מספר חצץ 2000

גיליון 37

לזכרה של
פרופ' פרלה נשר
1930-2026



כתב עת להוראת מתמטיקה בבית הספר היסודי | **ספטמבר 2026**

ראש מל"מ אוניברסיטת חיפה: ד"ר שי אולשר

ניהול מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי: פרופ' ראיסה גוברמן וד"ר אתי נוי

חברי המערכת (בסדר א-ב):

ד"ר ג'וני אוברמן ■ ד"ר מיכל איילון ■ ד"ר בת-שבע אילני ■ פרופ' מריטה ברבש ■ פרופ' אביקם גזית ■ פרופ' שרה הרשקוביץ ■ פרופ' מיכל טבח ■ ד"ר חנה לב-זמיר ■ ד"ר אתי נוי ■ ד"ר דורית נריה ■ ד"ר מיכל סוקניק ■ פרופ' איליה סיניצקי ■ ד"ר אבתיסאם עבד אלחאלק ■ ד"ר עדי עראקי ■ ד"ר אלכס פרידלנדר ■ פרופ' פסיה צמיר ■ ד"ר ענת קלמר-שורץ ■ מיכאל שימנוביץ'

עורכת כתב העת: פרופ' ראיסה גוברמן

עורכת אורחת: פרופ' מיכל ירושלמי

עורכת משנה: תמי ניר בוכבינדר

עריכת הלשון: מרים מילשטיין

ייעוץ מתמטי: פרופ' אלי ברגר וראניה ריאן

עיצוב, עימוד, איור ועריכה גרפית: רוית מדמוני

כתובת המערכת:

מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי ■ הפקולטה לחינוך, אוניברסיטת חיפה ■ טל: 04-8240646

■ שד' אבא חושי 199, הר הכרמל חיפה, ת"ד 3338, מיקוד 3103301 ■ email: mathcntr@edu.haifa.ac.il

ISSN (online): 2618-009X ■ ISSN (print): 2618-0081

מרכז מורים ארצי למתמטיקה בחינוך היסודי

المركز القطري لمعلمي الرياضيات في المرحلة الابتدائية

מספר חזק
2000

גיליון מספר 37
ספטמבר 2026

משרד החינוך
מינהל חדשנות וטכנולוגיה
אגף א' STEM

אוניברסיטת חיפה
UNIVERSITY OF HAIFA
جامعة حيفا
הפקולטה לחינוך

מינהלת מל"מ
המרכז הישראלי לחינוך מדעי טכנולוגי ע"ש עמוס דה שליט

מרכז המורים מופעל על ידי אוניברסיטת חיפה עבור משרד החינוך במסגרת מכרז מס' 22/11.2020: הקמה והפעלה של מרכזי מורים ארציים במקצועות הבאים: מדעים, טכנולוגיה ומתמטיקה.

© כל הזכויות שמורות למשרד החינוך

קוֹרְאוֹת יְקָרוֹת שָׁלוֹם,

אנו שמחות להגיש לכם את גיליון מספר 37 של "מספר חזק 2000". המספר 37, כפי שתוכלו לקרוא במאמר הפותח את הגיליון, אינו רק מספר ראשוני; הוא מספר ראשוני חזק, בעל תכונות סימטריות מרתקות המופיעות גם במבנים גאומטריים כמו משושה ומצולע-כוכב. ההתבוננות במספר 37 מזמינה אותנו לחפש את המבנה ואת החוקיות העומדים בבסיס הייצוג המספרי - סוגיה הנמצאת בלב העשייה הפדגוגית והמחקרית בחינוך המתמטי.

אותו חיפוש מרתק אחר המבנה המושגי שמאחורי הסימנים, וההתעמקות בדרכים שבהן ילדים בונים מתוכו משמעות מתמטית, מובילים אותנו אל החלק המרכזי של גיליון זה. חלק זה מוקדש בהערכה עמוקה לזכרה של פרופ' פרלה נשר ז"ל, מן הדמויות המרכזיות והמשפיעות בעיצוב המחקר והעשייה בחינוך המתמטי בישראל. כדי לכבד את מורשתה הענפה, הזמנו את פרופ' מיכל ירושלמי לשמש עורכת אורחת של חלק מיוחד זה. פרופ' ירושלמי איגדה ארבעה מאמרים המדגימים כיצד רעיונות שפיתחה פרופ' נשר ממשיכים להתפתח, להשתנות ולהצמיח שאלות מחקר והוראה חדשות.

לזכרה של פרופ' פרלה נשר

חלק מיוחד זה מוקדש לפועלה של פרופ' פרלה נשר. עבודתה של נשר השתרעה על פני מחקר, הוראה, פיתוח תוכניות לימודים, הכשרת חוקרים ומורים ועיצוב מדיניות חינוכית. חוט מקשר עובר בין תחומי עשייתה השונים: השאיפה להבין כיצד ילדים בונים משמעות מתמטית, מהו המבנה המושגי שהסימנים והפעולות מייצגים, וכיצד ניתן לעצב סביבות למידה ודרכי הוראה יצירתיות הקרובות לעולמו של הילד, וליצור מצבים שבהם המשוב נובע ככל האפשר מן הפעילות עצמה ולא רק מסמכותו של המורה.

ארבעת המאמרים בגיליון אינם מסכמים את מפעלה הרחב של נשר, אלא באים להראות כיצד רעיונות שפיתחה ממשיכים להתפתח ולהצמיח שאלות מחקר והוראה חדשות. כל אחד מהם נוגע בהיבט אחר של מורשתה: השפה והשיח בכיתת לומדי המתמטיקה, פתרון בעיות מילוליות, מקומם של מודלים וייצוגים בבניית מושגים, והאפשרות להשתמש בייצוגים כדי להתחקות אחר החשיבה המתמטית של תלמידים.

במאמרה של פרופ' שרה הרשקוביץ, "**בעיות מילוליות בבית הספר היסודי**", הקשר לעבודתה של נשר הוא הישיר והאישי ביותר. הרשקוביץ, שהייתה תלמידתה ועבדה עימה במשך כארבעה עשורים, מציגה את תפיסת העולם שלמדה ממנה לגבי בעיות מילוליות וממשיכה לפתח אותה מתוך ניסיונה המחקרי והפדגוגי. המאמר מדגיש כי פתרון בעיה מילולית איננו תרגום מכני של מילות מפתח לפעולות חשבון, אלא מעבר מורכב מן השפה הטבעית אל המבנה המתמטי. הבחנה זו ניצבה בלב מחקריה של נשר: היא הראתה כי לרמזים מילוליים אין התאמה חד־ערכית לפעולות מתמטיות, וכי יש לזהות את מבנה העומק של הסיטואציה ולא להסתמך על מילים בודדות. מאמרה של הרשקוביץ ממשיך אפוא מסורת מחקרית זו ומתרגם אותה להוראה, לחומרי למידה ולהכשרת מורים.

מאמרו של פרופ' איליה סיניצקי, "**מודלים, גישה תבניתית וחשיבה מבנית**", עוסק בתפקידם של מודלים מתמטיים ודידקטיים בבניית ידע ובהתפתחות החשיבה המבנית. המאמר נוגע בלב עשייתה המדעית והמעשית של נשר. סיניצקי דן במתח שבין המושג המתמטי המופשט לבין ייצוגיו, ובוחן כיצד מודלים קונקרטיים יכולים לתמוך בהבנה, אך גם כיצד שימוש לא מושכל בהם עלול לטשטש את המבנה המתמטי שאותו הם אמורים לחשוף. דיון זה ממשיך ישירות את הגישה התבניתית שנשר קידמה: החתירה לראות מעבר לביטוי החיצוני את המבנה המתמטי המשותף ולהפוך אותו לנגיש ללומד. אצל סיניצקי רעיון זה מורחב אל החשיבה

המבנית ואל היכולת לראות ביטוי מתמטי כאובייקט שלם - יכולת שהיא בסיס לחשיבה אלגברית מתקדמת.

המאמר של ד"ר אמל קעדאן, פרופ' מיכל ירושלמי ופרופ' דן חזן, "**לראות מעבר לתשובה: ייצוג קרטזי ככלי דיאגנוסטי לזיהוי אסטרטגיות עבודה של תלמידים במשימות של שברים עם תשובות רבות**", ממשיך כיוון אחר בעבודתה של נשר: למידה והוראה של שברים כחלק מסביבת למידה (microworld), שבה השימוש בייצוג מתמטי חושף יחסים ומבנים שאינם נראים בתשובה בודדת. המחברים מציעים לייצג אוסף תשובות של תלמידים בתחום השברים כנקודות במישור הקרטזי, ולהיעזר בכך לזיהוי דפוסים המעידים על אסטרטגיות עבודה, תפיסות נכונות ושגויות וקשיים מושגיים. הקשר לנשר מפורש: סביבת הלמידה מרובת הייצוגים המוצגת במאמר משמשת נקודת מוצא להרחבת תפקידו של הייצוג - מכלי הוראה לכלי דיאגנוסטי בידי המורה. בדרך זו נשמר עיקרון יסודי בגישתה: לא להסתפק בנכונות התשובה, אלא לנסות להבין מה מבנה החשיבה שהוליד אותה, ומתוך כך לתכנן משוב, שיחה מתמטית והמשך הוראה.

מאמרה של פרופ' אילנה לבנברג, "**תרבות הכיתה הישראלית הלומדת מתמטיקה בחינוך העל־יסודי: מאפייני השיח הכיתתי ויחסי כוח בצל בחינות הבגרות**", חושף היבט נוסף של למידה מתמטית - ההקשר החברתי והתרבותי שבו היא מתרחשת. המחקר, שהתבסס על עבודת הדוקטורט של לבנברג שנכתבה בהנחיית פרלה נשר, בוחן את זהותו המקצועית של המורה למתמטיקה דרך הממד האינטראקציוני, המתמטי והתרבותי. השיח הכיתתי מתואר בו לא רק כאמצעי להעברת ידע, אלא כמרחב שבו מתעצבים יחסי כוח, נורמות של השתתפות והזדמנויות לחשיבה מתמטית. ממצאי המחקר מצביעים על מתח בין סמכות, שליטה ופרגמטיות המכוונת לבחינות הבגרות לבין דפוסי קרבה, אחווה ו"דוגריות" ישראלית. גם כאן ניכרת זיקה למורשתה של נשר: ההתעניינות אינה רק במה שהמורה מלמד, אלא גם בתנאים המעודדים את התלמידים לבנות משמעות, לנמק, לשאול ולהיות שותפים פעילים בעשייה המתמטית.

ארבעת המאמרים שונים זה מזה בנושאיהם, בגיל הלומדים שאליהם מתייחסים ובמתודולוגיה המוצגת בהם, אך יחד הם משקפים כמה מן השאלות שהעסיקו את פרופ' פרלה נשר במשך שנות עבודתה: מה פירוש להבין מתמטיקה?; כיצד ניתן לראות מעבר לביצוע הגלוי את המבנה המושגי?; מה מקומם של שפה, ייצוגים ומודלים בבניית ידע?; וכיצד יכולה ההוראה לאפשר לתלמידים להיות שותפים פעילים בתהליך זה?.

נשר עצמה כתבה כי ביקשה לנתח את המושגים הנלמדים, לברר את מקורות הקושי ולפתח אמצעים שיסייעו לתלמידים להגיע להבנה עמוקה. במובן זה, התרומה המשותפת של המאמרים בגיליון אינה רק בהעלאת זכרה, אלא בהמשך הדיאלוג עם הרעיונות שהעמידה לרשות קהילת החינוך המתמטי - רעיונות שממשיכים לעורר שאלות, להניע מחקר ולהזין פיתוח פדגוגי גם כיום.

אנו מזמינות אתכם לצלול אל גיליון המוקדש כולו להוקרה, לחשיבה מתמטית מעמיקה, מבנית ומשמעותית.

קריאה פורה,

פרופ' מיכל ירושלמי - עורכת אורחת של גיליון 37

פרופ' ראיסה גוברמן - עורכת כתב העת

ד"ר אתי נוי - מנהלת מרכז המורים



על המספר 37

המאמר פותח צוהר לתכונותיו המרתקות והייחודיות של המספר 37, ובהן היותו מספר ראשוני חזק וסימטרי. המאמר מציג קשרים מפתיעים בין אריתמטיקה לגאומטריה, למשל העובדה ש־37 הוא גם מספר משושי מרכזי וגם מספר כוכב, וכן את הקשר שלו לכפולות של 3 היוצרות מספרים בעלי ספרות חוזרות. הצעה יישומית לכיתה: מומלץ לאמץ את פעילויות החקר המוצעות במאמר, ובהן "פסיפס המדבקות" או סדרת הפעולות ב"השערת קולץ", ולאפשר לתלמידים לגלות בעצמם חוקיות מתמטית וקשרים בין צורות למספרים, כדי לעורר בהם סקרנות ופליאה מתמטית.

בעיות מילוליות בבית הספר היסודי

המאמר, הנשען על מורשתה של פרופ' פרלה נשר ז"ל, מדגיש כי פתרון בעיה מילולית איננו תרגום מכני של מילות מפתח לפעולות חשבון, אלא מעבר מורכב מן השפה הטבעית אל המבנה המתמטי. במאמר מוצג כיצד שימוש בסכמות מאפשר לנתח סוגי בעיות שונות (כמו בעיות מורכבות דו־שלביות). הצעה יישומית לכיתה: מומלץ שלא להסתפק בחיפוש מילות רמז בטקסט, אלא ללמד את התלמידים להסתייע בסכמות כדי למפות את נתוני הבעיה ולארגן אותם למבנה ברור. מעבר זה מהטקסט המילולי אל הייצוג המתמטי הפורמלי יסייע לתלמידים להבין את סיטואציית הבעיה לעומקה.

מודלים, גישה תבניתית וחשיבה מבנית

המאמר בוחן את תפקידם של מודלים מתמטיים ודידקטיים בהתפתחות החשיבה המבנית, תוך כדי דיון במתח שבין המושג המופשט לייצוגיו. המחבר מדגים כיצד הגישה התבניתית (כדוגמת השימוש במודל ה"בדידים") מתייחסת לערך המספר כאל אורך של קטע, וכיצד מודל זה יכול לסייע בהבנת חוקיות, בהשוואת כמויות והרכבת השלם מחלקיו. שאלה למחשבה: כיצד אנו משתמשים במודלים בהוראה? המאמר מזכיר לנו כי מודלים אינם רק "קביים דידקטיים", אלא כלים שאמורים לפתח אצל הלומד יכולת הפשטה וראייה של ביטוי מתמטי כאובייקט שלם - יכולת המהווה בסיס לחשיבה אלגברית מתקדמת.

לראות מעבר לתשובה: ייצוג קרטזי ככלי דיאגנוסטי לזיהוי אסטרטגיות עבודה של תלמידים במשימות של שברים עם תשובות רבות

המאמר מציע דרך מקורית להערכת הבנת מושג השבר, במשימות הדורשות מציאת שברים בין שני שברי עוגן נתונים. במקום להסתפק בבדיקת נכונותה של תשובה בודדת, המחברים מראים כיצד ייצוג קרטזי של אוסף תשובות התלמיד מאפשר לזהות דפוסים חזותיים המעידים על אסטרטגיית העבודה שלו (כמו שימוש במכנה משותף או יצירת שברים שקולים). הצעה יישומית למורה: מומלץ להשתמש בריבוי תשובות ככלי דיאגנוסטי. התבוננות במכלול התשובות של התלמיד עשויה לחשוף קשיים בתחום הבנת מושגים או תפיסות שגויות, וכך לסייע בתכנון משוב ממוקד והוראה מותאמת אישית, המתייחסת למבנה החשיבה שהוליד את התשובות.

תרבות הכיתה הישראלית הלומדת מתמטיקה בחינוך העל־יסודי: מאפייני השיח הכיתתי ויחסי כוח בצל בחינות הבגרות

המחקר חושף את ההקשר החברתי והתרבותי שבו מתרחשת הלמידה, ובוחן כיצד השיח הכיתתי מעצב יחסי כוח ונורמות של השתתפות. המאמר מציג את הדיסוננס שבו נתון המורה הישראלי: בין הרצון לטשטש פערים היררכיים וליצור קרבה באמצעות סלנג ודיבור "דוגרי", לבין הצורך לשמור על שליטה סמכותית וניהול שיעור פרגמטי המכוון להצלחה בבחינות הבגרות. שאלה למחשבה: האם אנו מאפשרים לתלמידים להיות שותפים פעילים בדיון המתמטי, או שהשיח נשלט באופן בלעדי על ידי המורה וממוקד בהקניית פרוצדורות? מודעות לדפוסי התקשורת שלנו היא הצעד הראשון ליצירת תרבות כיתה המעודדת חשיבה מתמטית עצמאית ומשמעותית.

תוכן עניינים

על המספר:

המספר 37 8
אתי נוי, ראיסה גוברמן

לזכרה של פרופ' פרלה נשר:

פרופ' פרלה נשר - אשת חינוך וחוקרת של למידה והוראת המתמטיקה 18

בעיות מילוליות בביה"ס היסודי 22
שרה הרשקוביץ

מודלים, גישה תבניתית וחשיבה מבנית 34
איליה סיניצקי

לראות מעבר לתשובה: ייצוג קרטזי ככלי דיאגנוסטי
לזיהוי אסטרטגיות עבודה של תלמידים במשימות של שברים עם תשובות רבות 42
אמל קעדאן, מיכל ירושלמי, דניאל חזן

תרבות הכיתה הישראלית הלומדת מתמטיקה בחינוך העל־יסודי
מאפייני השיח הכיתתי ויחסי כוח בצל בחינות הבגרות 52
אילנה לבנברג

על המספר

המספר 37

ד"ר אתי נוי

מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי,
אוניברסיטת חיפה
המכללה האקדמית אורנים

פרופ' ראיסה גוברמן

מרכז המורים הארצי למתמטיקה בחינוך היסודי,
אוניברסיטת חיפה
האקדמית גורדון



המספר 37

אתי נוי וראיסה גוברמן

מספרו של הגיליון הנוכחי הוא **37**. מה הופך את המספר הזה לאחד המספרים המסקרנים במתמטיקה? בכתבה זו נצלול אל מאפייניו הייחודיים, נסקור את תכונותיו המתמטיות, ונראה כיצד ניתן ליישם אותם לפעילויות מתמטיות מעשירות.

