

זרקור על

עקרונות ליבה של מתמטיקה בגיל הצעיר: מושג המספר ופעולות חיבור וחיסור

פרופ' איליה סיניצקי
ראש החוג לתואר שני בהוראת מתמטיקה
האקדמית גורדון



עקרונות ליבה של מתמטיקה בגיל הצעיר: מושג המספר ופעולות חיבור וחיסור

איליה סיניצקי, האקדמית גורדון

מבוא

פיתוח תוכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי המתרחש בימים אלה מזמין מחשבות על אודות הדגשים בתהליכי למידת המקצוע בגיל הצעיר. דילמות בנושא יכולות לעלות במספר מישורים החל משאלות על מטרות הוראת מתמטיקה בכלל ועד לסוגיה "טרייה" של דרכי שילוב בינה מלאכותית בשיעור. לדיונים אלה ערך מעשי למורה למתמטיקה: בימינו יש לצפות כי המורים לא רק יודעים את תוכנית הלימודים, אלא גם רואים את קשרה עם המתמטיקה כגוף ידע; לא רק מתמצאים באופן שוטף בספרי לימוד המספקים חומרי למידה לכיתה, אלא גם מבינים את הרציונל המתמטי והדידקטי של הפעילויות המוצגות; לא רק מכירים את הפוטנציאל של סביבות למידה וכלים דיגיטליים מגוונים, אלא גם יודעים לשלב אותם בצורה מושכלת לצורכי למידה בסגנון חקר וגילוי.

בהקדמה לתוכנית הלימודים נכתב כי התוכנית דוגלת באיזון בין שטף חישובי לבין הבנה מעמיקה, קידום שיח מתמטי, פיתוח חשיבה ביקורתית ויצירתיות (משרד החינוך, 2025). אמירה זו מזכירה את שלושת הרכיבים העיקריים של תהליך הבניית ידע מתמטי השלובים זה בזה: תוכני, דידקטי וקוגניטיבי. נציין כי הסדר חשוב כאן, כי "הדידקטיקה צומחת מהתוכן המתמטי" (פרופ' נצה מובשוביץ-הדר, שיחה פרטית) - כלומר צורכי למידת התוכן אמורים להכתיב את דרכי הוראת המקצוע ודרכי חשיבת הלומד. בכך, נראה כי האיזון המוזכר בין שטף חישובי לבין הבנה מעמיקה מְזַמן הבהרה והרחבה משמעותיות.

הדיונים על אודות השילוב בין שתי שאלות מרכזיות בלמידת המקצוע, כלומר "כיצד?" ו"למה?", או יותר רחב, על היחס בין היבטים שונים של למידת מתמטיקה בבית ספר, מאפיינים את התפתחות החינוך המתמטי מאמצע המאה הקודמת, כאשר התברר כי ההתקדמות העצומה במתמטיקה השפיעה על התוכן אך לא על סגנון ההוראה. בכך "פג התוקף" לפרדיגמה של הוראה ולמידת מתמטיקה כאוסף אלגוריתמים ומשפטים פורמליים. בברית המועצות גרם הדבר לצמיחה של בתי ספר וכיתות מיוחדות עם למידת מתמטיקה מעמיקה ובהמשך לשינויים בתוכנית הלימודים עם דגש יתר על הפן הפורמלי של המתמטיקה. בארצות הברית הדגש החזק שהושם במסמכים של NCTM (1989) על מרכיבים קוגניטיביים בלמידת המקצוע "בתמורה ללימודי התוכן" גרם ממש ל"מלחמות מתמטיות" (Schoenfeld & Daro, 2024).

בארץ שינויים אלה התבטאו בשנות השמונים והתשעים בשליטתה של הגישה התבניתית בלמידת יסודות החשבון, ובהמשך, עם יישום תוכנית הלימודים "החדשה" (משרד החינוך, 2006), בפיתוח מגוון סדרות ספרי לימוד המבוססים על עקרונות דידקטיים די דומים זה לזה. מבחינת התוכן, למשל, בתחום החשבון הם כולם עוסקים, בפרופורציה כזו או אחרת, בפיתוח מיומנויות חישוב בתחום מספרים טבעיים ומספרים רציונליים חיוביים (המוצגים כשברים פשוטים וכמספרים עשרוניים), לרבות יכולת מציאת המודל המתמטי והאלגוריתם החישובי המתאימים לפתרון כל בעיה מילולית. ברור, כי תוכנית לימודים ובעקבותיה מחברי ספרי הלימוד מתכוונים ומכוונים לכך שפיתוח זה לא יסתפק בהקניית אלגוריתמים, אלא יתלוו אליו הבניית ידע משמעותי על אודות מהותם, גבולות יישומם, אפשרויות שימוש באסטרטגיות פתרון מגוונות וכדומה. דברים אלה אמורים לתרום להבניית תובנות עבור קבוצות מספרים שונים, תכונותיהן ופעולות החשבון, ובכך נכנסים תחת כותרת "הבנה מעמיקה".

