4 לפני הספירה



על בסיס המידע על אודות שיטות הכתיבה והסיכום התמציתי שבטבלה, אפשר לתת לתלמידים מגוון שאלות ומשימות. להלן כמה הצעות:

1. בחרו מספרים שונים, וכתבו כל אחד מהם בכל אחת מהשיטות. באיזו מהשיטות היה לכם קל יותר לכתוב את המספרים? מאתגר יותר? מדוע?
2. מהם, לדעתכם, היתרונות והחסרונות של כל אחת מהשיטות?
3. אילו קשיים היו יכולים להתעורר אצל סוחר במצרים העתיקה, לעומת סוחר ברומא, כאשר היה עליהם לערוך חישובים בסכומים גדולים של כסף?
4. האם קיים קשר בין העובדה ששיטה מסוימת היא פוזיציונלית לבין העובדה שאפשר לכתוב בה מספרים ללא הגבלת גודל? מדוע?
5. איך, לדעתכם, אפשר לכתוב שברים בכל אחת מהשיטות העתיקות?
6. א. המציאו שיטה משלכם לכתיבה של מספרים - בחרו בסיס, סמלים, וחוקים, והוסיפו אותה לטבלה.
   ב. מהם היתרונות של השיטה שלכם לעומת שיטות אחרות?
   ג. הציגו את השיטה שלכם בפני חבריכם לכיתה, כתבו כמה מספרים, ובקשו מהם לזהות אותם.

רשימת מקורות

- שריקי, ע. (2024). *פרקים נבחרים בתולדות המתמטיקה בעת העתיקה - מצרים, בבל והודו*. מכון מופ"ת.
- Boyer, C. B. & Merzbach, U. C. (2011). *A History of Mathematics* (3rd ed.). NY: John Wiley & Sons.
- Burton, D. M. (2011). *The History of Mathematics: An Introduction*. NY: McGraw-Hill.
- Feldherr, A. & Hardy, G. (Eds.). (2011). *The Oxford History of Historical Writing. Volume 1*: *Beginnings to AD 600* (Oxford History of Historical Writing). Oxford: Oxford University Press.
- Ifrah, G. (2000). *The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer*. NY: John Wiley & Sons.
- Kane, D. (2006). *The Chinese language: Its history and current usage*. Singapore: Tuttle Publishing.
- Martzloff, J. C. (1997). *A history of Chinese Mathematics*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Restall, M. & Asselbergs, F. (2007). *Invading Guatemala: Spanish, Nahua, and Maya accounts of the Conquest Wars*. University Park, PA: Penn State University Press.
- Woolf, G. (2021). *Rome: An Empire's Story* (2nd ed.). NY: Oxford University Press