תכונות מתמטיות

תכונות של מספרים ראשוניים:

- **37 הוא מספר ראשוני**, כלומר הוא מתחלק רק ב־1 ובעצמו.
- **37 הוא מספר ראשוני סימטרי**. מספר ראשוני נקרא "סימטרי" אם כל תמורה (שינוי סדר) של ספרותיו מניבה מספר ראשוני. היפוך הספרות של 37 נותן 73 וגם הוא מספר ראשוני.
- **37 הוא מספר ראשוני חזק**. לפי תורת המספרים, מספר ראשוני נחשב חזק אם הוא גדול מהממוצע האריתמטי של שני המספרים הראשוניים הסמוכים לו: המספר **הראשוני** הקודם לו והמספר **הראשוני** העוקב אחריו.

המספר 37 גדול מהממוצע של שני המספרים הראשוניים 31 ו־41.

$$\frac{31+41}{2}=36<37$$

מכיוון ש־37 גדול מ־36, הוא נחשב למספר ראשוני חזק.

דוגמאות נוספות למספרים ראשוניים חזקים:

המספר 11: המספרים הראשוניים הסמוכים לו הם 7 ו־13, הממוצע הוא 10 ($10<11$).

המספר 59: המספרים הראשוניים הסמוכים לו הם 53 ו־61, הממוצע הוא 57 ($57<59$).

- ניתן להציג את המספר 37 כסכום של שני מספרים עוקבים:

$$18+19=37$$

- ניתן להציג את המספר 37 כסכום של מספרים טבעיים עוקבים החל מ־1 עד 9 פרט למספר 8:

$$1+2+3+4+5+6+7+9=\mathbf{37}$$

- תכונה מספרית מעניינת:

$$12345679\times 3=\mathbf{37037037}$$

- **הקסם של כפולות שלוש (מספרים חוזרים)**

אחת התכונות הידועות ביותר של המספר 37 היא הקשר שלו לכפולות של 3. אם כופלים את 37 בכפולות של 3 (עד 27), מקבלים תוצאות המורכבות מספרות חוזרות:

תרגיל כפל	המכפלה	סכום הספרות של המכפלה
$\mathbf{37}\times 3$	111	1+1+1=3
$\mathbf{37}\times 6$	222	2+2+2=6
$\mathbf{37}\times 9$	333	3+3+3=9
$\mathbf{37}\times 12$	444	4+4+4=12
$\mathbf{37}\times 15$	555	5+5+5=15
$\mathbf{37}\times 18$	666	6+6+6=18
$\mathbf{37}\times 21$	777	7+7+7=21
$\mathbf{37}\times 24$	888	8+8+8=24
$\mathbf{37}\times 27$	999	9+9+9=27

מן הטבלה עולה, שכל מספר תלת־ספרתי המורכב מספרות זהות (מהצורה nnn) שנחלק אותו בסכום ספרותיו, נקבל תמיד 37.

לדוגמה: במספר 555, סכום הספרות הוא 15.

ולכן: $555\div 15=37$.

אין מדובר בצירוף מקרים. אם נסמן ספרה כלשהי כ־ n, נקבל:

$$100n+10n+n=111n$$

סכום הספרות הוא:

$$n+n+n=3n$$

ולכן:

$$\frac{111n}{3n}=\frac{111}{3}=37$$

נקבל תוצאה קבועה שאינה תלויה בספרה שנבחרה.

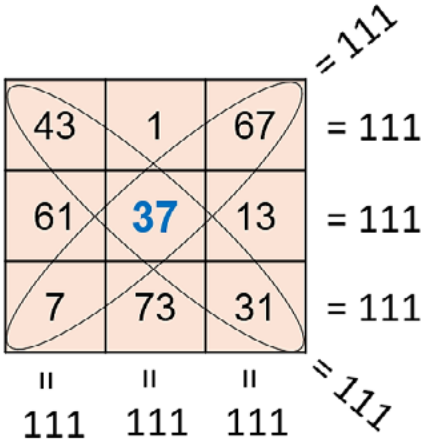


בנוסף, אם נבחן את כפולות 37 היוצרות מספרים תלת־ספרתיים חוזרים (כמו 111,222,333,...), נגלה כי הגורם האחר במכפלה מתקבל תמיד כתוצאה ממכפלת הספרה החוזרת ב־3.

למשל, כדי לקבל את המספר 888 (שבו הספרה החוזרת היא 8), יש לכפול את המספר 37 ב־24 (התוצאה של 3×8).

ריבועי קסם והמספר 37

המספר 37 מופיע בתפקיד מרכזי בריבוע קסם ייחודי מסדר 3×3 המורכב ממספרים ראשוניים (כולל המספר 1, על פי ההגדרה ההיסטורית). בריבוע זה, שבו סכום המספרים בכל שורה, עמודה ואלכסון הוא 111, המספר 37 חייב להופיע במרכזו (Dudeney, 1958). המספרים המרכיבים את הריבוע הם: 1, 7, 13, 31, 37, 43, 61, 67, 73.



העיסוק בריבועי קסם המורכבים ממספרים ראשוניים מתבסס על היסטוריה עשירה, שראשיתה במאה ה־19. בשנת 1900 הציג המתמטיקאי והחידונאי הבריטי הנרי ארנסט דודני (H. E. Dudeney) פתרון לבעיית בניית ריבוע קסם ראשוני מסדר 3×3 המורכב ממספרים ראשוניים. בריבוע זה מתקבל קבוע קסם של המספר 111, והמספר 37 ממוקם במרכז המבנה.

מעבר לשיטת ניסוי וטעייה, ניתן לזהות אסטרטגיה סדורה לבניית הריבוע. מאחר שהמספר המרכזי הוא 37, וסכום המספרים בכל שורה, עמודה ואלכסון הוא 111, נובע מכך שכל זוג מספרים הניצבים זה מול זה ביחס למרכז חייב להסתכם ב־74 (111-37=74). בהתאם לכך, ניתן לאתר זוגות משלימים, כמו 73 ו־1, או 67 ו־7, ולמקם אותם במבנה הריבוע.

חשוב לציין כי בתקופתו של דודני הייתה מקובלת הגדרה שונה מזו הנהוגה כיום: המספר 1 נחשב בעיני מתמטיקאים רבים למספר ראשוני. לכן הריבוע של דודני נחשב באותה עת לפתרון תקף. רק במחצית המאה ה־20 התקבעה ההגדרה המודרנית, שלפיה המספר 1 אינו ראשוני ואינו פריק (בהתאם למשפט היסודי של האריתמטיקה). עקב שינוי זה הריבוע ההיסטורי של דודני אינו עונה עוד על הדרישה המודרנית לריבוע קסם המורכב ממספרים ראשוניים, אך הוא נותר עדות מרתקת להיסטוריה של המתמטיקה.

37 הוא מספר כוכב

מספר כוכב הוא מספר של נקודות שניתן לסדרן בצורת משושה בעל שישה קודקודים (צורת מגן דוד). זוהי צורה גיאומטרית סימטרית הנבנית סביב נקודה מרכזית אחת. סדרת המספרים הכוכביים הראשונים היא: 1, 13, **37**, 73, 121, וכן הלאה.

מבחינה גיאומטרית, מגן דוד נוצר משילוב של שני משולשים החופפים זה לזה. כדי ליצור מבנה כוכבי מושלם, ה"ליבה" (המשושה המרכזי הנוצר במפגש בין משולשים שווי־צלעות) צריכה להיות בגודל המתאים להוספת קודקודים בצורה סימטרית.

הנוסחה הכללית למציאת מספר כוכב (S_n) היא:

$$S_n=6n(n-1)+1$$

שבה המשתנה n מייצג את מספר השלב בבניית המבנה (מיקום האיבר בסדרה). ככל ש־n גדל, מתווספת למבנה מעטפת חיצונית של קודקודים.

הסימון S_n מייצג את סך כל הנקודות המרכיבות את הכוכב בשלב ה־n.

המספרים הכוכביים הראשונים מתקבלים באופן הבא:

עבור $n=1$ (השלב הראשון):

$$S_1=6\times1\times(1-1)+1=1$$

בשלב זה מתקבלת נקודת ליבה בודדת במרכז.



עבור n=2 (השלב השני):

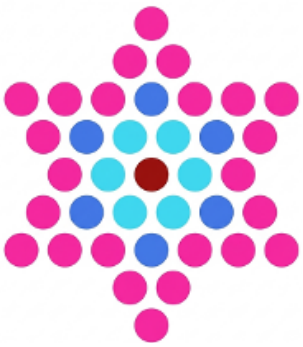
S_2=6×2×(2-1)+1=**13**



בשלב זה נוצר כוכב קטן המורכב מ־13 נקודות.

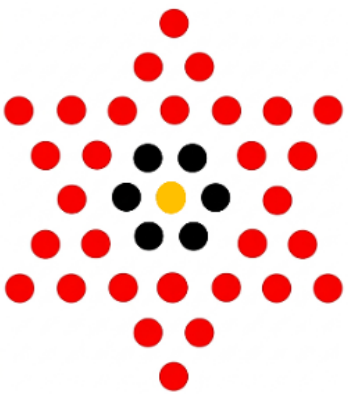
עבור n=3 (השלב השלישי):

S_3=6×3×(3-1)+1=**37**



מכאן ש־37 הוא המספר הכוכבי השלישי בסדרה.

להלן איור המדגים כיצד ניתן לסדר 37 נקודות ליצירת מבנה מדויק של כוכב בעל שישה קודקודים. במרכז נמצאת נקודה אחת, וסביבה מסודרות הנקודות בשכבות סימטריות: תחילה טבעת פנימית היוצרת משושה, ולאחריה שכבה חיצונית המשלימה את צורת הכוכב. המבנה כולו מדגים סידור גיאומטרי אחיד וסימטרי של 37 נקודות.



37 הוא מספר משושי מרכזי

בניגוד למשושה "חלול" המייצג רק את "מסגרת" הצורה, מספר משושי מרכזי מייצג סידור סימטרי של נקודות הממלאות משושה "מלא", הנבנה בשכבות סביב נקודה מרכזית אחת.



הנוסחה למציאת המספר המשושי המרכזי ה־n, המסומן כ־H_n, היא:

$$H_n=3n(n-1)+1$$

שבה n מייצג את מספר השלב (או מספר השכבה במבנה, ו־H_n מייצג את ערכו של המספר המשושי המרכזי בשלב זה (כלומר, סך כל הנקודות בצורה).

אם נבחן את השלבים של בניית המבנה המשושי המרכזי עבור n=4, נראה כי הוא מורכב משכבות המתווספות זו לזו בהדרגה[1]:

שלב 1 (n=1):

$$H_1=3\times1\times(1-1)+1=1$$

נקבל נקודת ליבה אחת במרכז.

שלב 2 (n=2):

$$H_2=3\times2\times(2-1)+1=7$$

תוספת של טבעת משושית בת 6 נקודות סביב נקודת המרכז. סך הכול 7 נקודות.

שלב 3 (n=3):

$$H_3=3\times3\times(3-1)+1=19$$

תוספת של טבעת משושית נוספת בת 12 נקודות. סך הכול 19 נקודות.

---

1. המספר 37 מייצג **שתי צורות גיאומטריות שונות**: הוא **המספר הכוכבי השלישי** S_3=37 שכן כדי לבנות מגן דוד נדרשים שלושה שלבים בלבד להגיע ל־37 נקודות, והוא **גם המספר המשושי המרכזי הרביעי** H_4=37, מכיוון שלבניית משושה "מלא" נדרשות 4 שכבות כדי להגיע ל־37 נקודות.



שלב 4 (n=4):

H_4=3×4×(4-1)+1=**37**

תוספת של טבעת חיצונית בת 18 נקודות. סך הכול 37 נקודות.

אם נחבר את כל השכבות המרכיבות את השלב הרביעי:

1+6+12+18=**37**

נקבל בסך הכול 37 נקודות.

ניתן לראות כי בכל שלב (החל מהשכבה השנייה), מספר הנקודות המתווסף למבנה גדל בכפולות של 6. החוקיות היא פשוטה: בכל פעם מתווספת טבעת משושית חדשה העוטפת את המבנה הקיים, וכך נוצרת סדרה של הפרשים קבועים: 6, 12, 18, 24 וכן הלאה. מבנה זה מעניק למספר 37 את הסימטריה המושלמת המאפיינת אותו, והופך אותו לדוגמה קלאסית של הקשר ההדוק שבין אריתמטיקה לגיאומטריה.

הקשר המפתיע בין המספר המשושי למספר הכוכב במקרה של 37

אחת התכונות המרתקות ביותר של המספר 37 היא הקשר הישיר בין היותו מספר משושי מרכזי לבין היותו מספר כוכב. קשר זה ממחיש כיצד כמות זהה של נקודות יכולה להתארגן בשני מבנים גיאומטריים שונים לחלוטין.

איך הופך משושה לכוכב?

ניתן להבין את הקשר הגיאומטרי בין המבנים באמצעות בנייה הדרגתית בשלבים: נתחיל ממשושה מרכזי המורכב מ־19 נקודות (H_3=19). אל כל אחת משש צלעותיו של המשושה הקיים נוסיף משולש קטן המורכב מ־3 נקודות, המוסיפות למבנה עוד 18 נקודות (6×3=18).

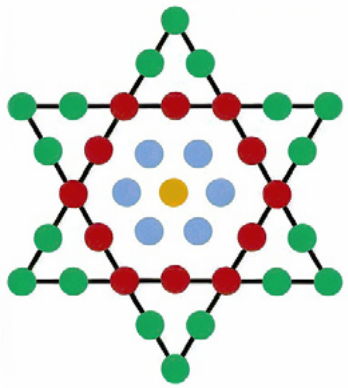
החיבור בין ליבת המשושה לבין ששת המשולשים הללו יוצר מבנה של כוכב (מגן דוד), המכיל בסך הכל 37 נקודות (S_3=37):

37	=	18	+	19
מספר כוכב		תוספת משולשים		משושה מרכזי

נסתכל על משושה מרכזי בעל 19 נקודות:



נוסיף למשושה 6 משולשים (3 נקודות בכל משולש) ונקבל כוכב בעל 37 נקודות:



תופעה זו אינה מקרית. היא מדגימה את העושר של התכונות המתמטיות המאפיינות את המספר 37, המסוגל "ללבוש" צורות שונות תוך כדי שמירה על סימטריה מרכזית קבועה. עבור תלמידים וחוקרים זהו רגע של גילוי שבו האריתמטיקה והגיאומטריה מתמזגות לכדי שלמות אחת.

37 והמחזוריות העשרונית

המספר 37 מסתיר בתוכו תכונה מעניינת המתגלה כאשר הופכים אותו לשבר עשרוני. תכונה זו קשורה למבנה של המספרים המחזוריים ולכפולות של המספר 9.

המחזור של 37:

אם נחלק 1 ב־37, נקבל שבר עשרוני מחזורי:

$\frac{1}{37}$=0.027027027....

שבר עשרוני מחזורי הוא מספר שבו קבוצת ספרות מסוימת חוזרת על עצמה שוב ושוב עד אינסוף. במקרה של 37, המחזור המופיע הוא 027.



הקשר למספר 9:

אם נתבונן בספרות המחזור של 37 (027), נגלה קשר מפתיע למספר 9:

- המספר 27 הוא כפולה של 9 (3×9=27),
- סכום הספרות של המחזור הוא 9 (0+2+7=9).

הסיבה למחזוריות המיוחדת הזו טמונה בקשר ההדוק שבין 37 לבין המספר 999.

מכיוון ש־

$$\mathbf{37}\times 27=999$$

נוכל לייצג את השבר באופן הבא:

$$\frac{1}{37}=\frac{27\times 1}{37\times 27}=\frac{27}{999}$$

$$\frac{27}{999}=0.027027027....$$

שבר שהמכנה שלו מורכב אך ורק מהספרה 9 (כמו 99, 999 וכו') יוצר מספר עשרוני שבו הספרות החוזרות הן ספרות המונה. במקרה שלנו, מכיוון שהמכנה הוא 999 (הבנוי משלוש ספרות), המחזור יורכב משלוש ספרות. לכן עבור המונה 27 המחזור יהיה 027, והמספר העשרוני יהיה 0.027027027....

באותו אופן ניתן לראות כיצד כפולות המונה קובעות את הספרות המופיעות במחזור השבר:

$$\frac{3}{37}=\frac{54}{999}=0.054054...$$

$$\frac{10}{37}=\frac{270}{999}=0.270270...$$

$$\frac{26}{37}=\frac{702}{999}=0.702702...$$

37 ומשפט פרמה: סכום של שני ריבועים

אחת מתכונותיו הייחודיות של המספר 37 קשורה למשפט פרמה על סכום של שני ריבועים. המשפט קובע כי מספר ראשוני ניתן להצגה כסכום של שני מספרים ריבועיים אם ורק אם הוא משאיר שארית 1 בחלוקה ל־4 (כלומר, הוא מהצורה $4k+1$, כאשר k הוא מספר שלם).

מכיוון ש־37 הוא מספר ראשוני, נבדוק את השארית המתקבלת בחלוקה ל־4:

37÷4=9 (שארית 1)

לכן, לפי המשפט, מכיוון שהשארית היא 1, קיימת בהכרח דרך להציג את 37 כסכום של שני מספרים ריבועיים.

המספרים הריבועיים המתאימים במקרה זה הם 36 ו־1:

$$\mathbf{37}=36+1=6^2+1^2$$

דוגמאות לפעילויות הקשורות במספר 37

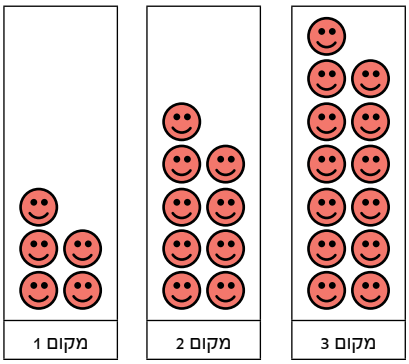
פעילות 1 - פסיפס המדבקות של נועה

נועה מעצבת סדרת מלבנים באמצעות מדבקות צבעוניות, לפי חוקיות קבועה:

במלבן הראשון היא הדביקה 5 מדבקות.