בהקשר זה, נדמה כי התוכן המתמטי הנלמד בכל הכיתות של בית הספר היסודי - החל כבר מכיתה א' - מאפשר ואף מזמן היבט נוסף המעמיק עוד יותר. הכוונה היא להיכרות מעשית עם **רעיונות הליבה של המתמטיקה** ויישומם בתהליכי למידה. נשמע מדהים ואפילו בלתי



סביר כי רשימת רעיונות היסוד הללו קצרה באופן מפתיע. למעשה, כל המתמטיקה "עומדת" על הרעיונות הבאים: שקילות לרבות זהות ושוויון, שימור ושינוי, סימטריה כולל זוגיות, מבנים ודגמים, התאמות ודרכים לתיאורן, ליניאריות ואי־ליניאריות (Gowers, 2008; Pokutta, 2012).

ממבט ראשון, המושגים ברשימה נראים "גבוהים" ומופשטים למדי עבור בית הספר היסודי. אכן, מתמטיקאי מנוסה חש, מבין ומדגים כל אחד מהמושגים הללו באופן מגוון ועמוק - ומה לזה וללומד הצעיר העוסק בתחילת דרכו בחיבור וחיסור של מספרים בעשרת הראשונה ובהיכרות עם שמות הצורות? בשני מאמרים העוסקים בסוגיה זו יודגם, כי מודעות והיכרות בלתי פורמלית עם מושגים אוניברסליים אלה וגם יישום רעיונות ליבה יכולים ואף אמורים ללוות את הצעדים הראשונים של "עשייה" מתמטית - כמובן, ללא הצגה והוראה של המונחים עצמם בשיעורים בבית הספר היסודי.

כל ההתעסקות הזו אמורה לפתח יכולות הכללה ו"מבט־על" כלפי אובייקטים ותהליכים הנלמדים בבית הספר היסודי, ובכך היא יכולה להוות אחד מהמרכיבים של **חשיבה אלגברית** בלתי פורמלית (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2007). המאמר הנוכחי מתמקד בביטוי רעיונות ליבה בלמידת מושג המספר הטבעי (כולל האפס) ופעולות חיבור וחיסור בקבוצת מספרים אלה. המאמר האמור להתפרסם בגיליון הבא של כתב העת יתייחס להעמקת הבנות לגבי רעיונות ליבה הנוגעים לנושאים הנלמדים בכיתות "גבוהות" של בית הספר היסודי ובלימודי גאומטריה.

טרם למידה "מסודרת": תזכורת על תפיסת מושג המספר

ידוע היטב כי את המושגים הראשונים של המתמטיקה ילדים בונים באופן הדרגתי תוך כדי התעסקות מוחשית אינטואיטיבית עם האובייקטים בסביבתם. כך, אוספי חפצים מציגים כמויות שונות, ומניפולציות איתם סוללות את הדרך להבניית מושג המספר, מושג היסוד של החשבון. מומחים למתמטיקה בגיל הרך מדגישים כי תהליך זה מבחינה מנטלית מתקיים כסדרת הפשטות לאוסף כמויות, ומשם להבנת המספרים הטבעיים. בסיכומה של הדרך עומדים משפטי מפתח המבטאים את עֶקרון **שימור הכמות:** "כמות החפצים באוסף נתון אינה תלויה בדרך מנייתם או בדרך סידורם" ו"כמות שמנייתה מסתיימת במספר מונה מסוים מייצגת מספר זה". נדגיש כי "השבילים" למושג המספר מגוונים, אך אין לדלג על אף לא אחת מאבני הדרך הבאות:

- "לכל עצם מתאימים את המספר". כלומר, המנייה היא תהליך בניית **התאמה** בין סדרת המספרים הידועים לילד מספירה לבין אוסף החפצים, למשל "פרה - אחת, תרנגולת - שתיים, ציפור - שלוש, חתולה - ארבע";
- "לכל עצם מתאימים את המספר **ברצף**". כלומר, אין לחזור על אותו פריט במנייה, אין לחזור על אותו מספר מונה, ואין לדלג על החפצים או על שמות המספרים;
- "פריטים המפוזרים בדרכים שונות אפשר למנות באותו סדר", הפריט זהה לעצמו ללא תלות במיקומו במרחב (מספר האחים והאחיות המשחקים עם הילד לא משתנה אם הם זזים ממקום למקום - אפילו אם קשה לזהות אותם);
- "בתהליך המנייה אין חשיבות לסוג הפריט או לגודל העצם" (יש **שקילות** בין פרה וציפור, כל אחת מהווה אותה יחידה של מנייה);
- "מנייה של כמויות **זהות** מסתכמת באותו מספר", זהו **שימור** המאפיין את הכמות הנתונה ללא תלות של דרך (תקינה!) מניית חפצי האוסף. במילים אחרות, קיימות הרבה **התאמות חד־חד ערכיות** בין קבוצה נתונה של חפצים וקבוצה של מספרים מ־1 עד למספר המונה המסכם לקבוצה זו.
- "תהליכי מנייה של אוספים שונים ומגוונים יכולים להסתכם באותו מספר מונה" - האוספים הם כמויות **שקולות** מבחינת מנייה ובכך הם כמויות **שוות**.
- "הוספה או גריעה של פריט או פריטים גורמת **לשינוי** הכמות, ובכך המנייה תסתיים במספר אחר מאשר הקודם".

כלומר, בהתאם לאמירתה של ספרד (Sfard, 1988), מושג המספר נבנה כסדרת מעברים מתפיסה תהליכית לתפיסת המספר **כמבנה**: הוא גם אוסף של עצמים בודדים, אך גם "משהו נוסף", אובייקט שלם



בעצמו. כמובן, אין חידוש באמירות הנ"ל, הן "רק" מדגישות כי בתהליך בניית מושג המספר הילד נחשף להבנה בלתי פורמלית של עקרונות המתמטיקה, העומדים ממש **ביסוד הידע המתמטי**.