במלבן השני היא הדביקה 9 מדבקות.

במלבן השלישי היא הדביקה 13 מדבקות.



ענו על השאלות הבאות:

א. כמה מדבקות נחוצות לנועה עבור המלבן שבמקום הרביעי?
וכמה עבור המלבן שבמקום השישי?

ב. באיזה מקום בסדרה יופיע המלבן המורכב מ־**37** מדבקות?

ג. נסו לנסח חוקיות במילים: כיצד ניתן לדעת את מספר המדבקות שיהיו בכל מלבן מבלי לצייר אותו?

<u>תשובות:</u>

א. ניתן לראות כי בכל שלב בסדרה, מספר המדבקות גדל ב־4 (זהו ההפרש הקבוע של הסדרה). לכן: במקום הרביעי יהיו 17 מדבקות (13+4=17). נמשיך את הסדרה בצעדים של 4 - במקום החמישי 21 מדבקות ובמקום השישי נגיע ל־25 מדבקות.



ב. מציאת מקומו של המספר 37:
דרך אחת היא להמשיך להוסיף 4 עד שנגיע לערך המבוקש (מקום 7: 29 מדבקות, מקום 8: 33 מדבקות, מקום 9: 37 מדבקות).
דרך שנייה היא ההפרש בין מספר המדבקות במלבן המבוקש (37 מדבקות) למספר המדבקות במלבן הראשון (5 מדבקות) שהוא 32 (37-5=32). מכיוון שכל "קפיצה" שווה ל־4 מדבקות, נחלק את המרחק ב־4 ונקבל 8 (32÷4=8). מכיוון שנדרשו 8 קפיצות מהמקום הראשון נגיע למקום התשיעי בסדרה.

ג. ניסוח החוקיות:
ניסוח מילולי: מתחילים מ־5 מדבקות, ובכל שלב מוסיפים עוד 4 מדבקות.
ניסוח אלגברי: מספר המדבקות שווה למספר המקום כפול 4 בתוספת 1 ($4n+1$).

פעילות 2 - אתגר הריצוף של 37 אריחים

דמיינו שברשותכם **37** ריבועי אריחים אשר חופפים זה לזה. אורך הצלע של כל אריח (משבצת) הוא יחידת אורך אחת. עליכם לרצף תחום פנימי של מצולע על ידי שימוש בכל האריחים, לפי הכלל הבא:
כל אריח חייב להיות צמוד לאריח אחר לאורך צלע שלמה (כלומר, המצולע המתקבל חייב להיות רציף ומחובר).
ענו על השאלות הבאות:

א. סדרו את 37 האריחים כך שהיקף המצולע יהיה הקטן ביותר האפשרי. מהו ההיקף שהתקבל?
ב. סדרו את 37 האריחים כך שהיקף המצולע יהיה הגדול ביותר האפשרי. מהו ההיקף שהתקבל?
ג. הסבירו במילים שלכם: כיצד משפיע מבנה המצולע על היקפו למרות שהשטח נשאר קבוע?

<u>תשובה:</u>

א. כדי לקבל היקף מינימלי עלינו לשאוף למצולע "צפוף" ככל האפשר, המפחית את מספר הצלעות החשופות כלפי חוץ. המבנה הקרוב ביותר לריבוע עבור 37 אריחים הוא ריבוע של 6×6 אריחים (היקפו 24 יחידות אורך) בתוספת אריח אחד המוצמד לאחת מצלעותיו. הצמדת האריח ה־37 מוסיפה שתי יחידות אורך להיקף החיצוני (צלע אחת שלו "מכסה" צלע קיימת ושתיים נותרות בחוץ). לכן ההיקף המינימלי: 26 יחידות אורך.
לדוגמה:



ב. כדי להגדיל את ההיקף עלינו ליצור מבנה "פתוח" עם כמה שפחות צלעות משותפות בין האריחים. המבנה האידיאלי לכך הוא שורה אחת ארוכה (מלבן של 1×37). במבנה זה לכל אריח יש שתי צלעות חשופות, בתוספת שתי צלעות בקצוות השורה.
חישוב ההיקף: 37×2+2=76. היקף מקסימלי הוא 76 יחידות אורך.

ג. ניתן להסיק כי ההיקף תלוי במספר הצלעות המשותפות. ככל שהמצולע "צפוף" יותר, מתקבלות יותר צלעות משותפות המבטלות זו את זו במדידת ההיקף, ולכן ההיקף קטן. ככל שהמצולע "מאורך" יותר או "מפוזר" יותר, מתקבלות פחות צלעות משותפות בין האריחים, ולכן נותרות יותר צלעות חשופות וההיקף גדל.

פעילות 3 - תעלומת המספרים האקראיים

(Ferguson, 1989; Muller, 2021)

<u>המשימה:</u>

בקשו מ־20 אנשים שונים לבצע את הפעולה הבאה:
בחרו במהירות מספר דו־ספרתי בין 1 ל־50, העונה על שני התנאים הבאים:

- שתי הספרות של המספר שונות זו מזו
- שתי הספרות הן אי־זוגיות (למשל: 15 או 31).

אספו את התשובות והזינו את הנתונים לגיליון אלקטרוני (כגון Excel או Google Sheets). לאחר מכן צרו דיאגרמת עמודות המציגה את השכיחות של כל מספר שנבחר.

הערה למורה: ניתוח התשובות צפוי להראות כי המספר **37** נבחר בתדירות גבוהה משמעותית משאר האפשרויות. מחקרים דומים שנערכו בעולם (כמו אלו



של Ferguson או Muller) מאששים כי המספר 37 מופיע שוב ושוב כ"זוכה" הגדול בניסויים מעין אלו.
ממצא זה הוא בסיס לדיון עמוק על האופן שבו בני אדם תופסים ויוצרים אקראיות. כאשר אדם מתבקש לבחור מספר "אקראי", המוח שלו מנסה להימנע מתבניות בולטות. מספרים בעלי ספרות זהות (כמו 11 או 33) נפסלים, מספרים זוגיים נתפסים כ"מסודרים מדי", ומספרים קטנים (כמו 13) נתפסים כנפוצים מדי.
למה נבחר דווקא 37? במגבלות הניסוי קבוצת המספרים האפשרית בטווח שבין 1 ל־50 היא מצומצמת (13, 15, 17, 19, 31, 35, 37, 39). בתוך הקבוצה הזו, 37 נתפס על ידי המוח האנושי כ"מפוזר" והכי פחות צפוי. הוא אינו תוצאה בסיסית בלוח הכפל, ואינו מתקשר לתבנית ויזואלית מוכרת. לכן הוא נבחר כ"ייצוג האידיאלי" של האקראיות.
הניסוי מדגים את הפער בין בחירה אינטואיטיבית (המונחית על ידי הטיות קוגניטיביות) לבין אקראיות סטטיסטית אמיתית, שבה לכל אחד משמונת המספרים הללו יש סיכוי שווה של 12.5% להיבחר.

פעילות 4 - תעלומת "החור השחור" (השערת קולץ)

במתמטיקה קיימת חוקיות מסתורית המכונה לעיתים "חור שחור". לא משנה מאיזה מספר טבעי נתחיל, **נראה שבסופו של תהליך תמיד נגיע אל המספר 1**.
חוקי המשחק:

1. אם המספר שבידכם **זוגי** - חלקו אותו ב־2.
2. אם המספר שבידכם **אי־זוגי** - הכפילו אותו ב־3 והוסיפו 1.

המשימה:
התחילו מהמספר **37**, בצעו את שלבי החישוב לפי הכללים שלב אחר שלב עד שתגיעו למספר 1.

- כתבו את רצף המספרים שקיבלתם ואת מספר הפעולות (הצעדים) שאליו הגעתם.
- כמה פעולות חישוב (צעדים) נדרשו עד שהגעתם אל המספר 1?
- התבוננו ברצף המספרים שנוצר: האם לאורך שלבי החישוב המספרים רק הולכים וקטנים, או שהם גם גדלים בשלבי החישוב?

תשובה:
התהליך שעובר המספר 37 מדגים היטב את ה"תזזיתיות" של השערת קולץ - המספר עולה ויורד עד שהוא מגיע ל־1.
מתחילים מהמספר 37 שהוא מספר אי־זוגי. בסך הכול יידרשו **21 צעדים** כדי להגיע ל־1. אפשר לקרוא על השערה זו כאן.

- המספר ההתחלתי: 37 - מספר אי־זוגי
  הפעולה: 37×3+1=112 (צעד 1)
- המספר: 112 - מספר זוגי
  הפעולה: 112÷2=56 (צעד 2)
- המספר 56 - מספר זוגי
  הפעולה: 56:2=28 (צעד 3)
- המספר 28 - מספר זוגי
  הפעולה: 28:2=14 (צעד 4)
- המספר 14 - מספר זוגי
  הפעולה: 14:2=7 (צעד 5)
- המספר 7 - מספר אי־זוגי
  הפעולה 7×3+1=22 (צעד 6)
- המספר 22 - מספר זוגי
  הפעולה: 22:2=11 (צעד 7)
- המספר 11 - מספר אי־זוגי
  הפעולה: 11×3+1=34 (צעד 8)
- המספר 34 - מספר זוגי
  הפעולה: 34:2=17 (צעד 9)
- המספר 17 - מספר אי־זוגי
  הפעולה: 17×3+1=52 (צעד 10)
- המספר 52 - מספר זוגי
  הפעולה: 52:2=26 (צעד 11)
- המספר 26 - מספר זוגי
  הפעולה: 26:2=13 (צעד 12)
- המספר 13 - מספר אי־זוגי
  הפעולה: 13×3+1=40 (צעד 13)
- המספר 40 - מספר זוגי
  הפעולה: 40:2=20 (צעד 14)
- המספר 20 - מספר זוגי
  הפעולה: 20:2=10 (צעד 15)
- המספר 10 - מספר זוגי



הפעולה: 10:2=5 (צעד 16)

- המספר 5 - מספר אי־זוגי

הפעולה: 5×3+1=16 (צעד 17)

- המספר 16 - מספר זוגי

הפעולה: 16:2=8 (צעד 18)

- המספר 8 - מספר זוגי

הפעולה: 8:2=4 (צעד 19)

- המספר 4 - מספר זוגי

הפעולה: 4:2=2 (צעד 20)

- המספר 2 - מספר זוגי

הפעולה: 2:2=1 (צעד 21)

מגמת השינוי: המספרים אינם קטנים בעקביות לאורך תהליך בניית הרצף. כבר בצעד הראשון המספר "קופץ" מ־37 ל־112, ובשלבי החישוב הוא חווה תנודות רבות (עליות ומורדות), עד שהכללים "מכניעים" אותו בסופו של דבר ומובילים אל המספר 1.

פעילות 5 - "יוצרים 37"

לפניכם חמישה מספרים: 2,3,4,5,6

עליכם לבנות תרגיל חשבוני שהתוצאה שלו היא בדיוק **37**.

כללים:

- חובה להשתמש בכל חמשת המספרים.
- ניתן להשתמש בכל מספר פעם אחת בלבד.
- מותר להשתמש בסוגריים ובכל ארבע פעולות החשבון (: , × , - , +) לפי הצורך.

תשובה:

אפשרויות לתרגילים שתוצאתם שווה ל־37:

6×4+5×3-2=37

6×3×2+5-4=37

5×4×2-6+3=37

5×(6+4-2)-3=37

5×(6×2-4)-3=37

5×(6+3)-4×2=37

(6+4)×3+5+2=37

(5+2)×4+6+3=37

ביבליוגרפיה

- Dudeney, H. E. (1958). *Amusements in mathematics* (Vol. 473). North Chelmsford, USA: Courier Corporation.
- Muller, D. (2021). *What Is The Most Random Number?* (Veritasium Project). Retrieved from https://www.upworthy.com/pick-a-random-number-between-100-you-probably-chose-37-and-there-s-a-big-reason-for-that/#:~:text=%E2%80%9CWe%20can%20argue%20special%20coincidences,ll%20probably%20see%2037%20everywhere.
- Ferguson, T. S. (1989). Who solved the secretary problem?. *Statistical science*, 4(3), 282-289.


37 = 24 + 13
37
37 × 3 = 111
37 × 6 = 222
73 1 37
13 37 67
31 61 43


57×3
73×37
59×57
999
999


3
7



פרופ' פרלה נשר

1930-2026

לזכרה של
פרופ' פרלה נשר[1]
אשת חינוך וחוקרת של למידה והוראת המתמטיקה



פרלה נשר נולדה בשנת 1930 בתל אביב. בצעירותה, ברוח האידיאולוגיה החלוצית עברה לקיבוץ נירים, והתנסתה בעבודה חקלאית, אך עד מהרה התבררה נטייתה האמיתית: החינוך. בקיבוץ ייסדה וניהלה את בית הספר האזורי "מעלה הבשור" בנגב המערבי, הראשונה בשורה ארוכה של יוזמות חינוכיות פורצות דרך שלה.

ראשית דרכה המקצועית

מתוך פועלה ועשייתה בשדה החינוך צמח עניינה המחקרי, והיא יצאה ללימודי דוקטורט באוניברסיטת הרווארד שבארה"ב. שילוב זה של ניסיון מעשי בהוראה עם השכלה אקדמית מעמיקה עיצב את כל המשך דרכה: פרלה נשר מעולם לא ראתה בתיאוריה החינוכית עניין מנותק מן המעשה, ומחקרה תמיד נשען על שאלות שהועלו מקרב התלמידים בכיתה.

עם סיום לימודיה חזרה ארצה והצטרפה לצוותים שעיצבו את תוכניות הלימודים במתמטיקה במשרד החינוך ובמרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח), שאותם ליוותה במשך שנים ארוכות.

בית הספר לחינוך באוניברסיטת חיפה

נשר לימדה בבית הספר לחינוך באוניברסיטת חיפה ובין השנים 1983-1988 עמדה בראשו. בעבודתה האקדמית שילבה מחקר, הוראה והנחיית סטודנטים לתארים מתקדמים, ועסקה בעיקר בקשר שבין לשון למתמטיקה: משמעות המספר, הקשר בין שפה טבעית לשפה המתמטית, בדגש על פתרון שאלות מילוליות במתמטיקה, התהליכים הקוגניטיביים המעורבים בפתרון בעיות מילוליות, שיטות אפקטיביות להערכת תלמידים והוראה יחידנית.

באוניברסיטת חיפה הקימה, יחד עם מרי קופר ז"ל, את "המעבדה לחשבון" - מרכז לחומרי הוראה והדגמה מהארץ ומהעולם. המעבדה, הפעילה עד היום, הפכה עם השנים למודל שהשפיע על הקמת מרכזי מתמטיקה נוספים.

תובנות חינוכיות

פרלה נשר ניסחה שלושה צירים מרכזיים להשקפתה אשר נובעים מיחסי הלשון הטבעית והלשון המתמטית, ואותם חקרה לראשונה בעבודת הדוקטורט בהרווארד:

- "המספרים המשמשים אותנו בשפה הטבעית שונים במעמדם האונטולוגי מן המספרים בשפה המתמטית." (נשר, 2017, עמ' 24).
- "יש ללמד את מבנה העומק המתמטי וממנו לגזור את התיאורים הסמנטיים והתחביריים השונים של השפה המתמטית." (נשר, 2017, עמ' 24).
- ילדים בביה"ס היסודי נזקקים להמחשות קונקרטיות כדי לעסוק בעצמים מופשטים, ויש לבחור המחשות ולארגנן כמערכת למידה שתאפשר להבליט את היופי שבמבנים המתמטיים.

מתוך המחקר וההוראה ארוכי השנים גיבשה נשר עקרונות נוספים שליוו את עבודתה:

- "אין למידה מלאה ללא התמודדות עם שגיאות אפשריות בסביבת המושג הנלמד." (נשר, 2017, עמ' 2).
- "התלמיד צריך לקבל משוב על פעילותו מן הפעילות עצמה ולא מן האוטוריטה של המורה." (נשר, 2017, עמ' 2).
- "יש להציג בפני הילד את הדגשים החשובים במתמטיקה על ידי הוראת מבנה העומק של המושגים, ומכאן הגישה התבניתית." (נשר, 2017, עמ' 13).
- "יש לחפש דרכים יצירתיות להביא את נושאי המתמטיקה לילדים צעירים בצורה מהנה הקרובה לעולמם." (נשר, 2017, עמ' 13).

מעורבות ציבורית

פרלה נשר ראתה חשיבות רבה במעורבות בשדה החינוך עצמו, ולכן קיבלה על עצמה תפקידים ציבוריים שונים. היא כיהנה כחברה במועצה להשכלה גבוהה (מל"ג), ובשנים 1987-1989 עמדה בראש הארגון הבין־לאומי

---

1. סוכם מתוך נשר, פ'. (2017). "טיפה משלי לים הגדול" ונערך בידי מיכל ירושלמי ותמי ניר-בוכבינדר, יולי 2026.

המרכזי לחקר הלמידה המתמטית, ה־PME.
בשנים 1992-1996 כיהנה כמדענית הראשית של משרד החינוך והתרבות, ובכך הייתה הראשונה בתפקיד זה מתחום המתמטיקה. בכהונתה זו הובילה כמה רפורמות משמעותיות: ערכה, לאחר שנים רבות, את מפקד תנועות הנוער ששימש לחלוקת תקציבי משרד החינוך; יזמה שינוי בהגדרת "טעוני הטיפוח", ובנתה סולם חדש להעדפת בתי ספר בפריפריה; קידמה מודל של משוב פנימי בבתי הספר לצד משוב ארצי מדגמי בלבד. בבסיסם של כל אלה עמד עיקרון אחד ברור שלאורו פעלה: קידום גישה שוויונית שפועלת לטובת השכבות החלשות בחברה.

לאחר פרישתה

גם לאחר פרישתה מהתפקידים הרשמיים המשיכה פרלה נשר להדריך סטודנטים, לחקור, ללמוד ולפעול בתחומים מגוונים. בשנת 2017 כתבה סיכום אישי של דרכה המקצועית בשם "טיפה משלי לים הגדול", ובו שיקפה במבט צלול ואופייני לה את מסלול חייה. עיסוקיה, כתבה, "התגלגלו מאליהם", ובחרו בה יותר משהיא בחרה בהם. היא תיארה כיצד נהנתה ללמוד דבר חדש בכל יום, וכיצד רבים מן המחקרים שערכה מתוך סקרנות גרידא מעולם לא פורסמו. תענוג מיוחד מצאה בעיון בחומר אמפירי גולמי בחיפוש אחר חוקיות. במבט לאחור, ציינה בסיפוק כיצד יוזמות שהגתה הפכו למוסדות של קבע שהמשיכו לפעול גם שנים רבות אחרי שחדלה מלהובילן, סימן לכך שענו על צורך אמיתי.

פטירתה ומורשתה

פרלה נשר נפטרה בביתה, שלווה וצלולה. היא הותירה אחריה את בנותיה שלומית ומיכל, חתנים, נכדות ונינים. היא הייתה מדענית פורצת דרך - דמות שהטביעה חותמה הן על עולם המחקר האקדמי במתמטיקה חינוכית, והן, בפועל ממש, על מדיניות החינוך בישראל. מורשתה מתקיימת בכל תלמיד שממשיך את דרכה, במעבדה לחשבון הפעילה עד היום, ובגישה החינוכית שהנחילה - שלמידה אמיתית נבנית מתוך התנסות וחיפוש סקרני.

יהי זכרה ברוך.

ראיונות עם פרופ' פרלה נשר

- ליברמן, צ' והופמן, ר'. (2010). התייחסות אישית לכל תלמיד כדי למנוע חסמים לימודיים ותחושת כשלון. *החינוך וסביבו, ל"ב*, 239-245.
- ספרד, א' ופרל, ח'. (1995). שיחה עם פרופ' פרלה נשר - המדענית הראשית של משרד החינוך. *על"ה 16*, 25-31.
- שיר, ק' וביטון, י'. (2019). פיתוח תחושת המסוגלות בלימודי החשבון בבית הספר היסודי התאמת הלימוד ליכולת ולקצב של כל תלמיד - אישית לוחצת עם פרופסור פרלה נשר. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי*, *7*, 12-15.

גישתה התיאורטית ומאמרים שכתבה

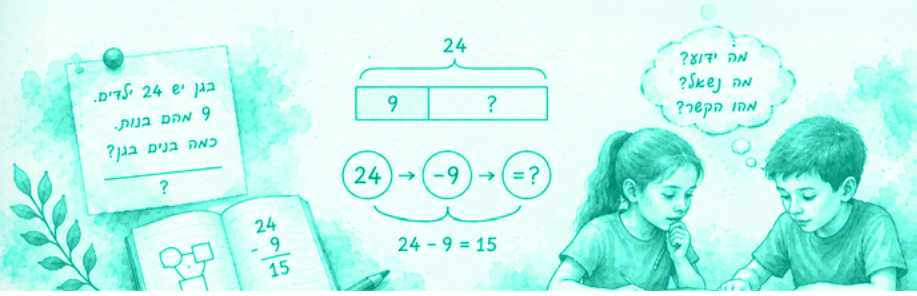
- אוסין, ל' ונשר, פ'. (1979). הוראת חשבון בסיוע מחשב בבית-הספר היסודי. *עיונים בחינוך: כתב עת לעיון ומחקר בחינוך*, *24*, 93-108.
- אוסין, ל' ונשר, פ'. (1988). בדיקה השוואתית של ביצועי תלמידים בחשבון: מחשב "תואם" לעומת נייר ועיפרון. *מחשבים בחינוך 4-5*, 37-48.
- ארנון, א', נשר, פ' ונירנברג, ר'. (2004). איפה פוגשים השברים את השקולים להם? האם יכול מפגש זה להתרחש בבית הספר היסודי? חלק א. *על"ה 31*, 40-50.
- דבורי, ש'. (2013). *התפתחות המספר בקרב ילדים בגילאי 2-5*. עבודת גמר לתואר שני, אוניברסיטת חיפה. (עבודה בהנחיית פרלה נשר ומשה אהוד ברוך).
- הרשקוביץ, ש' ונשר, פ'. (2002). כלים לטיפוח יכולת הניתוח: אסטרטגיות לפתרון בעיות מילוליות באריתמטיקה. *על"ה 28*, 15-25.
- ז"ק יהודה, א'. (2001). *הקניית מושג המספר בעזרת בדידי קוויזנר ותפיסת המשמעות הכמותית של המספר*. עבודת גמר לתואר שני, אוניברסיטת חיפה. (עבודה בהנחיית פרלה נשר).
- נשר, פ'. (1974). "מספרים וביטויים לשוניים של מספרים". *עיונים בחינוך*, *2*, 117-124.
- נשר, פ'. (1983). תהליכים קוגניטיביים הקשורים בפתרון בעיות מילוליות באריתמטיקה. בתוך מ' ניסן וא' לסט (עורכים), בין חינוך לפסיכולוגיה (עמ' 425-407). ירושלים: מאגנס, האוניברסיטה העברית.
- נשר, פ'. (2007). מתמטיקה בחינוך היסודי - מנין ולאן? *על"ה 37*, 16-23.
- נשר, פ'. (2017). *טיפה משלי לים הגדול*. הוצאה עצמית.
- Nesher, P. (1972). *From ordinary language to arithmetic language in the primary grades*. Unpublished Doctoral Dissertation, Harvard University, 102 pp. (University Microfilm No. 76 10, 525).
- Nesher, P. (1989). "Microworlds in Mathematical Education: A Pedagogical Realism", in *Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser*. L. B. Resnick (Ed.), Lawrence Erlbaum Association, pp. 187-215.
- Nesher, P., & Sukenik, M. (1991). The Effect of Formal Representation on the Learning of Ratio Concepts. *Learning and Instruction, 1(2),* 161-175.



בעיות מילוליות בביה"ס היסודי

פרופ' שרה הרשקוביץ

המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח) 1981-2020
ולאורך כל השנים הוראה במסלולים להוראת
מתמטיקה במכללות להכשרת מורים



בעיות מילוליות בביה"ס היסודי

שרה הרשקוביץ

זכיתי להיות תלמידתה של פרופ' פרלה נשר!!!
זכיתי לעבוד עם פרופ' פרלה נשר במשך 40 שנה!!!
אני מתחילה מאמר זה בשתי האמירות הנ"ל כי אני מוצאת בהן משמעות רבה מאוד לכל שנות עבודתי והתפתחותי כעוסקת בחינוך מתמטי. במאמר זה אציג את תפיסת העולם לפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה שלמדתי מפרלה והמשכתי לעסוק בתחום זה במשך כל השנים.

הגעתי למטח בשנת 1981 בעקבות מודעה בעיתון. חיפשו איש צוות נוסף לקבוצת המתמטיקה. היקף העבודה גדל, הצוות הקיים היה קטן מדי ומצאו צורך להרחיבו. כשראינו את המודעה, בעלי אמר - זה בדיוק מה שאת מתעניינת בו. שמחתי מאוד להתקבל לצוות ומכאן התחילה הרפתקה מרתקת למשך כארבעה עשורים.

במאמר זה אציין את תמצית התיאוריה וההיבטים המעשיים של פתרון בעיות מילוליות בביה"ס היסודי, כפי שלמדתי מפרלה, וכיוון שנושא זה היה קרוב לליבי המשכתי לעסוק בו בהרחבה גם בלימודיי כתלמידתה של פרלה, במחקרי ובתהליך כתיבת פרקי הלימוד המתאימים. בתוכנית הלימודים (שמתחדשת אחת לכ-10 שנים) כתוב שיש לפתור בעיות מילוליות לפי פעולות החשבון שהתלמידים כבר מכירים. הוזכרו היבטים של קשר למציאות עם דגש במבנה הלוגי, שמוביל להבחנה בין המרכיבים השונים של הבעיה. אולם לא נזכר מאומה לגבי ההיבטים המשפיעים על רמות הקושי של הבעיות השונות, לא מבחינת המבנה, לא מבחינת דרכי הניסוח, ולא מבחינת ההיבטים הקשורים לניתוח הבעיות ולגורמים המשפיעים על רמות הקושי. הייתה לי הרגשה שיש היבטים נוספים שמשפיעים על רמת הקושי שאיני מכירה, ויש בנדון מקום לבדיקה ומחקר יסודי.

כשהתחלתי לעסוק בנושא שמחתי שפרלה לצידי - ידעתי שהיא המומחית בתחום, היא עסקה בנושא זה שנים רבות, ועליו כתבה את עבודת הדוקטורט שלה באוניברסיטת הרווארד בהנחיית המומחים בתחום "מעבר משפה טבעית לשפה מתמטית" (מה זה עבור ילדים צעירים להבין את הפסוק '2+3=5') (Nesher, 1972). הדוקטורט זיכה אותה בפרס הצטיינות בבית הספר לחינוך של הרווארד, ואני זכיתי לעוגן משמעותי ומרכזי להמשך עבודתי בחינוך המתמטי. ידעתי שאני יכולה ללמוד מפרלה, להתפתח ולהמשיך להתפתח ולפתח. שאלתי את פרלה שאלות שונות הקשורות לנושא במהלך הפיתוח והיא ענתה: "את יודעת מה אנחנו עושים, קוראים את המחקרים מהעבר וחוקרים בעצמנו היבטים חדשים". זה היה האתגר!

במאמר זה אציג תמצית של ההיבטים הקשורים לבעיות מילוליות ודרכי הופעתם בחומרי הלמידה. היבטים אלה יש להביא בחשבון בתהליך הלמידה של התלמידים, ועל המורים להביא אותם בחשבון בתהליך ההוראה שלהם. היבטים אלו צריכים להופיע במפורש בספרי הלימוד בהצגת הנושא לתלמידים, במדריכים למורה ובהשתלמויות המורים.

המעוניינים בהרחבה ובדוגמאות מפורטות מוזמנים לעיין בספר "האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי[1]".

מהי בעיה מילולית במתמטיקה?

הבעיות המילוליות קושרות בין העולם המציאותי לעולם המתמטי, לפיכך מרחב הבעיות השונות רחב כשם שהסיטואציות הקיימות בעולם רבות. הבעיות המילוליות מתארות את העולם באופן מילולי, ואילו בעזרת המתמטיקה נרצה לחשוף מרכיבים שאינם נתונים בתיאור המילולי. מעצם צורת הצגת הבעיות בטקסט מילולי עלינו להתמודד עם הקשר שבין השפה הטבעית לשפה המתמטית הפורמלית. בעוד שבשפה הטבעית נוכל לתאר סיטואציה נתונה במגוון דרכים כעושר השפה,

1. הרשקוביץ, ש. (2014). "האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי" הוצאת מטח. את הספר אפשר למצוא גם בגרסה דיגיטלית במערכת כותר, הספרייה המקוונת של ישראל. https://kotar.cet.ac.il/KotarApp/Viewer.aspx?nBookID=100596887.



הרי שבמתמטיקה השפה פורמלית קצרה וחד־משמעית. חלק מהמורכבות של בעיות שונות נובעת מצורת ההצגה המילולית, ותפקידם של העוסקים בהוראת מתמטיקה לזהות מורכבות זאת ולזמן לתלמידים בזמן ובמקום המתאים להם (לפי התפתחותם הקוגניטיבית מחד־גיסא, ולפי הידע המתמטי והידע על אודות העולם מאידך־גיסא) את הדרך והכלים לפתרון הבעיות השונות. נתחיל מבעיות מילוליות פשוטות במתמטיקה כפי שהן מוצגות בפני תלמידים בראשית לימודי המתמטיקה שלהם בבית הספר. אלו בעיות הבנויות מטקסט המתאר אירוע (כאמור סטריאוטיפי) מהעולם ה"מציאותי", אולם האופן שבו מתואר האירוע מבוסס על הנחות יסוד מסוימות ומוסכמות.

נשר וכתריאל (Nesher & Katriel, 1977; Nesher, 1980) הגדירו הנחות סמויות אלה כך:

א. בעיה מילולית בחשבון היא יחידת טקסט העומדת בפני עצמה. היא מופיעה בהקשר של הוראת חשבון, מניחים שכל העצמים המוזכרים בה קיימים, ורק הם קיימים. אין עצמים נוספים מלבדם.

ב. בבעיות פשוטות וסטריאוטיפיות (בתחילת הדרך) אין חשיבות לאמיתות או אי־אמיתות של המצב המתואר בטקסט הבעיה בעולם הממשי. בעיה מילולית בחשבון יכולה להיות תקנית לחלוטין וניתן לפתור אותה, גם אם אין היא מציאותית, כל עוד מתוארים קשרים מתאימים בין העצמים המתוארים בטקסט. (בשלבים מתקדמים יותר יתנסו התלמידים במצבים שבהם עליהם לשקול אם תשובתם הגיונית ומתאימה למציאות).

ג. בעיה מילולית כוללת שאלה שיש עליה תשובה, ומנסח הבעיה יודע את התשובה. (נעיר: שגם התשובה "אי אפשר" - היא תשובה[2]).

ד. השאלה בבעיה מילולית היא כזו שהתשובה עליה יכולה להינתן לאחר שיקולים מתמטיים, בניית מודל מתמטי ופתרון בעזרת פעולות מתמטיות.

ה. הבנת הטקסט של הבעיה מצריכה הבנת מערכת היחסים שבין כל המשפטים המרכיבים את הבעיה.

2. לדוגמה: כמה בנים בקבוצה שבה 15 ילדים ומחציתם בנים?

זהות העצמים המופיעים בבעיה תלויה במערכת היחסים שבין הקבוצות שהעצמים שייכים אליהן.

ו. כל בעיה מילולית עוסקת בתכונות הכמותיות של העצמים. התכונות האחרות שלהם קובעות את המבנה הלוגי-מתמטי של הבעיה. השאלה המופיעה בטקסט מתייחסת לאלמנט הכמותי של העצמים.

מה כולל תהליך פתרון בעיה מתמטית?

מתמטיקאים ופסיכולוגים קוגניטיביים שונים כמו פויה (Polya, 1945), מאיר (Mayer, 1992), פונק (Funke, 2010), גלזר וחבריו (Glaser, Linn & Bohrnstedt, 1997), ורבים נוספים עסקו בשלבי פתרון בעיות שנפרט כאן.

פוסון הדסון ופילר (Fuson, Hudson & Pilar, 1997) הגדירו את השלבים האלה כך:

א. הבנת הטקסט והקשר שלו למציאות - יכול להתבצע ע"י דימוי המציאות, ציור המציאות, תיאור המציאות המתוארת בטקסט במילים של הפותר.

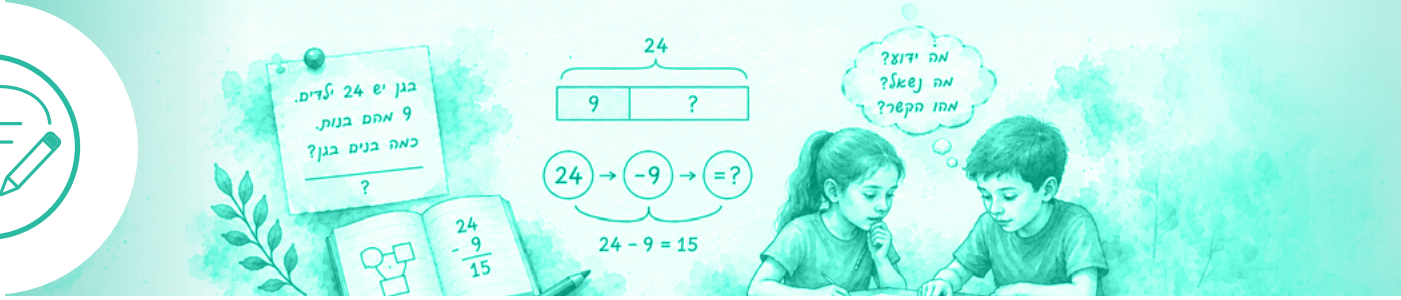
ב. ייצוג התיאור המתמטי בעזרת כלים מתמטיים (מודלים מוחשיים) וסכמות מתמטיות (גרפיות).

ג. התמקדות ומציאת המרכיבים החסרים. כלומר הצגת תהליך הפתרון המתמטי (בניית הביטויים המתמטיים המתאימים).

ד. פתרון (חישוב) בכלים מתמטיים.

ה. בדיקת הקשר שבין הפתרון המתמטי לתיאור המציאות שאליה התייחסה הבעיה.

נשר (1983) הבחינה בין תהליכי פתרון בעיות מתמטיות "פשוטות", כפי שמוצגות בחיי ביה"ס, לבין בעיות מהחיים שיש להשתמש לפתרונן בחישובים מתמטיים. בעוד שבבעיה מתמטית (פשוטה) טיפוסית לעולם ביה"ס הנתונים מעובדים ומוצגים לתלמיד בתמציתיות ובאופן מכוון לביצוע אופרציות מתמטיות, בעיות מציאות מחייבות ניתוח הסיטואציה וזיהוי המרכיבים הכמותיים שיתמכו בפתרון הבעיה הנתונה (שלב שבבעיות ביה"ס נתון ישירות בתוך טקסט הבעיה). רק לאחר בניית מרחב העצמים והיחסים הכמותיים שלהם, ניתן להתייחס



לבעיה המתמטית הנגזרת מהנתונים ותכנון הפתרון. לדוגמה: אם הבעיה היא "כמה עולה בניית גדר מסביב לבריכה?", גם אם נתונים ממדי הבריכה ישנה מערכת שיקולים שיש להביא בחשבון כמו, האם הגדר צמודה לבריכה או משאירים מרווחים בין הבריכה לגדר, ואם כן, מה גודלם? מה גובה הגדר? מה מחיר מטר גדר, וכדומה.