פעילות 1 לדוגמה. מושג המספר.

יש להתאים את הניסוח המילולי ליכולת הלומד. שימו לב לפיתוח הבנת יציבות הכמות, שקילות בין כמויות ויכולת המיון.

1. סדרו את המדבקות על הדף כמו באיור 1א.
"כמה מדבקות יש על הדף?".

איור 1א.

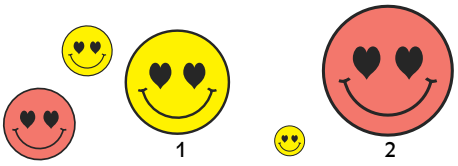
מדבקות פזורות על הדף



2. מונים את המדבקות - "כמה מדבקות יש על הדף?"
   - נתחיל למנות את המדבקות, כמו באיור 1ב. המשיכו למנות. לנוחיות, אפשר לסמן כל מדבקה אחרי מנייתה. כמה מדבקות יש על הדף?
   - נתחיל שוב למנות את המדבקות כמו באיור 1ב. המשיכו למנות בדרך אחרת מאשר בסעיף הקודם. כמה מדבקות יש על הדף?
   - כעת התחילו למנות מדבקות באופן אחר מאשר באיור 1ב, ומנו את כולן. כמה מדבקות יש על הדף?

איור 1ב.

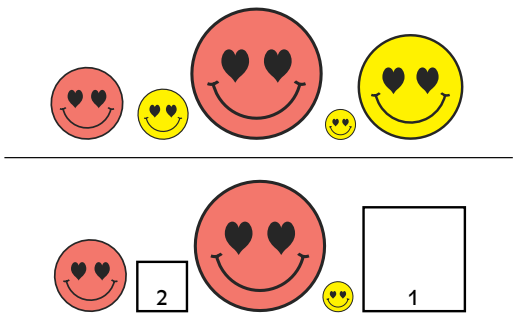
התחלה של מניית המדבקות



3. מסדרים ומונים את המדבקות - "כמה מדבקות יש בשורה?"
   - שימו את כל המדבקות שעל הדף בשורה אחת לפי רצונכם (ר' דוגמת הפתרון באיור 1ג למעלה). מבלי למנות אותן, שערו כמה מדבקות יש בשורה.
   - מנו את המדבקות בשורה בסדר כלשהו. לנוחיות, אפשר להפוך כל מדבקה אחרי מנייתה (ר' דוגמה לשלב הביניים באיור 1ג למטה). כמה מדבקות יש בשורה?
   - מנו את המדבקות בשורה זו אחר זו. כמה מדבקות יש בשורה?
   - התחילו למנות מדבקות מקצה אחר של השורה, ומנו אותן זו אחר זו. כמה מדבקות יש בשורה?

איור 1ג.

אותן המדבקות מסודרות בשורה ודוגמה לתהליך מנייתן



4. מונים בסדר מסוים (ר' איור 1ד)
   - מנו את המדבקות מהגדולה ביותר עד לקטנה ביותר. כמה מדבקות יש בסך הכול?
   - מנו קודם כל את המדבקות האדומות, ואחר כך את כל האחרות. כמה מדבקות אדומות יש? כמה מדבקות יש בסך הכול?
   - מנו רק את המדבקות שאינן אדומות? כמה מדבקות לא אדומות יש?

איור 1ד.

אותן מדבקות למנייה בסדר מסוים



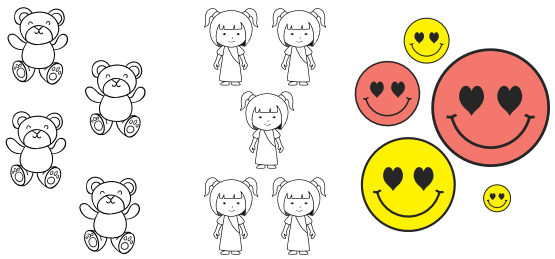


5. משווים בין גודלי הקבוצות (ר' איור 1ה).

- תנו לכל בובה בתמונה מדבקה, ומנו כל בובה שמקבלת מדבקה. כמה בובות קיבלו מדבקה? האם נשארו בובות שאין להן מדבקה? האם נשארו מדבקות? מה יש יותר, בובות או מדבקות?
- תנו לכל דובון בתמונה מדבקה, ומנו כל דובון שמקבל מדבקה. כמה דובונים קיבלו מדבקה? האם נשארו דובונים שאין להם מדבקה? האם נשארו מדבקות? מה יש יותר, בובות או מדבקות?

איור 1ה.

מדבקות לבובות ולדובונים



מספרים, "תרגילים" וחשיבה אלגברית בכיתות "הנמוכות"

נראה כי פיתוח מיומנויות חישוב של התלמידים עומד, לפחות אצל רוב המורים, במקום הראשון בסדר העדיפויות של הוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי. מבלי להמעיט בחשיבות השליטה של התלמיד בארבע פעולות החשבון (גם במאה ה־21), ברצוני לציין כי עיסוק זה יכול להיות בּמָה וכלי להבניית תובנות עמוקות כלפי אובייקטים מתמטיים. יש לזכור כי, בניגוד לסטיגמה השטחית, "מתמטיקה אינה עוסקת במספרים ואפילו לא באותיות ובנוסחאות" (Lockhart, 2009).