סכמות ופתרון בעיות מילוליות

פסיכולוגים קוגניטיביים של שנות ה־80 שאנק ואבלסון וכן אנדרסון (Schank & Abelson, 1977; Anderson, 1980) התייחסו לסכמות כאל רשת סמנטית המייצגת יחסים או תרחישים של התנהגויות, למשל דפוס התנהגות במסיבה או במסעדה. הווארד (Howard, 1987) מתאר סכמה כייצוג מנטלי של היבטים מהעולם. יש לה מערכת של תנאים הקשורים זה לזה ומתייחסים זה לזה לפי הגירויים המתקבלים ויוצרים את המקרה הספציפי לסכמה. רומלהארט ונורמן (Rumelhart & Norman, 1985) מאפיינים סכמה כמבנה הנתונים לייצוג המושג הכללי הנשמר בזיכרון. קיימות סכמות להכללה של עצמים, מאורעות, תרחישים ופעולות. סכמות לעיתים קרובות מייצגות את אב־הטיפוס של המושגים. הן משמשות כמודלים לעולם. עיבוד נתונים המשתמש בסכמות מצריך תהליך של זיהוי איזו סכמה היא המתאימה ביותר לגירוי שהתקבל. סכמות כוללות מאפיינים אלה:

א. לסכמות יש משתנים.
ב. סכמות יכולות לכלול זו את זו.
ג. סכמות מייצגות ידע בכל רמת הפשטה.
ד. סכמות מייצגות ידע (יותר מאשר הגדרות).
ה. סכמות הן תהליך של זיהוי ועיבוד מצב המתאים לגירויים שהתקבלו ועיבודם למודל מתאים לסיטואציה.

רומלהארט ונורמן מדגישים שעל אף שלכאורה נראה כי מדובר באוסף של פרטים, חשוב להבין שהארגון שלהם וההקשר גם יחד בונים את הסכמה.

דוגמה מעניינת שרומלהארט ונורמן מציגים מתייחסת למרכיבים המוצגים באיור 1 שבהופיעם במבודד לא היו מקבלים כל משמעות.

איור 1



ואולם כאשר מוסיפים פירוט שמרכיבים שונים אלה קשורים לפנים (איור 2) הם מקבלים משמעות ברורה.

איור 2

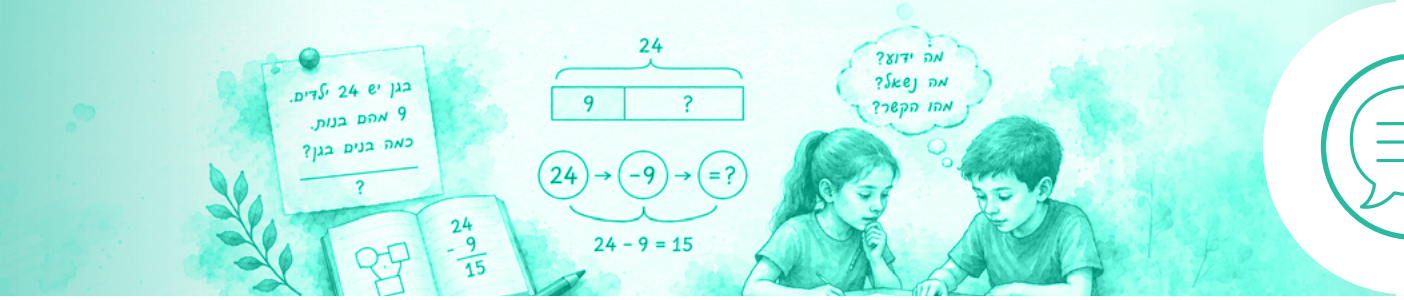


מקקללנד ורומלהארט (McClelland & Rumelhart, 1987) טוענים שהסכמה היא מבנה נתונים לייצוג רעיון הכולל את העצמים, את המצבים ואת סדרת המאורעות הקשורים לרעיון. במילים אחרות, הסכמה היא מעין מודל של הרעיון. עיבוד המידע בעזרת הסכמה כולל את בניית המודל המתאים ביותר למצב נתון.

סכמות בהוראת מתמטיקה

נשר (Nesher, 1986) ורזניק ואומנסון (Resnick & Omanson, 1987) הצביעו על שינוי באוריינטציה של הוראת המתמטיקה, מחיפוש דרכי הוראה כלליות להבנה של הסכמות המיוחדות לתחומים מתמטיים מחד־גיסא, ולסכמות המשפיעות על דרכי ההבנה והטעויות הקונספטואליות המתגלות בלימוד כל נושא מתמטי בנפרד מאידך־גיסא.

למעשה, החוקרים השונים (גם הפסיכולוגים הקוגניטיביים וגם החוקרים בתחום החינוך המתמטי) ממשיכים את ההגדרה של פיאז'ה, העוסקת ב"סכמה של פעולה" המתאפיינת ביכולת לחזור על הפעולה שמדובר בה, היכולת לחזור ממנה (כלומר הפיכות),



והיכולת להכלילה. אלה הם המרכיבים המאפיינים סכמה של פעולה (Piaget, 1980, p. 205). לפי פיאז'ה, הסכמה נוצרת בתהליך של הטמעה (Assimilation) והתאמה (Accommodation). ההטמעה היא הסתגלות לסכמה קיימת, ואילו ההתאמה היא תהליך של קליטת ידע בעקבות התמודדות קוגניטיבית עם הכרת מושגים חדשים תוך כדי הפרה פנימית (אם המושגים לא תואמים את הציפיות) או קונפליקט פנימי (אם הידע החדש עומד בסתירה לידע הקודם) עם תפיסות קיימות קודמות לגבי המושגים הקודמים. קליטת הידע החדש היא התהליך המוביל להרחבת הסכמה הקיימת. אצל פיאז'ה מושג הסכמה אינו קשור רק לחשיבה אלא גם לדפוסי התנהגות מוטוריים.

פישביין (Fishbein & Grossman, 1997; Fischbein, 1999) שממשיך את תפיסתו של פיאז'ה, מגדיר סכמה כ"דפוס של פעולה" (pattern of action), ומרחיב הגדרה זו לאסטרטגיות לפתרון קבוצות של בעיות. לפי פישביין, **סכמה היא תוכנית פעולה**. לעיתים קרובות התנהגות לפי סכמה נתונה היא אוטומטית עד כדי אי תשומת לב לאוסף של פעולות רבות לביצוע מטלה נתונה.

פישביין הבחין בין שני סוגים של סכמות: סוג אחד מציג תחום מוגדר ומרוכז (condensed) של עצמים או אירועים, ואילו הסוג השני עוסק בהתנהגות המסתגלת למצב חדש בדרך של התאמה והטמעה (assimilation and accommodation).

לדעת פישביין, הסכמה מאפשרת:

א. לקלוט ולבנות הליך המבוסס על האינפורמציה שנקלטה ולאור זאת -

ב. להגיב באופן משמעותי ויעיל לגירויים שהתקבלו מהסביבה.

סכמות ובעיות מילוליות

השימוש בסכמות לניתוח סוגי בעיות מילוליות החל בשנות ה־80 בידי קבוצות חוקרים ממקומות שונים ברחבי העולם, שהסכימו על דרכי ניתוח משותפות:

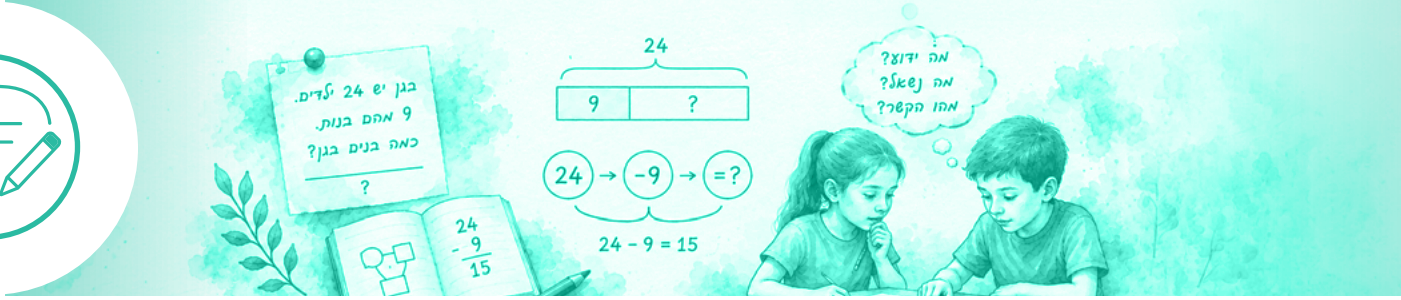
Nesher and Teubal 1975; Nesher and Katriel 1977; Carpenter, Moser et al. 1982; Vergnaud 1982; Nesher 1982; Nesher, Greeno et al. 1982; Greeno and Kintsch 1985; Riley and Greeno 1988; Vergnaud 1988; Verschaffel & De Corte 1993; Kintsch, 1994.

ניתוח זה כלל אפיון של סוגי בעיות מילוליות, מרכיבי קושי שלהם, וטעויות צפויות של תלמידים (בנושא זה נרחיב בפרקים הבאים בכל סוג בעיות שנעסוק בו).

לצורך פתרון בעיות טוען מאייר (Mayer, 1982), שדרושים ארבעה סוגי ידע שונים: לשוני-עובדתי, סכמתי, אלגוריתמי ואסטרטגי. את ארבעת סוגי הידע האלו הוא ממיין לשני שלבים במהלך פתרון בעיה: השלב הייצוגי והשלב החישובי. בשלב הייצוגי קיימים הידע הלשוני-עובדתי (הכולל את חוקי השפה ועובדות על העולם) והידע הסכמתי (הכולל את הקשר שהפותר מבצע עם הידע שלו בפתרון סוגים שונים של בעיות). זאת במטרה להבין את הסיטואציה המוצגת בבעיה ומציאת רעיונות, תהליכים או מודלים שבעזרתם בשלב הבא יתקיים תהליך הפתרון. בשלב החישובי קיימים הידע האלגוריתמי (הכולל את האלגוריתם לפתרון התרגיל או המשוואה המתאימה) והידע האסטרטגי (הכולל את דרך הפתרון של התרגיל או המשוואה) ובחינה רפלקטיבית אם התוצאה שהתקבלה מתאימה לבעיה שהוצגה.

השימוש בסכמות התרחב מניתוח סוגי בעיות וזיהוי קשיים של תלמידים אל פיתוח דרכי הוראה המשתמשות בסכמות לשלבי ניתוח הבעיה הנתונה, שימוש בייצוגים סכמתיים (schematic representations) כשלב בדרך אל הפתרון. שימושים אלו נבדקו בעבודות נוספות כמו של וויליס ופוסון (Willis & Fuson, 1988), נשר והרשקוביץ (Nesher & Hershkovitz, 1994), הרשקוביץ ונשר (Hershkovitz & Nesher, 2003), ואן דייק וחבריו (van Dijk et al., 2003), הרשקוביץ (Hershkovitz, 2009) ועוד. בתקופות שונות ובסוגי בעיות מילוליות שונות, הלמידה באמצעות חשיפה והתנסות בסכמות שונות נמצאו כמועילות ומקדמות הצלחה בפתרון בעיות של יותר תלמידים מאשר בלעדיהן.

גם בעבודותיהם של פנטזיארה גגאסיה ואליה (Pantziara et al., 2009) ושל פאגננט וולאסיס (Fagnant & Vlassis, 2013) שבדקו פתרון בעיות לא שגרתיות, נמצאו הישגים



גבוהים יותר אצל תלמידים שנחשפו לפתרון בעיות בעזרת ייצוגים סכמתיים.

סוגי בעיות הנלמדות בביה"ס היסודי: בעיות חד־שלביות

בעיה מילולית חד־שלבית היא בעיה שכדי לפתור אותה יש לבצע פעולה אריתמטית אחת ויחידה. הפעולה יכולה להיות חיבור, חיסור, כפל או חילוק. בבעיה חד־שלבית חייבים להופיע לפחות שלושה היגדים. שניים מהם מתארים קבוצות כלשהן שמכילים תיאור קבוצה וכמות, והמרכיב השלישי, המייצג על־פי־רוב את השאלה, מציג קשר תוכני בין שני ההיגדים שתוארו תחילה. קשר זה יכול לבוא לידי ביטוי בצורות שונות בבעיות המילוליות השונות.

נתבונן בדוגמה: *בכיתה 20 בנים ו־10 בנות.* כל עוד לא נתון ההיגד השלישי לא נוכל לדעת מהי השאלה ומהי הפעולה המתמטית לפתרונה. ההיגד השלישי יכול להיות כל אחד מההיגדים האלו, והוא מוביל לתהליך פתרון אחר:

א. כמה ילדים בכיתה?

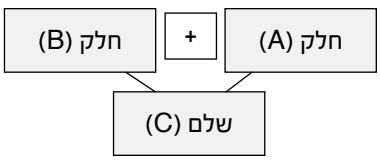
ב. בכמה גדול מספר הבנים ממספר הבנות?

ג. פי כמה גדול מספר הבנים ממספר הבנות?

ד. בכמה אפשרויות שונות הם יכולים להסתדר בזוגות?

גם ההקשרים שונים זה מזה, והניסוח שלהם משפיע על הבנת הסיטואציה ובעקבות כך על תהליך הפתרון. עדיין בכל אחת מהסיטואציות נתונות שתי קבוצות ויש למצוא את הקבוצה השלישית שהיא יכולה להיות חלק או שלם במבנה חיבורי הכולל:

חלקים ושלם



ואפשר לנסח שאלת שונות **בהקשרים שונים**. בהינתן שתי קבוצות כל הקשר ומרכיב חסר מובילים לבעיות שבהן רמת מורכבות שונה ורמת קושי שונה לפתרון. (הרחבה בנדון תוכלו למצוא בספר - "האם זו בעיה?")

ובאופן דומה אפשר למצוא בעיות בהקשרים שונים בבעיות בעלות מבנה כפלי.

מבנה כפלי

מבנה כפלי מכיל גורמים ומכפלה. נבחן את האפשרויות השונות. נתבונן לדוגמה בסיפור: *למסיבה הגיעו 4 ילדים שהחזיקו בידיהם 20 בלונים. כל ילד החזיק בידו 5 בלונים.*

הסיפור המתואר כולל שלושה היגדים:

A: היגד המתאר קבוצה של 4 ילדים.

B: היגד המתאר קבוצה של 20 בלונים.

C: היגד המתאר קשר שבין שתי הקבוצות שתוארו בהיגדים הקודמים.

כל ילד החזיק בידו 5 בלונים. זהו היגד המתאר את הקשר שבין הילדים לבין הבלונים: בהינתן שניים מההיגדים, נוכל לשאול על ההיגד השלישי, ולחשב אותו בעזרת תרגיל כפל או תרגיל חילוק.

לסיפור המתואר לעיל ניתן לנסח שלוש בעיות שונות.

<u>בעיה א</u>

למסיבה הגיעו 4 ילדים. כל ילד החזיק בידו 5 בלונים. כמה בלונים החזיקו כל הילדים?

שאלה זו נפתור בעזרת תרגיל הכפל, כיוון שהשאלה הייתה על המכפלה.

4	×	5	=	?
ילדים		בלונים לכל ילד		בלונים

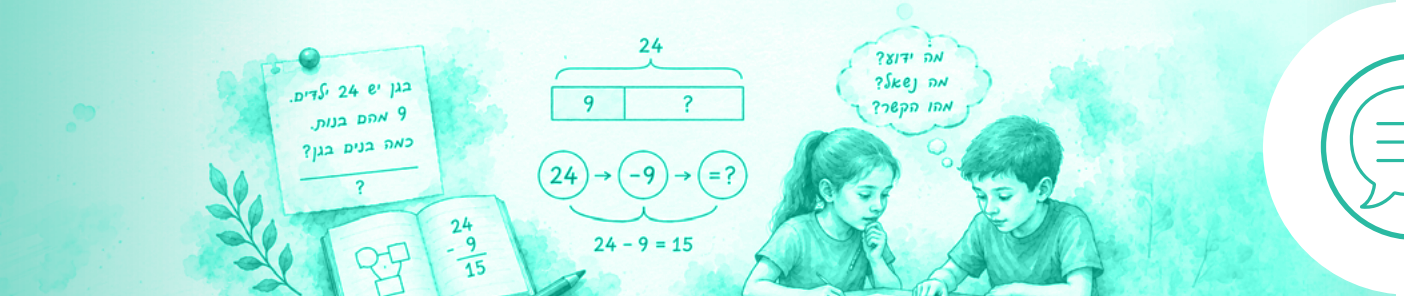
<u>בעיה ב</u>

למסיבה הגיעו ילדים שהחזיקו בידיהם 20 בלונים. כל ילד החזיק בידו 5 בלונים. כמה ילדים הגיעו למסיבה?

התרגיל הישיר לפתרון הבעיה הוא חילוק[3] - כיוון שהשאלה הייתה על אחד הגורמים:

20	÷	5	=	?
בלונים		בלונים לכל ילד		ילדים

3 יש העונים בעזרת התרגיל: 20=?×5 . גם תרגיל זה מייצג באופן מדויק את מבנה הבעיה ופתרונה.



בעיה ג

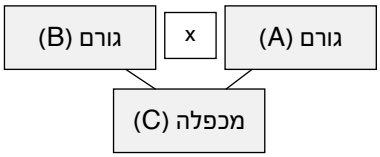
למסיבה הגיעו 4 ילדים. כל ילד החזיק בידו מספר שווה של בלונים. בסה"כ כל הילדים החזיקו בידיהם 20 בלונים. כמה בלונים החזיק כל ילד?

התרגיל הישיר לפתרון הבעיה הוא חילוק[4] - כיוון שגם שאלה זו הייתה על אחד הגורמים.

?	=	4	÷	20
בלונים לכל ילד		ילדים		בלונים

בשתי הבעיות הראשונות כתוב במפורש בטקסט הבעיה, שמספר הבלונים בידו של כל ילד הוא שווה (על־ידי ההיגד: "כל ילד החזיק בידו 5 בלונים"), לעומת זאת בבעיה השלישית שואלים על מספר הבלונים שכל ילד מחזיק. אילו לא היה כתוב במפורש "כל ילד החזיק בידו מספר שווה של בלונים" אפשר היה לקבל גם תשובה שבה כל ילד מחזיק בידו מספר שונה של בלונים (כל עוד סכומם 20 בלונים), ובמקרה זה לא ניתן היה לענות על השאלה בעזרת תרגיל חילוק.

כאמור, בעיות בעלות מבנה כפלי עוסקות בקשר שבין שלושה מרכיבים. שני מרכיבים הם הגורמים (A, B) והמרכיב השלישי (C) הוא המכפלה.



במרבית המקרים המרכיבים מתוארים על ידי מספר וכינוי (כזכור בבעיות השוואה ישנו מספר המתאר את היחס שבין שתי הקבוצות).

בהינתן המרכיבים A,B ויש לחשב את C - הפתרון הישיר הוא בעזרת תרגיל כפל.

בהינתן המרכיבים A, C ויש לחשב את B, או בהינתן המרכיבים B, C ויש לחשב את A - הפתרון הישיר הוא בעזרת תרגיל חילוק.

הֶקְשרים שונים מובילים למבחר בעיות המעוררות רמות שונות של קשיים.

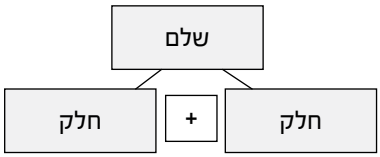
על דרכי ניסוח נוספות של אוסף השאלות שהוצג לעיל ניתן לקרוא עוד בספר "האם זו בעיה?".

בעיות מילוליות דו־שלביות

כשעוברים מבעיות חד־שלביות (חיבוריות או כפליות) לבעיות דו־שלביות, עוברים לקשר או הרכבה בין שני מבנים חד־שלביים שבהם דנו עד כאן.

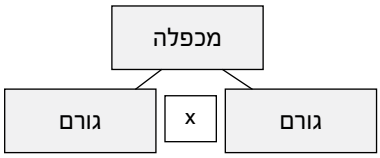
בבעיות החיבוריות עסקנו במגוון של בעיות שהמקשר בין כולן היה מבנה תלת־מקומי שהציג את הקשר שבין שני חלקים ושלם.

ייצגנו מבנה זה בעזרת הסכמה:



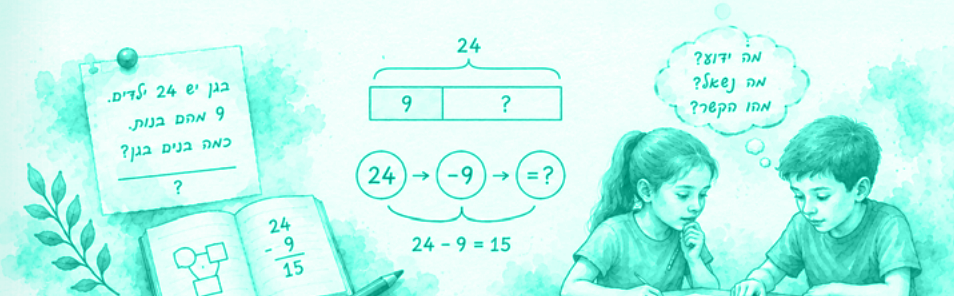
בכל בעיה חד־שלבית חיבורית יש שלושה היגדים, אשר שניים מהם היגדים שמופיע בהם גם התיאור הכמותי (מספר) וגם תיאור הקבוצה הנדונה (כינוי/שם), ומרכיב אחד שמציג את השאלה שמופיע בו רק שם הקבוצה ולא מופיעה הכמות. על הפותר להיעזר בפעולה הבינארית המתאימה למציאת הכמות של המרכיב שבו הוא היה חסר. אם הכמות חסרה במרכיב המתאר את השלם - הפתרון המתאים הוא באמצעות תרגיל חיבור. אם הכמות חסרה במרכיב המתאר חלק, הפתרון הישיר המתאים הוא באמצעות תרגיל חיסור.

בבעיות כפליות דנו במבנה תלת־מקומי שייצגנו באמצעות הסכמה:



באופן אנלוגי לבעיות החיבוריות החד־שלביות, בכל בעיה כפלית חד־שלבית יש שלושה היגדים, אשר בשניים מהם מופיע גם התיאור הכמותי (מספר) וגם תיאור הקבוצה הנדונה (שם), ומרכיב אחד שמציג את השאלה, ומופיע בו רק שם הקבוצה ולא מופיעה הכמות. על הפותר להיעזר בפעולה הבינארית המתאימה למציאת הכמות

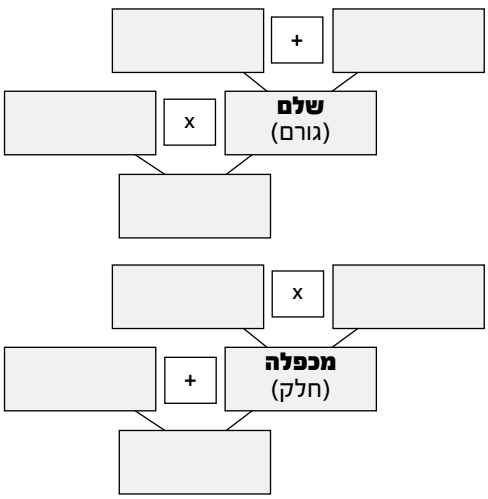
4 יש העונים בעזרת התרגיל: 20=?×4 . וכמו במקרה הקודם זהו פתרון מדויק המייצג את מבנה הבעיה ופתרונה.



של המרכיב שבו הוא חסר.
אם הכמות חסרה במרכיב המתאר את המכפלה - הפתרון הישיר המתאים הוא באמצעות תרגיל כפל. אם הכמות חסרה במרכיב המתאר גורם, הפתרון הישיר המתאים הוא באמצעות תרגיל חילוק.

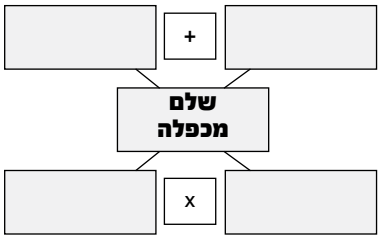
כל בעיה דו־שלבית מורכבת משתי סכמות חד־שלביות.
שתי סכמות חד־שלביות ניתן להרכיב כך:
א. הרכבה של שתי סכמות חיבוריות,
ב. הרכבה של שתי סכמות כפליות,
ג. הרכבה של סכמה חיבורית עם סכמה כפלית.
מכל אחד מההרכבים הנ"ל ניתן ליצור את הסכמות האלה (Hershkovitz & Nesher, 1996; Nesher & Hershkovitz, 1985; Reusser, 1990; Shalin & Bee, 1994). לצורך ההבהרה נפרט את אפשרות ג, המורכבת יותר כיוון שמשתתפות בה שתי סכמות: החיבורית והכפלית.
הרכבת שתי הסכמות התלת־מקומיות מתאפשרת בשלוש דרכים:

1. הרכבה היוצרת **סכמה היררכית**:

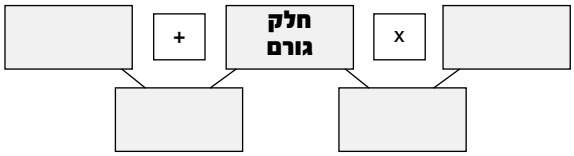


בסכמה מורכבת זו, השלם מהסכמה החיבורית מתאחד עם הגורם של הסכמה הכפלית, או המכפלה מהסכמה הכפלית היא החלק בסכמה החיבורית.

2. הרכבה היוצרת **סכמת שלם משותף**:
בסכמה מורכבת זו מתאחדים השלם של הסכמה החיבורית עם המכפלה של הסכמה הכפלית.



3. הרכבה היוצרת **סכמת חלק משותף**:



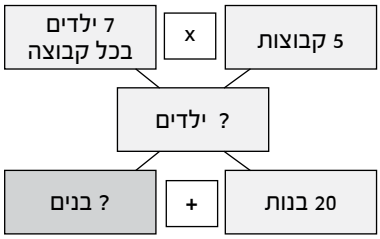
בעוד שבבעיה חד־שלבית מספר הגורמים המופיעים בטקסט שווה למספר הגורמים המופיעים בסכמה, לא כך פני הדברים בבעיה דו־שלבית.
בבעיה חד־שלבית מופיעים שלושה גורמים, וכך פני הדברים בייצוגה בסכמה (עיינו שנית בפסקאות הקודמות). בבעיה דו־שלבית, שהיא הרכב של שתי בעיות חד־שלביות, לא יימצאו שישה מרכיבים, אלא רק חמישה מרכיבים, כיוון ששני מרכיבים מתוך הסכמות החד־שלביות התאחדו.
בסכמה ההיררכית, מכפלה התאחדה עם חלק או שלם התאחד עם גורם. בסכמת השלם המשותף, שלם התאחד עם מכפלה, ובסכמת החלק המשותף, חלק התאחד עם גורם.

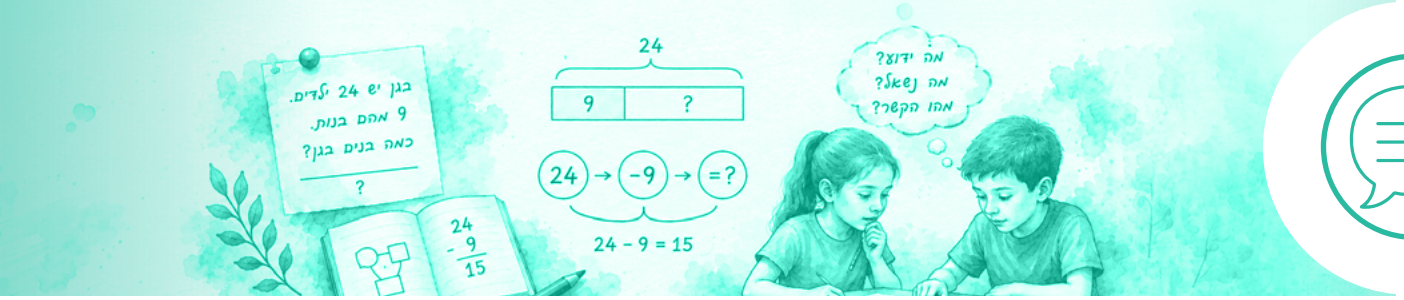
במטרה לבחון סוגיה זו נתבונן לדוגמה בבעיה דו־שלבית:

<u>בעיה א</u>

בכיתה היו 5 קבוצות.
בכל קבוצה 7 ילדים. בכיתה היו 20 בנות.
כמה בנים היו בכיתה?

נתבונן בסכמה המתאימה לבעיה זו:

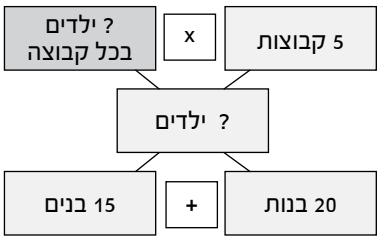




את הבעיה אפשר לפתור בשלבים. כיוון שכל הכינויים רשומים בפירוט בתוך הסכמה, נקצר כאן בשלב החישוב ולא נכתוב את הכינויים בתוך התרגיל.
נפתור תחילה את פעולת הכפל (מתוך הסכמה הכפלית, כי בה יש שני נתונים):
$5 \times 7 = 35$ לקבלת מספר הילדים בכיתה.
עם התוצאה שהתקבלה ניתן להמשיך אל הסכמה החיבורית: $35 - 20 = 15$ ולקבל את מספר הבנים בכיתה.
ניתן כמובן גם לפתור בתרגיל מורכב אחד: $5 \times 7 - 20 = 15$.
אפשר לשאול שאלות שונות על סיטואציה נתונה, ובמקרה זה אותה סכמה מייצגת כל בעיה. ההבדל בין הבעיות השונות הוא בנתונים ובניסוח השאלה.
לאותה סיטואציה ניתן לנסח שתי בעיות שונות שאותן נפרט כאן. לא נדון בבעיה המקבילה לחלוטין לבעיה א, שבה במקום לשאול על הבנים שואלים על הבנות, כי כל הניתוח זהה לחלוטין.

<u>בעיה ב</u>

בכיתה היו 15 בנות ו־20 בנים.
הם התחלקו ל־5 קבוצות, כך שבכל קבוצה היה מספר שווה של ילדים. כמה ילדים היו בכל קבוצה?
הסכמה המתאימה לבעיה זו:



לאור הכינויים המופיעים בתוך הסכמה נציג רק את התרגילים הנדרשים לפתרון הבעיה. הפתרון בשלבים:

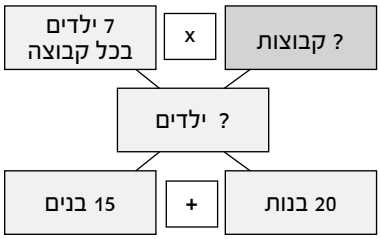
$15 + 20 = 35$

$35 : 5 = 7$

ובתרגיל מורכב: $(15 + 20) : 5 = 7$.

במקביל אפשר גם לבחון את **<u>בעיה ג</u>**

בכיתה היו 15 בנות ו־20 בנים.
הם התחלקו לקבוצות כך שבכל קבוצה היו 7 ילדים.
כמה קבוצות היו בכיתה?
הסכמה המתאימה לבעיה זו:



לאור הכינויים המופיעים בתוך הסכמה נציג רק את התרגילים הנדרשים לפתרון הבעיות. הפתרון בשלבים:

$15 + 20 = 35$

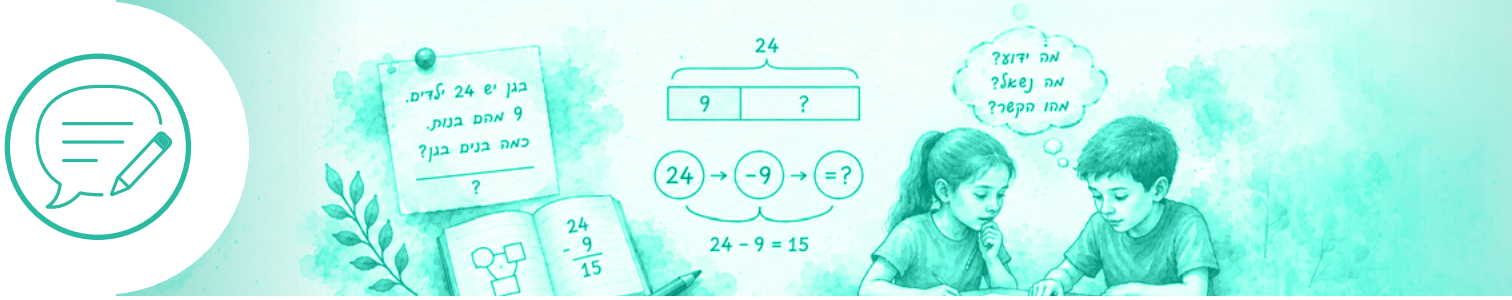
$35 : 7 = 5$

ובתרגיל מורכב: $(15 + 20) : 7 = 5$.

<u>לסיכום</u>

בסכמה של "שלם משותף" אשר בנויה מסכמה חיבורית וסכמה כפלית יש בדיוק שלוש בעיות השונות זו מזו.

באופן דומה אפשר לנתח את הבעיות הדו־שלביות בעזרת חיבור בין שתי הסכמות המתאימות.
ניתוח זה הוא בסיס להוראת ניתוח בעיות מילוליות מורכבות, לזיהוי הבעיות השונות האפשריות, ולמחקר לזיהוי רמות הקושי השונות של כל סוג של בעיה. הניתוח שהוצג כאן, ובדיקת רמות הקושי של הבעיות הדו־שלביות היה נושא הדוקטורט של הרשקוביץ (1992).
נציג כאן רק את אחד הממצאים העוסק באינטראקציה שבין הסכמות לבין הפעולות (להרחבה אפשר לקרוא בספר "האם זו בעיה?").
מצאנו שגם הסכמות וגם הפעולות הן משתנים המשפיעים על דרגת הקושי של הבעיות השונות, לפיכך מעניין לבדוק את האינטראקציה ביניהן. בטבלה נציג את אחוז המצליחים בפתרון הבעיות לפי סוג הפעולות וסוג הסכמות.
לסיכום פרק זה העוסק בבעיות דו־שלביות נתבונן באחד הממצאים המקשר בין הסכמות לבין הפעולות המתמטיות הנדרשות לפתור את הבעיות.



טבלה 1

אחוזי הצלחה בפתרון בעיות שהן אינטראקציה בין פעולות לסכומות.

סכומות / פעולות	היררכית	שלם משותף	חלק משותף
חיבור-כפל	80	-	-
חיבור-חילוק	72	72	60
חיסור-כפל	72	55	60
חיסור-חילוק	61	-	40

חשוב לשים לב שבטבלה 1 יש תאים ריקים. אלו תאים שהרכב פעולות מסוים לא יכול להתקיים בסכמה הספציפית, לדוגמה בסכמת השלם המשותף לא ייתכן צירוף הפעולות חיבור וכפל למשל, כאשר הפעולה היא כפל תוצאתה תוביל לקבלת מכפלה שהיא גם השלם בתבנית החיבורית. בהינתן המרכיב השלם בתבנית החיבורית, הפעולה הנגזרת מתבנית זו יכולה להיות רק חיסור.