השוואת מספרים בד בבד עם הכרתם

כבר בשלב החזרה להיכרות עם מספרים בעשרת הראשונה (ממנה מתחילים למידת חשבון בכיתה א') יש מקום להעמקה בשני היבטים: הבנת שוויון הכמויות ודרכים להשוואתן. טענה קריטית אומרת "אם (ורק אם!) בין שני אוספי פריטים אפשר לבנות התאמה חד־חד ערכית, אז הם שווים בכמותם" נשכחת לפעמים בהוראת החשבון בכיתות "הנמוכות". טענה זו מציעה דרך לקביעת שוויון כמויות: לצורך השוואה בין כמויות **אין בהכרח למספר אותם**. במובן זה, מושג השוויון הוא אף עמוק יותר ובסיסי יותר מאשר מושג המספר. נובע מזה, כמובן, כי כל כמות שווה לעצמה. אך גם, אם לכל ילד התאימו פריט שונה מאוסף פריטים ("מדבקה אחת לכל ילד"), ולא נשארו פריטים, אז מספר הפריטים שווה למספר הילדים - **מבלי לדעת מהו מספר זה**. כלומר, אין בזה קריאה להכתיב דבר כ"כלל לזכור" לתלמידים, אלא לבנות הבנה דרך פעילויות מוחשיות מגוונות. נציין כי סימן השוויון מבטא שוויון בין מספרים ולא בין כמויות, לדוגמה, אין להשתמש בסימן שוויון בין שלושה פילים ושלושה סוסים (Carpenter, Franke & Levi, 2003, p.13).

בהמשך, כל מספר טבעי "חדש" מתקבל כתוצאת פעולה מתמטית של "מספר עוקב" הקודמת לכל ארבע פעולות החשבון. זאת אומרת, כל מספר הבא בסדרת המספרים הטבעיים הוא **גדול מהקודם לו**. עקב **העבירות** (טרנזיטיביות) של היחס "גדול מ־", מספר זה גם גדול **מכל אחד מהקודמים** לו. בהתאם לכך, לפי **הגדרה** של היחס "קטן מ־", כל מספר טבעי שקודם למספר - קטן ממנו. ברור כי תובנות אלו אין להקנות באופן מופשט, אלא לבנות אותן בסדרת דוגמאות ופעילויות מוחשיות, אולי דווקא ללא שימוש בסימנים פורמליים. בה בעת, יש לשאוף להבנה כי בין שני מספרים **שונים**, בהכרח אחד מהם (נניח, a) גדול מאחר (b), **ובהתאם**, b קטן מ־a - זוהי אחת **מאקסיומות הסדר** בין מספרים שתקפות לכל הקבוצות על ישר המספרים - ובכך ילוו את התלמידים לאורך כל לימודי המתמטיקה. יכולת התלמיד לומר עם הבנה "חמש גדול משלוש, שלוש גדול משתיים, **ומכך** חמש גדול משתיים" (ואחר כך גם "**במילים אחרות**, שתיים קטן מחמש") משמעותית הרבה יותר מאשר הכרת הסימנים "<" או ">".



פעילות 2 לדוגמה. השוואת כמויות והשוואת מספרים

1. הבובות של תמי.
   - תמי קיבלה בובה במתנה. יש לה כעת יותר בובות או פחות בובות מאשר היו לה קודם? האם מספר הבובות שיש לה גדל או קטן?
   - תמי איבדה בובה. כיצד השתנתה כמות הבובות שלה?
   - תמי מציירת פרחים, פרח אחד לכל בובה שלה. מספר פרחים שהיא צריכה לצייר הוא (גדול מ־/שווה ל־/קטן מ־) מספר בובות שלה?
   - תמי נתנה פרח לכל בובה, ונשארו לה עוד פרחים. מה יש יותר לתמי - בובות או פרחים?
2. התפוחים של אבי ותמי
   - לתמי יש יותר תפוחים מאשר לאבי. כלומר, לאבי יש (יותר / פחות / אותה כמות) תפוחים מאשר לתמי; מספר התפוחים של אבי הוא (גדול יותר/קטן) יותר מאשר מספר תפוחים של תמי.
   - היו לתמי יותר תפוחים מאשר לאבי. תמי אכלה שני תפוחים. האם יכול להיות שעדיין יש לה יותר תפוחים מאשר לאבי? אם כן, הביאו דוגמה מספרית מתאימה. האם יכול להיות שלאבי כעת יש יותר תפוחים מאשר לתמי? אם כן, הביאו דוגמה מספרית מתאימה.
   - לתמי היו יותר תפוחים מאשר לאבי, והיא נתנה לו תפוח אחד. האם ייתכן כי לתמי ולאבי יש כעת אותה כמות התפוחים? האם יכול להיות שעדיין יש לה יותר תפוחים מאשר לאבי? האם יכול להיות שלאבי כעת יש יותר תפוחים מאשר לתמי? הציגו דוגמאות מתאימות.
3. קניות קטנות. גלידה עולה במכולת יותר מאשר בקבוק מים.
   - אומר דני: "יש לי מספיק כסף לקנות שתי גלידות, אך לא מספיק לקנות שני בקבוקי מים." הייתכן?
   - אומרת דנה: "יש לי מספיק כסף לקנות שני בקבוקי מים, אך לא מספיק לקנות גלידה." הייתכן?
   - אומרים הם יחד: "הכסף של דני מספיק בדיוק לשתי גלידות, הכסף של דנה מספיק בדיוק לשני בקבוקי מים." למי יש יותר כסף?