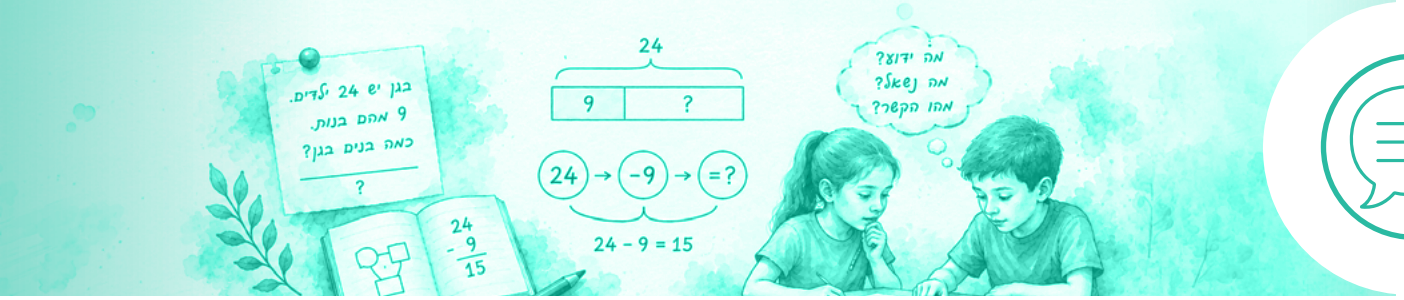
השפעתו של משתנה הסכמות נמצא מובהק, והוא עומד בהתאמה לניתוחים הקוגניטיביים המצופים מראש. על־פי ניתוחים אלה אמורות הסכמות לסייע לפותר למקד את המידע הדיפוזי הנתון במסגרת בעיה "מהחיים" למבנה מתמטי מוגדר. גם רשר (Reusser, 1990) מציין, שלפתור בעיה מילולית פירושו למצוא ייצוג שיעזור לעבור מהטקסט המילולי אל הייצוג המתמטי הפורמלי. ייצוג טוב וממצה הוא כמעט הפתרון כולו, מכיוון שהוא עוזר לארגן את הנתונים למבנה ברור ומוגדר, שהתלמיד יכול למפות בעזרתו את נתוני הבעיה, ואח"כ לעבוד איתם. הסכמה עוזרת לתלמיד לנתח את האלמנטים הנתונים בבעיה על־פי תפקידם, ובעזרתה הוא יכול לבדוק אילו אלמנטים חסרים לו. די לחפשם בטקסט או לחשבם בעצמו. הסכמה ממקדת את תשומת ליבו של התלמיד לתפקיד של כל אחד מהמרכיבים השונים, ואינה משאירה בידיו מרחב אפשרויות אינסופי.

נושא הבעיות המילוליות הוא רחב מאוד. הצגת התחלת הלימוד בנושא אצל תלמידים צעירים ממחישה את המורכבות שנראית לרבים "ברורה מאליה", ובכך נדגיש שוב את שלמדנו מפרלה - "שום דבר לא ברור מאליו".

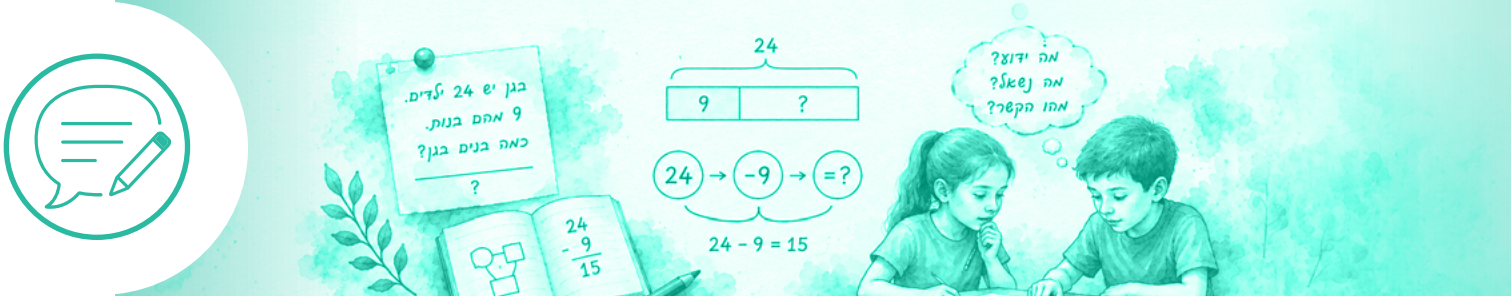
אסכם מאמר זה בדברי תודה לפרופ' פרלה נשר שזכיתי להיות תלמידתה, ולעסוק במחקר ופיתוח הוראת בעיות מילוליות מסוגים שונים ובהקשרים שונים. עולם מרתק נפתח בפניי והמשכתי לעסוק בו במשך כל שנות עבודתי.

ביבליוגרפיה

- הרשקוביץ, ש' (1992). *תרומת הסכמות לפתרון בעיות מילוליות דו־שלביות במתמטיקה*. חיבור לשם קבלת התואר "דוקטור לפילוסופיה", אוניברסיטת חיפה.
- הרשקוביץ, ש' (2014). *האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי*. רמת אביב: מטח. מצוי בגרסה דיגיטלית במערכת כותר, הספרייה המקוונת של ישראל. https://kotar.cet.ac.il/KotarApp/Viewer.aspx?nBookID=100596887#1.5582.6.default
- נשר, פ' (1983). תהליכים קוגניטיביים הקשורים בפתרון בעיות מילוליות באריתמטיקה. בתוך מ' ניסן וא' לסט (עורכים), *בין חינוך לפסיכולוגיה* (עמ' 425-407). ירושלים: מאגנס, האוניברסיטה העברית.
- Anderson, J. A. (1980). *Cognitive psychology and its implications*. San Francisco, W.H. Freeman and Company.
- Carpenter, T. P., Moser, J. M., & Romberg, T. A. (1982). *Addition and Subtraction: A Cognitive Approach*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fagnant, A., & Vlassis, J. (2013). Schematic representation in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 149-168.
- Fischbein, E. & Grossman, A., (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational studies in Mathematics, 34*(1), 27-47.



- Mayer, R. (1982). The psychology of mathematical problem solving. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving*: *Issues in research* (pp. 1–13). Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking*, *Problem solving*, *Cognition* (2nd Ed.). New York, NY: Freeman.
- McClelland, J. L., & Rumelhart D.E. (1987). *Parallel distributed processing*. MIT Press Cambridge, Mass. Press.
- Nesher, P. (1972). *From ordinary language to arithmetic language in the primary grades*. Unpublished Doctoral Dissertation, Harvard University, University Microfilm No. 76-10, 525.
- Nesher, P., & Teubal, E. (1975). Verbal Cues as an Interfering Factor in Verbal Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 6*(1), 41-51.
- Nesher, P. & Katriel T. (1977). A Semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics, 8*(3), 251-269.
- Nesher, P. (1980). The Stereotyped Nature of School Word Problems. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 41-48.
- Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction*: *A cognitive perspective* (pp. 25–38). Lawrence Erlbaum.
- Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational studies in mathematics, 13*(4), 373-394.
- Nesher, P. (1986). Learning Mathematics – a cognitive perspective. *American Psychologist*, *41*(10), 1114-1122.
- Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational studies in mathematics, 38*(1), 11-50.
- Funke, J. (2010). Complex problem solving: A case for complex cognition?. *Cognitive processing, 11*(2), 133-142.
- Fuson, K. C., Hudson, K., & Pilar, R. (1997). Phases of classroom mathematical problem-solving activity: The PCMPA framework for supporting algebraic thinking in primary school classrooms. *Cognition and Instruction, 15*(4), 481–510.
- Glaser, R., Linn, R., & Bohrnstedt, G. (1997). *Assessment in Transition*: *Monitoring the Nation's Educational Progress*. NY: National Academy of Education.
- Greeno, J. G., & Kintsch, W. (1985). Understanding and Solving Word Arithmetic Problem. *Psychological Review*, *92*(1), 109-129.
- Howard, R. W. (Ed.). (1987). *Concept and schemata*. London: Cassel educational artillery house.
- Hershkovitz, S., & Nesher, P. (1996). The role of schemes in designing computerized environments. *Educational Studies in Mathematics, 30*(4), 339-366.
- Hershkovitz, S., & Nesher, P. (2003). The role of schemes in solving word problems. *The Mathematics Educator, 7*(2), 1-24.
- Hershkovitz S. (2009). Intuition, Schema and Problem Solving. In J. Novotná & H. Moraová (eds.) *Proceedings of the SEMT*09 - *International Symposium Elementary Math Teaching* (pp. 31-42). Prague, the Czech Republic.
- Kintsch, W. (1994). Text comprehension, memory, and learning. *American Psychologist 49*, 294-303.



Development Center, University of Pittsburgh. https://eric.ed.gov/?id=ED259949

- Van Dijk, I. M. A. W., Van Oers, B., & Terwel, J. (2003). Providing or designing? Constructing models in primary maths education. *Learning and Instruction, 13*(1), 53-72.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction*: *A cognitive perspective* (pp. 39–59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.
- Verschaffel, L., & De Corte, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological and practical outcomes. *Educational Psychology Review*, *5*, 239-256.
- Willis, G. B., & Fuson, K. C. (1988). Teaching Children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80*(2), 192-201.
- Nesher P., & Hershkovitz S. (1994). The Role of Schemes in Two-Step Problems: Analysis and Research Findings. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(1), 1-23.
- Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1), 39-60.
- Piaget, J. (1980). *Experiments in contradiction*. Chicago and London: University of Chicago Press.
- Polya, G. (1945, 1973). *How to Solve it* (2nd Edition). Princeton: Princeton University Press.
- Resnick, L. B., & Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional Psychology*, 3, 41-96. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Reusser, K. (1990). From text to situation to equation: Cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems. *Learning and Instruction, 2*(2), 477-498.
- Riley, M. S., & Greeno, J. G. (1988). Development analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognitive and Instruction, 5*(1), 49-101.
- Rumelhart, D. E., & Norman, D. A. (1985). Representation and Knowledge. In A. Aitkenhead, & J. M. Slack (Eds.), *Issues in cognitive modeling* (pp. 15-92). London, UK: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schank, R., & Abelson, R. (1977). *Scripts*, *plans*, *goals and understanding*. Hillsdale, NJ. Lawrence Erlbaum Associates.
- Shalin, V. L., & Bee, N. V. (1985). *Structural differences between two-step word problems* (Report No. UPITT/LRDC/ONR/KLI-85/02). Learning Research and

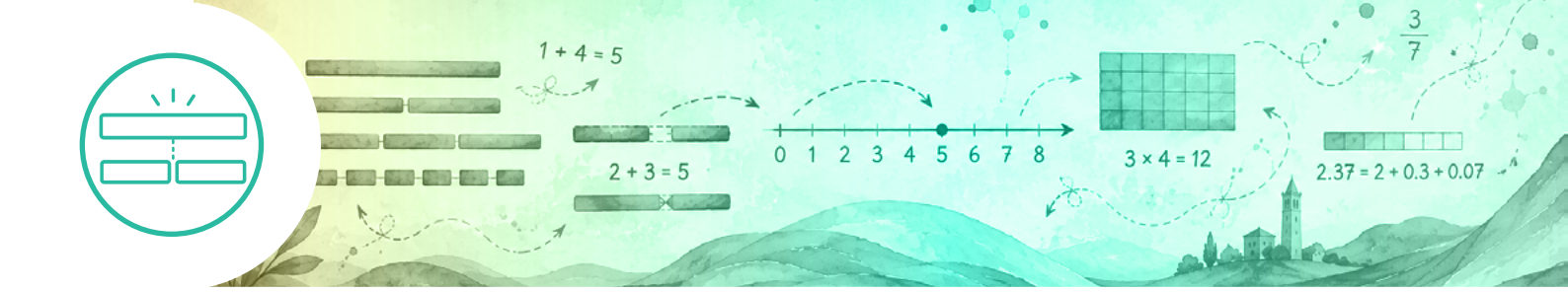


מודלים, גישה תבניתית וחשיבה מבנית

פרופ' איליה סיניצקי

ראש החוג לתואר שני בהוראת המתמטיקה

האקדמית גורדון



מודלים, גישה תבניתית וחשיבה מבנית

איליה סיניצקי

הערה: פרופ׳ פרלה נשר ז"ל הלכה לעולמה בין היציאות לאור של שני גיליונות כתב העת "מספר חזק 2000" שבו מפורסמים שני החלקים של מאמרִי העוסק **בעקרונות ליבה של מתמטיקה בגיל הצעיר**. הסוגיה של רכישת מושגים מתמטיים בקרב ילדים הייתה לב ליבה של העשייה המדעית והמעשית של פרלה, ולא במקרה לחלק מתוכן כתבה זו קשר ישיר עם המאמר המוזכר. מקווה כי הקוראים יקבלו כפילות זו בהבנה.

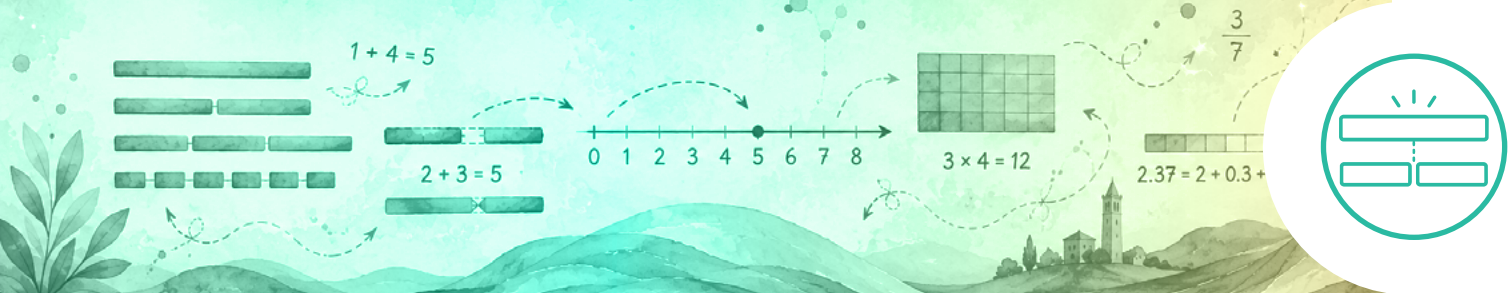
על המודלים המתמטיים והדידקטיים

אין פלא כי קיימים דיונים ואף ויכוחים סביב דרכים וכלים להבניית ידע מתמטי משמעותי של הלומד. מתמטיקה כמקצוע לימוד מהווה אתגר הוראתי מסיבה פשוטה: קיים פער בין **המבנה הדדוקטיבי** של גוף הידע המתמטי לבין **דרכים אינדוקטיביות ואינטואיטיביות** להבניית ידע זה אצל כל לומד (Fishbein, 1983). הידע המתמטי עצמו התפתח (ומתפתח) בהשראה מתמדת, הן מהצרכים המעשיים, והן מהצרכים ה"טרנסצנדנטליים". המענה לשאלות מסוג "כיצד?" מספק, למשל, אלגוריתמים חישוביים, ובד בבד ניסוח השאלות "למה?" מזמן חיפוש אחרי תובנות מעמיקות עבור סיבתיות ומבנה, עד למבנה העולם (כמו התאוריה של ארבעה יסודות העולם של הפילוסופים של יוון הקדומה). גם לצורך תיאור המציאות, וגם ל־"תכנון העולם", מתמטיקאים משתמשים בפירוש **במודלים** מסוגים שונים. מודל, כידוע, הוא ייצוג של אובייקט, תופעה או מערכת שמטרתו לחקות את ההיבטים המהותיים. גיוון המודלים הוא רחב, מקונקרטיים עד למופשטים מאוד, ותמיד קיימת שאלה אילו מאפיינים של האובייקט מבטא המודל, ומאילו הוא ממש מתעלם.

מושג המודל עולה במתמטיקה בשלושה היבטים שונים לכל הפחות:

- מאחר שלמושגי היסוד במתמטיקה מקורות בעולם הממשי, היא מודל המציאות. נציין, כי טענה זו נשמעת מובנת מאליה, אך בתולדות הפילוסופיה קיימות תאוריות הטוענות בעצם את ההפך: המציאות היא המודל של העולם המתמטי האידיאלי; מודלים מתמטיים מתארים תופעות אחדות בעולם הממשי, ולעיתים קרובות אותו מודל מספק תשובה לבעיות הנראות רחוקות זו מזו. כך, למשל, ידוע כי הצגות השבר "חצי" כסכום של שני שברי יחידה (שברים בעלי מונה 1) מתארות את כל אפשרויות הריצוף המישורי בעזרת מצולעים משוכללים (הריצופים הם בעזרת משולשים, ריבועים ומשושים). אגב, פחות ידוע, כי בעיית חיפוש אחרי זוגות שברי יחידה שסכומם גדול מחצי מספקת גילוי של כל חמשת הפאונים המשוכללים. מתמטיקאים נוהגים "לחסוך בחשיבה" ולהשתמש "באותה שפה (אותו מודל) להכול" (Cuoco, Goldenberg & Mark,1996).
- מתמטיקאים משתמשים במודלים שונים לתיאור אותו אובייקט מתמטי או תופעה מתמטית. למשל, אפשר להגדיר אליפסה כאחד מחתכי החרוט, כמקום גאומטרי במישור שבו לכל נקודה סכום מרחקים קבוע עד שתי הנקודות הנתונות, או כעקומה המתוארת על ידי משוואה עם שני משתנים במעלה שנייה, עם תנאי מסוים בין מקדמי המשתנים במשוואה זו. כאילו בניגוד לקודם, מתמטיקאים "מערבבים מספר שפות לתיאור אותה תופעה, ומשתמשים בנקודות מבט מרובות" (שם).
- באופן מפתיע, ההתפתחות הפנימית של המתמטיקה נותנת גם כלים לחקר עולמות מגוונים ואף משונים (לפי ברטראנד ראסל, "מתמטיקאים הם כמו חייטים שתופרים חליפות עבור כל העולמות האפשריים", כלומר הם יוצרים מסגרות לוגיות מוכנות מראש לכל יקום, ללא קשר לשאלה אם יקום זה אכן קיים).

בכל אחד מהמובנים, שימוש במודל אינו תהליך חילול התופעה אלא **כלי הפשטה** שמדגיש - לצורך זה או אחר - היבטים אחדים של התופעה, או האובייקט הנלמד. כך, למרות קיומנו במרחב תלת־ממדי, האובייקטים הגאומטריים סביבנו לא זהים לאובייקטים המושלמים



והמופתיים שבהם עוסקת גאומטריית המרחב. גם המושג הבסיסי ביותר של אריתמטיקה, מושג המספר, הוא בהחלט תוצאה של תהליך ההפשטה: המספר שלוש לא קיים בסביבתנו, אנחנו רואים רק את ייצוגיו השונים והמגוונים (למשל, קבוצות רבות בנות שלושה איברים). המושגים המתמטיים הם מופשטים באופיים, ובמובן זה המודלים **בהוראת מתמטיקה** אמורים "לפעול" בכיוון ההפוך, כלומר לסייע להבנת **אובייקטים מופשטים בעזרת כלים קונקרטיים**. תמיד קיים "מתח" בין מושג ודרך הצגתו, כי סוגיית בחירת הכלי היא מורכבת ולא מאפשרת תשובות חד־משמעיות. במקרים אחדים, מודל דידקטי "מנצל" את המודל המושרש כל כך בתוך המקצוע שאנחנו רואים ומציגים את המודל כחלק מהידע המתמטי ולא רק ככלי.