בהמשך, כאשר לומדים על מספרים טבעיים גדולים יותר, נובע מתובנות אלו כי, למשל, כל מספר דו־ספרתי גדול מכל מספר חד־ספרתי, או כל מספר בשורה הבאה של לוח ה־100 גדול יותר מהמספרים בשורות הקודמות. בנושאים אלה אפשר לדון כבר לצד ההיכרות עם מספרים בתחום ה־100 בכיתה, ובדומה, למשל, בהשוואה בין מספרים תלת־ספרתיים וארבע־ספרתיים. כך, כל מספר ארבע־ספרתי מכיל אלף אחד לפחות, וחלקו זה כבר גדול מכל מספר תלת־ספרתי. שימו לב **לאופי האלגברי** של המסקנות המתקבלות - הן לא תלויות בבחירת מספרים ספציפיים בתחומים הנדונים. כך, תמיד נכון כי ???? > ??? כאשר כל אחד מסימני שאלה מסמן **ספרה כלשהי**. תובנה זו, אגב, אמורה גם למנוע את "האנלוגיה" בתחום המספרים העשרוניים, כאשר ספרה במקום הראשון אחרי הנקודה העשרונית במספר העשרוני מייצגת את החלק הגדול ביותר שלו.

על מהות פעולות החשבון

בד בבד עם הרחבה הדרגתית של תחום המספרים הטבעיים (עד 100 בכיתה א' ובהמשך עד 1000, רבבה וכדומה), תלמידים אמורים להגיע ללמידת פעולות חשבון המתארות מצבים מחיי היום־יום. כך, בתחום המספרים הטבעיים מצבי איסוף והוספה ממודלים על־ידי פעולת חיבור, ופעולת חיסור מתארת תהליכי הפרדה או גריעה (משרד החינוך, 2025). חשוב להבין כי בבסיס פעולות האריתמטיקה עומד **עֶקרון האדיטיביות** של כמות: בחלוקת השלם לחלקים, הסכום של החלקים שווה לשלם המחולק. "יציבות" המספר הנרכשת בהתנסויות עם כמויות קטנות בגיל הצעיר אמורה (חייבת!) להתבטא בכיתה א' באופן פורמלי. כמות של חמישה פריטים אפשר להציג כשני חלקים: שלושה פריטים בחלק אחד ושני פריטים בחלק אחר, **כלומר**, לדוגמה, המספר 5 הוא סכום של שני מספרים, 3 ו־2, ובכתיבה פורמלית, **5=3+2**. תגובת הקורא היא כמעט אוטומטית: למה להבליט את השוויון הזה? ואולי בכלל הכוונה ל: 5=2+3? הינה, זהו גרעין כל הסיפור! את המספר 5 אפשר להציג



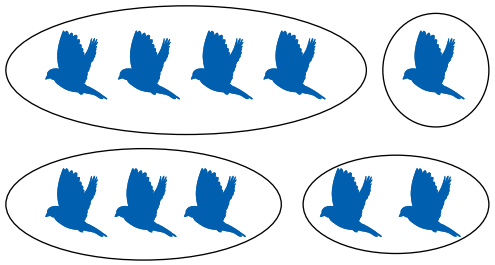
כסכום של 3 ו־2 (או כסכום של 2 ו־3), במילים אחרות, הסכום 3+2 הוא מספר. נכון כי בשפה עברית (כמו בהרבה שפות אחרות) אותה מילה "סכום" מתארת - לא במקרה - את כל אחד משני אגפי השוויון, גם את 3+2, וגם את 5 (שאפשר גם לכנותו "ערך הסכום"). כל מספר, כפי שכבר הוזכר, שווה לעצמו, יש **שקילות** בין שתי דרכים אלו לבטא את הכמות הנתונה (5 במקרה שלנו). בכך, הביטוי 3+2 אינו התחלה של תרגיל חיבור המזמנת "השלמה": 3+2=, אלא אחת מההצגות של המספר 5.

מאחר שאת אותה הכמות אפשר לפצל לשני חלקים בדרכים נוספות, את אותו מספר 5 אפשר להציג גם כסכומים אחרים של שני מספרים, דוגמת 4+1=5. מהסימטריה של יחס השוויון, נכון כמובן גם לכתוב 4+1=5, ולומר כי 5 הוא הסכום של 4 ו־1. בחלוקה זו הגודל של אחד ממרכיביה (המחובר 4) גדול יותר מאשר בחלוקה הקודמת (3), **ובהתאם**, הגודל של המחובר הנוסף, המשלים את אותה הכמות, חייב להיות קטן יותר מאשר בחלוקה הקודמת (2). איור 2 ממחיש עיקרון זה ויזואלית, ובאופן פורמלי הוא מתבטא בשוויון:

a+b=[a+(b+1-1)]=[a+(1+(b-1)]=[(a+1)+(b-1)]

איור 2.

פיצולים שונים של אותה הכמות



הכללת השוויון מצביעה על אפשרות שינוי במחוברים במספר גדול מ־1, בהגדלה ובהקטנה בהתאמה - עד להקטנה של אחד מהמחוברים עד ל־0, כך שההצגה "האחרונה" בסדרת הצגות המספר הטבעי כסכום של שני מחוברים שלמים לא שליליים (מה שרלוונטי לכיתות הנמוכות של בית הספר היסודי) היא 5+0=5 או, שוב, המספר 5 הוא סכום של 5 ו־0, 5=5+0. זוהי המשמעות של סדרת הסכומים בעלי אותו ערך, למשל, של המספר 10:

10+0 9+1 8+2 7+3 6+4 5+5 4+6 3+7 2+8 1+9 0+10.

כל סכום כאן הוא הצגה אחרת של אותו מספר, ואם אחד המחוברים עולה במספר מסוים, על המחובר הנוסף לרדת בדיוק באותו מספר. כלומר, עיקרון שימור הסכום (או שימור הכמות) מכתיב מייד מהו הערך של סימן השאלה בשוויון 5+5=6+? או בשוויון 5+?=6+5. פעילויות ודיונים בסגנון זה אמורים לתרום להבנה נכונה של סימן השוויון כסימן השקילות בין כמויות (ובהמשך - בין ביטויים אלגבריים ובין אובייקטים שקולים בכלל), ולמנוע פירוש שלו כאופרטור לביצוע פעולת חישוב, דבר שגורם לתלמידים להחליף את סימן השאלה למספר 12 בשוויון 5 + [ ] = 8 + 4 (Carpenter, Franke & Levi, 2003).

השוואה וחישוב של סכומים והפרשים

כל הנאמר לעיל על הבנת מהות הביטויים החשבוניים לא מבטל את הצורך ללמד לחשב סכומים, הפרשים, מכפלות ומנות. תובנות אלו אמורות לעזור לתלמיד לערוך חישובים תוך כדי הפעלת שיקולים לבחירת דרך יעילה לפתרון. לפיכך, בצמוד לסוגיית החישובים עומדות יכולת הערכה של טווח התוצאה ותכונותיה (אומדן), וגם השוואת תוצאות החישוב **טרם החישוב עצמו**.

נתבונן לדוגמה בחמישה סכומים אקראיים מהעשרת הראשונה: 4+3 5+3 6+3 2+4 5+4

נראה כי אחרי קביעת ערך הסכום בכל אחד מהמקרים - בעזרת כלים מוחשיים או בלעדיהם - התלמידים אמורים לגשת למשימה הבאה. אך, למעשה, ההתעסקות יכולה להיות הרבה יותר מעמיקה:

- ראשית, מתגלים כאן שני **סכומים שווים**, ויש לברר מהי הסיבה לכך. ברור: הוספנו יחידה אחת לאחד החלקים ובהתאם הורדנו יחידה אחת מהחלק האחר (כך עברנו מ־4+5 ל־3+6). במילים אחרות, רק העברנו יחידה אחת מחלק אחד לחלק אחר - ולכן ברור כי **נשמר הסכום הכולל** בתהליך זה. כמובן, תובנה עמוקה זו לא רוכשים מדוגמה בודדת אלא חוזרים לניתוח התופעה, גם עם מספרים גדולים יותר, וגם עם שינוי החלקים במספר שונה מ־1. למשל, כבר כאן אפשר להציע הבניית סכום או סכומים נוספים עם אותו ערך. בין היתר, אחת



מהאפשרויות היא כמובן "החלפה בין החלקים", 4+5=5+4 וכדומה: בפעולת חיבור קיימת **סימטריה** בין מרכיבי הפעולה, ובכך אפשר להעניק אותו שם לחלקים שאותם מחברים יחד, ולכנותם **מחוברים**.

- שנית, יש באוסף סכומים שבהם אחד מהחלקים (מחוברים) זהה. באחד מהמקרים מוסיפים לאותו מספר 5 את המספרים 4 או 3. את האמירה האינטואיטיבית "אם לאותו מספר 5 מוסיפים יותר - אז גם הסכום יהיה יותר גדול" אפשר להמחיש בעזרת ציר המספרים - ושוב, כמובן, באופן שיטתי כדי להגיע להבנה כי כאשר לאותו מספר כלשהו מוסיפים יותר בפעם הראשונה מאשר בפעם השנייה - אז גם הסכום בפעם הראשונה יהיה גדול יותר, כפי שמתואר באיור 3א.

שני זוגות נוספים המופיעים באוסף, 2+4 ו־3+4, וגם הזוגות 5+4 ו־2+4 ממחישים את אותו עיקרון באופן אחר: אם מספר אחד היה גדול מאחר ומוסיפים לשניהם את אותו המספר, אז גם הסכום הראשון יהיה גדול מהשני (תכונה זו ידועה כתכונת **מונוטוניות** של החיבור) - כפי שמומחש באיור 3ב. נציין כי תכונה זו תקֵפה גם במקרה שבמקום הוספה מקטינים את כל אחד מהמספרים באותו ערך. כלומר, מונוטוניות זו יש להמחיש בהמשך גם בהפרשים דוגמת 6-4 ו־9-4 (איור 3ג). במילים אחרות, תובנה זו היא **אלגברית לגמרי**.

איור 3.



א. המחשת הוספה של מספרים שונים לאותו מספר על ישר המספרים



ב. המחשת הוספה של אותו מספר למספרים שונים על ישר המספרים



ג. המחשת הורדה של אותו מספר ממספרים שונים על ישר המספרים

- עוד תובנה נובעת מהשוואה של זוג אחר של סכומים, 2+4 ו־6+3: אחרי החלפת סדר המחוברים בזוג הראשון, כל אחד מהמחוברים בסכום זה קטן בהתאמה מהמחוברים בסכום השני, ובכך בשרשרת הסכומים 6+3, 4+3, 2+4 כל סכום קטן מקודמו. זה מאפשר להסיק מסקנה לגבי השוואה בין שני סכומים נתונים. עם זאת, נראה כי דיון בסגנון זה מתאים לכיתות גבוהות מאשר כיתה א'.

איורים 3ב ו־3ג ממחישים גם את **מהות ההפרש** בין שני מספרים שלמים: זהו **המרחק** בין הנקודות המייצגות את המספר הגדול והקטן על ציר המספרים. אגב, נראה כי הביטויים "ישר המספרים" ו"ציר המספרים" די שקולים מבחינה דידקטית. יש רק לזכור כי לסימון של חץ על הישר יש משמעות חשובה: החץ המסמן את כיוון עליית המספרים על ישר המספרים (וכמובן לא מסמנים חיצים בשני הכיוונים על הישר, כמו שעדיין אפשר לראות ברשת). כלומר, מסימון המקום של שני המספרים על ישר המספרים אפשר לגלות שני דברים:

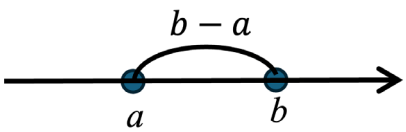
א. איזה משניהם גדול יותר (מיקומו "ימינה" יותר, או יותר מדויק, הוא נמצא "בכיוון החץ");

ב. בכמה מספר זה גדול יותר - זהו אורך הקטע בין המספרים (ר' איור 4).

יש לשים לב כי טענות אלו תקפות ללא תלות בקנה המידה הנבחר, בערך המספרים ואפילו בכך אם הם חיוביים או שליליים. כך, כבר בכיתה א' צריך להיות מובן כי המספר 0 קטן מכל מספר חיובי, ובהמשך ההיכרות עם קבוצות מספרים תובנה זו יכולה לעזור בהשוואה למשל בין שליש ורבע או בין (-5) ו־3.

איור 4.

הפרש בין שני מספרים על ישר המספרים



בחזרה להשוואת ההפרשים, אותה הבנה על דרכי הצגת **אותו מספר** כסכומים שונים יכולה לבסס את ההחלטה לגבי השוואה בין, נניח, הפרשים 8-5 ו־8-6:



שניהם משלימים עד אותו שלם 8, אחד משלים את 5 והשני את 6. ברור, כי השלמה של 5 היא גדולה יותר, ושוב, ישר המספרים ממחיש יפה את השיקול.

יש לציין כי תובנות לגבי מהות הפעולות ודרכי השוואת תוצאותיהן מבססות **אלגוריתמים** שמתבטאים במגוון דרכי החישוב ביניהן אמור לבחור התלמיד בכל מקרה ומקרה. כך, שתי דרכי הצגה של עשרת שלמה מספקות שתי דרכי חישוב של הסכום 8 ו־5. בהמשך, מגוון האפשרויות לחישוב סכום דוגמת 28+15 רחב עוד יותר וכולל הצגת כל מחובר כסכום עשרות שלמות ויחידות בודדות שנותרו, הוספה "הדרגתית" של חלקים מ־15 למחובר הראשון (28+10+5), או השלמתו של מחובר הראשון עד ל־30 ובכך הקטנתו של המחובר השני ל־13, ואולי גם השלמת המחובר השני עד ל־20. שימו לב כי ההמללה האמורה ללוות את כל אחת מהפרוצדורות למשל, "הסכום 28+10 הוא כבר 38, ומוסיפים לזה עוד 5". תיאור זה מספק גם את האומדן של הסכום, ובכך עוזר למנוע חלק מהשגיאות הנפוצות ב"תרגילים עם המרת העשרת". מצב דומה הוא גם בחישובי הפרשים. כך למשל, ההפרש 13-4 **נשמר** תוך כדי שינוי כל אחד ממרכיביו ב־3, 13-4=10-1 או בדרך חילופית קטן ב־1 מההפרש של 13 ו־3: 13-4=13-3-1. גם כאן התובנה של טיב השינוי המתאים אמורה למנוע שגיאות "העתקת כלל הפיצוי" מחיבור לחיסור - גם בתחום המספרים הרב־ספרתיים (סיניצקי ואילני, 2014, עמ' 175, 180; תירוש ואחרים, 1999): לדוגמה, ההפרשים 143-258 ו־140-261 אינם שווים, בניגוד לסכומים 143+258 ו־140+261.

לסיום נציין עוד השלכה של הבנת ההפרש בין המספרים כמרחק על ישר המספרים בין הנקודות המייצגות אותם. "קפיצה קבועה חוזרת" ממספר מסוים משמעותה הבניית סדרה בעלת הפרש קבוע בין איבריה הצמודים, סדרה חשבונית בשפה הפורמלית (נציין אגב, כי שם הסדרה נובע לא מכך כי מתבצעת פעולת חשבון כלשהי בין איבריה, אלא מהסיבה שכל איבר בה הוא **ממוצע חשבוני** של שני שכניו בסדרה). זוהי כמובן דוגמה חשובה מאוד של קשר **ליניארי**, ובמקרה ש"הקפיצות" מתחילות מ־0, זוהי גם **פרופורציונליות** בין מספר סידורי של איבר בסדרה לבין ערכו. אך אלו סוגיות השייכות כבר למאמר הבא בנושא.

פעילות 3 לדוגמה. על השוואה ועל חישוב הסכומים וההפרשים

מומלץ להתאים את טווח המספרים לרמת הלומד, אך שימו לב כי לפתרון התרגיל לא נדרשת מיומנות חישוב בטווח המספרים המוצגים.

1. מבלי לחשב את ערכי הסכומים וההפרשים בכל זוג, החליטו אם הם שווים או לא, ואם לא - איזה מהם גדול יותר ובכמה.

א. 23 + 128	25 + 128
ב. 96+127	95+128
ג. 90+18	93+14
ד. 127-45	127-43
ה. 131-47	129-45
ו. 43-4	43+4

כל סעיף הוא דגם לפעילות עם זוגות מספרים אחרים הממחישים את אותו העיקרון.

2. בכל זוג סכומים או הפרשים שווים הנתון, השלימו את המספר החסר במקום סימן שאלה, ובכך חשבו את ערך של כל הסכום או ההפרש:

א. 23 + 198 = ? + 200

ב. 123 + 248 = 120 + ?

ג. ? - 92 = 18 - 90

ד. 18 - 92 = 20 - ?

כל סעיף הוא דגם לפעילות עם זוגות מספרים אחרים הממחישים את אותו העיקרון.

3. שתי הפתעות בחקר לוח ה־100. התבוננו בלוח ה־100 המכיל מספרים מ־0 עד 99.

א. מספר נקרא מספר פָּלִינְדְרוֹמִי כאשר קריאתו בכיוון ה"הפוך" מביאה לאותה התוצאה, כמו המספר 818 (אך לא 75). מספרים חד־ספרתיים הם, כמובן, מספרים פלינדרומיים, אך נוציא אותם כעת מהדיון (סיניצקי וסיניצקי, 2019).

- איפה נמצאים מספרים פלינדרומיים על לוח ה־100?



- אם נחבר שני מספרים פלינדרומיים, האם ערך הסכום יהיה מספר פלינדרומי?
  אם נקרא סכום של שני מספרים פלינדרומיים "בכיוון הפוך", ערך הסכום לא משתנה. למשל, 44 + 88 = 88 + 44 אך יש עוד זוגות מספרים בלוח ה־100 שערך סכומם לא משתנה בקריאת סכום זה "בכיוון הפוך". למשל, 98 + 34 = 43 + 89.
- על סמך כל סכום של שני מספרים דו־ספרתיים פלינדרומיים, הרכיבו עוד סכומים פלינדרומיים.
- מצאו שיטה למצוא זוגות מספרים אלה על לוח ה־100.

ב. בחרו עשרה מספרים אקראיים על לוח ה־100 כך שיהיה נציג אחד מכל שורה ומכל עמודה של הלוח, ומצאו את סכומם. כעת בחרו עשירייה אחרת עם אותו תנאי (נציג אחד מכל שורה ומכל עמודה). האם הסכומים שיתקבלו יהיו שונים? למה? רמז: הציגו כל מחובר כסכום העשרות השלמות והאחדות שלו, ולאחר מכן השוו את הסכומים (סיניצקי ואילני, 2014).

רשימת המקורות

- משרד החינוך, התרבות והספורט (2025). **תוכנית לימודים חדשה במתמטיקה ליסודי.** ירושלים: המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים. https://pop.education.gov.il/tchumey_daat/matmatika/yesodi/oraat-math/new-curriculum/
- משרד החינוך, התרבות והספורט (2006). **תכנית לימודים במתמטיקה לכיתות א-ו בכל המגזרים.** ירושלים: המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים.
- סיניצקי, א' וסיניצקי, מ' (2019). תרגילי חיבור פלינדרומיים על לוח המאה. **מספר חזק 2000**, 30, 48-53.
- סיניצקי, א' ואילני ב' (2014). **שימור ושינוי: תובנות אלגבריות בעולם המספרים והצורות.** תל-אביב: מכון מופ"ת.
- תירוש, ד', פישביין, א', צמיר, פ', אזהרי, נ', ברש, א' קליין ר' ושני, ב' (1999). **העקביות המתמטית של תלמידים: מיון, מקורות ואסטרטגיות טיפול.** תל-אביב: רמות.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carraher, D.W., Schliemann, A.D. & Schwartz, J. (2007). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput. D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum (pp. 235-272).
- Gowers, T. (Ed.). (2008). *The Princeton companion to mathematics*. Princeton: Princeton University Press.
- Lockhart, P. (2009). A mathematician's lament. *Mathematical Association of America Online*. https://www.mimuw.edu.pl/~pawelst/rzut_oka/Zajecia_dla_MISH_2011-12/Lektury_files/LockhartsLament.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pokutta, S. (2012). Fundamental principles(?) in mathematics. *Sebastian Pokutta's Blog*. https://spokutta.wordpress.com/2012/01/02/fundamental-principles-in-mathematics/
- Schoenfeld, A., & Daro, P. (2024). More math, less "math war". *Science, 383*(6689), 1297-1299.
- Sfard, A. (1998). On two metaphors for learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(2), 4-13.