למשל, מודל של ישר המספרים משמש להצגת המספרים החל מהמספרים הטבעיים ועד למספרים הממשיים, שרק הם למעשה "ממלאים" את האובייקט. בשלבים הראשוניים של הלמידה, כאשר מדברים על המספרים הטבעיים (או רחב יותר, על המספרים השלמים) אין ללומד שום משמעות לגבי הקטעים בין הנקודות המבודדות המציגות את המספרים הידועים לו. יתרה מכך, גם המספרים הרציונליים, עם צפיפותם על ישר המספרים (כלומר קיום מספר רציונלי נוסף בין כל שני מספרים רציונליים שונים), לא מספקים "מילוי" של ישר המספרים. דוגמה זו מדגימה כי אפילו למודלים מקובלים ביותר קיימים לא רק יתרונות, והצגתם דורשת הבנה מעמיקה הרבה מעבר לצרכים המיידיים שבהם משתמשים בכלי זה.

רוב המודלים שבהם משתמשים ספרי לימוד ומורים בפועל הם בעצם "קביים דידקטיים", וכמו לכל **כלי דידקטי** יש להם יתרונות, מגבלות וחסרונות. שימוש בכל כלי דורש הבנה של תפקידיו: גם בכיתה עתירת טכנולוגיה אפשר להשתמש במחשב נייד כפטיש לנעיצת מסמרים... כלומר, במקרים רבים דווקא הדרכים והרגלי השימוש בכלי דידקטי הם הקובעים את גורלו כמסייע, לא מוצלח ואף מזיק ("גם המסמר לא נכנס, וגם המחשב נשבר").

מטרת השימוש במודלים היא ליעל תהליכי למידה. יש לזכור, כי בעת למידה נבנה אצל הלומד דימוי המושג, שכמובן לא זהה להגדרתו הפורמלית. דימוי זה קובע את דרכי הפעולה של הלומד ומשפיע על תובנותיו (Tall & Vinner, 1981). בכך, "הכוונות הטובות" לספק ללומד, במיוחד לתלמיד המתקשה, מודלים "פשוטים מאוד לשימוש" מזמנות טענות ריקות מתוכן ("אסור לחלק ב־0"), מונחים פסוודו־דידקטיים ("כפל במאונך") ו־"הסברים כאילו" ("כלל המשולש" ועוד), שהם בתורם גורמים להבניית דעות קדומות ולא נכונות (החל מ־"כפל תמיד מגדיל" ועד ל־"בשברים הכול הפוך").

על הגישה התבניתית

בשלבים הראשונים של למידה שיטתית של המקצוע תמיד קיימות דילמות של בחירת המודל המוביל. לגבי מושג המספר, ברור כי המאפיין המרכזי שלו הוא ערכו. הגישה הסביבתית מבססת תהליך היכרות עם המספרים הטבעיים ופעולות החשבון בקבוצת מספרים אלה על אנלוגיות ישירות עם עולם הילד: בגישה זו כל מספר טבעי הודגם בעזרת אינספור דוגמאות של קבוצות האובייקטים הבודדים, כולם בעלי אותה עוצמה (קבוצות עם אותו מספר האיברים). אולם אפשר לבצע עוד צעד, ולקשר בין ערך המספר לבין מאפיין מסוים של אובייקט אחר, למשל, לראות מספר טבעי כאורך קטע מסוים.

אפילו לקוראים לא ותיקים למדי בתחום הוראת מתמטיקה ברור כי מדובר על **הגישה התבניתית**, (או במונחים "עממיים", על מודל הבדידים) שעמדה בלב עשייתה של פרלה נשר. במודל זה "הבדיד" (תיבה בעלת בסיס ריבועי) מציג מספר כאורך (גובה של תיבה המונחת על הבסיס). השימוש בכלי הופסק בראש ובראשונה בגלל פרקטיקה של הבלטת התכונות המשניות של האובייקט ("בדיד בצבע אדום") במקום מאפיינו האימננטי - האורך (ספרד ופרל, 1995).

בתולדות המתמטיקה הבנת הערך **כאורך הקטע** מהדהדת את ה־"יסודות" של אוקלידס: בגישה זו, האובייקט קיים אם ורק אם הוא בר בנייה גאומטרית (כלומר, בנייה בעזרת סרגל ללא סימנים עליו ומחוגה). מבחינה זאת, מספר טבעי מתקבל בעזרת "העתקה" ("הכפלה") של אותו קטע יחידה על הקו הישר שבו

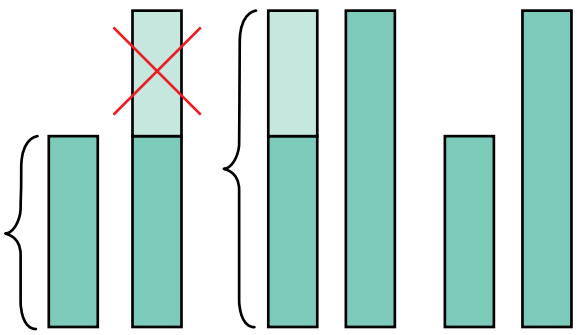


ממוקם קטע זה. בהמשך, בעזרת חלוקת קטע יחידה לחלקים שווים מוגדרים שברי יחידה, ואז גם המספרים הרציונליים. גישה זו לא הייתה ייחודית לארץ: קטע יחידה כבסיס להבניית מושג המספר בבית הספר היסודי שימשה ומשמשת, למשל, באסקולה של דוידוב בברית המועצות ואחר כך ברוסיה (Schmittau, 2005). חשוב לדעת, כי מאחורי גישה זו יש עיקרון מתמטי עמוק: ערך של מספר אפשר להגדיר כמרחקו מנקודה מסוימת - וכך בעצם לבנות את ישר המספרים, בהתחלה כ־"שנתות" במרחקי יחידה זה מזה, ובהמשך "למלא" אותו בהדרגה במספרים רציונליים וממשיים.

במודל זה אותן כמויות מוצגות בעזרת אותו אובייקט, קטע באורך מסוים, ובכך כמויות אלו שוות "לפי הגדרה". השוואת הערכים היא השוואת אורכים: כמות גדולה יותר מוצגת בעזרת קטע ארוך יותר. במילים אחרות, הרעיון של השוואה בא כאן לפני קביעת ערך המספר, ההשוואה היא לפני המדידה, ובכך היא אוניברסלית ולא תלויה בערכים הקונקרטיים שאותם מציגים הקטעים. גם כאשר קטע אחד ארוך יותר מאחר, אפשר להגיע לאורכים שווים. יש מספר אפשרויות לבצע זאת, אך ביניהן שתי דרכים בולטות: להשלים קטע קצר באורך מסוים בחלק "החסר"; לחלופין, אפשר גם להסיר קטע מקטע ארוך יותר, ובכך להגיע לקטע קצר יותר. חשוב כי הקטע "המיותר" או "המשלים" זהה בשני תהליכים אלה, (ראו איור 1).

איור 1

שני קטעים שונים ושתי דרכים להגיע לאורכים שווים מבלי לשנות אחד מהם: הארכת קטע קצר בקטע מסוים או הקטנת קטע ארוך באותו קטע (מסומנת התוצאה אחרי ההשוואה).

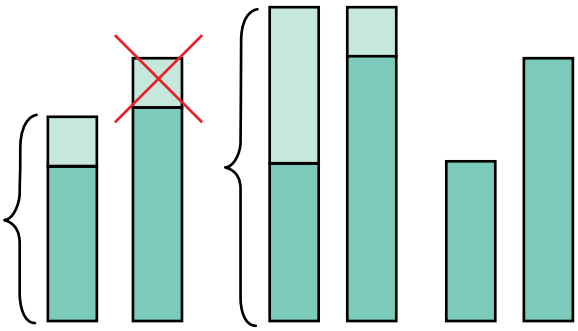


אגב, הצגה זו מזמנת דיון על אודות אפשרויות נוספות, כלומר הקטנה של קטע ארוך יותר עם הארכה של קטע קצר, או הארכה של שניהם (באורכים שונים כמובן) ועוד (ראו איור 2).

בנוסף, **המספר עצמו מורכב מחלקיו**, ואז כל קטע ניתן לחלוקה ("פיצול" ולאו דווקא חילוק) בדרכים רבות ומגוונות. כלומר, אותו מספר 5 אפשר להציג כסכום של חלקיו השונים, בשלב הראשון כסכומים 4+1, 3+2, 2+3, 1+4 (נציין כי חילופיות פעולת החיבור מומחשת כאן באופן טבעי). לאחר מכן נוספות עוד הצגות כשני סכומים שבהם אחד המחוברים הוא 0, וגם הצגות המספר כסכום של יותר משני מחוברים (דוגמת 3+1+1=5). בין חלוקות, "פיצולים" אלה של מספר, קיימות גם הצגות מיוחדות, שבהן כל המרכיבים שווים זה לזה, והצגות אלו מצביעות על חילוקו של מספר לחלקים שווים, וגם עולים כאן המושגים מחלק המספר וההתחלקות (לרבות חילוק ל־2 וזוגיות המספר).

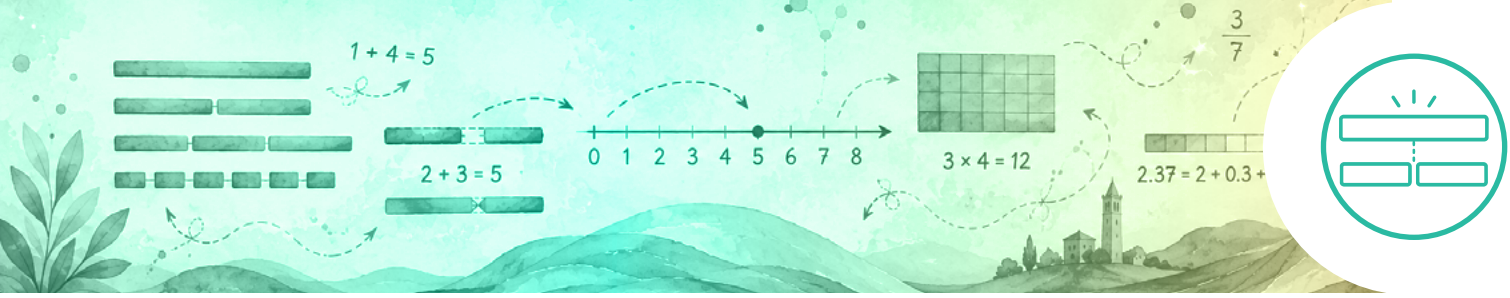
איור 2

דרכים "פחות שגרתיות" להשוות אורכי שני קטעים שונים (מסומנת התוצאה אחרי ההשוואה).



גישה זו, בשימושה המושכל, סוללת את הדרך לאינסוף הצגות של המספר כסכום זוגות מספרים רציונליים ואף ממשיים ה"משלימים" זה את זה. בכך, השלם מוצג בו־זמנית כאובייקט אחיד וכן כתוצר של הרכבת חלקיו השונים. תפיסה זו היא אבן יסוד בהבנת שימור הכמות ושימור הערך, הבסיס לכל העיסוק במתמטיקה.

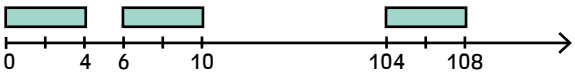
יתרה מכך, אורך הקטע נשמר ולא משתנה במהלך התזוזה. משום כך, המספר 4 אינו רק מייצג את



המרחק שבין 0 ל־4 על ישר המספרים, אלא משקף גם את המרחק הקבוע בין מספר בלתי מוגבל של זוגות מספרים, כגון המרחק בין 1 ל־5, בין 6 ל־10, בין 104 ל־108 ועוד. הבנה זו מעניקה פרשנות עמוקה למושג ההפרש, הנתפס כעת כמרחק שבין שני ערכים (הגדול והקטן) על פני ישר המספרים (ראו איור 3).

איור 3

אותו אורך כשימור הפרש בין הנקודות המציגות את המספרים על ישר המספרים.

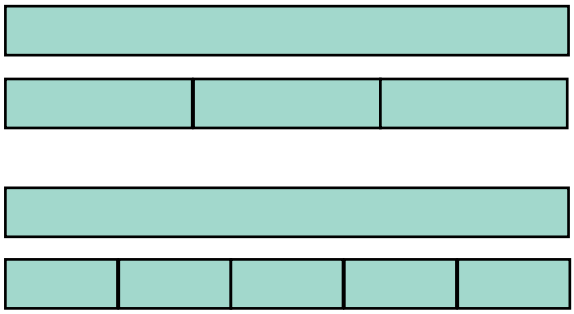


לאן זה מוביל? המשך לימודי אריתמטיקה

1. במודל הנדון, עשרה קטעי יחידה זהים ("המקלות הקצרים ביותר") מרכיבים את ה־"מקל הארוך ביותר" המייצג את 10, עשרת שלמה. אם נתייחס לקטע זה כעת כאל היחידה (נעשה ZOOM-OUT פי עשרה) הבניית שיטת ספירה פוזיציונית, שבה ערך הספרה תלוי במיקומה בכתיבת המספר הרב־ספרתי, מייד גוררת קביעת עשרה קטעים אלה כיחידה הבאה, גדולה עוד יותר (עשר עשרות, מאה) - וכך עוד ועוד, בעצם ללא הגבלה. זהו כמובן תהליך (שמתואר כאן באופן סכמתי ביותר) של הבניית המבנה העשרוני של המספר[1].
2. אולם אפשר גם "להפוך" תהליך זה: לראות לא רק את היחידה הגדולה מורכבת מהיחידות הקטנות הזהות באורך, אלא גם להביט על כל אחת מיחידות אלו כעל אוסף של קטעים זהים. גם לרעיון של חלוקת היחידה מקורות היסטוריים במתמטיקה יוונית. חלקים שווי אורך בחלוקת יחידה זו מציגים, כמובן, את שברי היחידה: שליש במקרה חלוקת היחידה לשלושה חלקים שווים באורכם, חמישית במקרה חלוקת היחידה לחמישה קטעים שווים וכדומה (ראו איור 4, שימו לב להשוואה הטבעית בין שליש וחמישית).

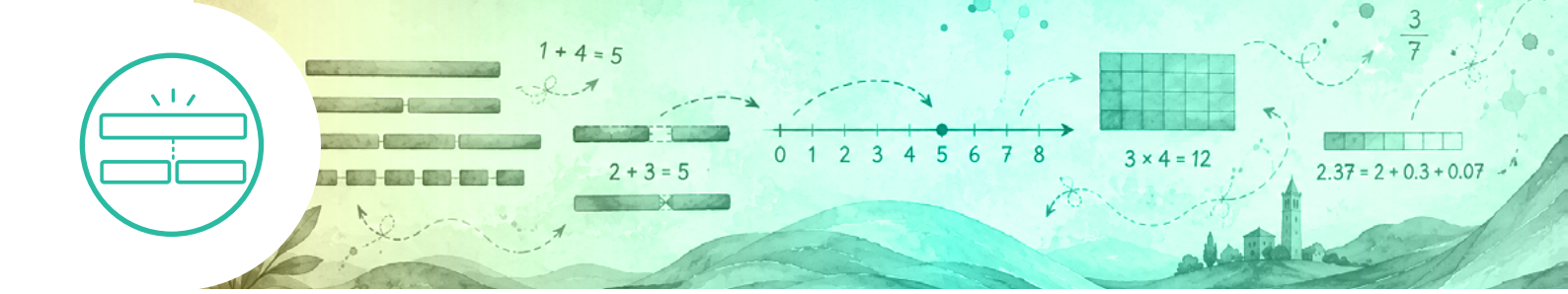
איור 4

הרכבת יחידה משלושה שברי יחידה זהים (למעלה) ומחמישה שברי יחידה זהים (למטה).



3. בנוסף, נציין כי "ZOOM-IN" באנלוגיה מלאה עם העברה מיחידות לעשרות ובהמשך למאות ובכלל לחזקות של 10 מזמן חלוקת יחידה בדיוק לעשרה חלקים שווים, וכל חלק הוא עשירית היחידה. בהמשך, חלוקה זו חוזרת שוב ושוב ליחידות קטנות וקטנות יותר. בכך, היא מספקת את הרחבת המבנה העשרוני לחלקי היחידה, כלומר למספרים רציונליים קטנים מאחד כמספרים עשרוניים עם הצגתם טבעית על ישר המספרים. אגב, רעיון ההיכרות עם מספרים עשרוניים והלמידה שלהם לפני שברים פשוטים אפשרי ומוצדק מבחינה מתמטית-דידקטית (מובשוביץ-הדר וסיניצקי, 2013).
4. "המקלות הצבעוניים" ממחישים לא רק אורכים שונים, אלא גם שטחים ואף נפחים: "מקל היחידה" הוא קובייה, ומקלות אחרים הם תיבות בעלות בסיס ריבועי בעל צלע באורך יחידה אחת. נציין כאן יישום דו־ממדי של המודל. כפל בקבוצת המספרים הטבעיים הוגדר כחיבור חוזר של מחוברים זהים, והמודל התבניתי מספק תובנה זו: שני "מקלות" באורך 3 "ממלאים" את הקטע באורך 6, אך אפשר לסדרם גם בצורה אחרת, אחד מעל השני (ראו איור

1. נציין, אגב, כי הבחירה של "המקל הגדול" בדיוק פי עשרה ארוך ממקלות היחידה היא בעצם שרירותית מבחינה מתמטית, ומותאמת "רק" לבסיס 10 של מערכת הספירה שלנו (שמקורה כמובן אינו מתמטי אלא פיזיולוגי - עשר אצבעות על ידיו של בן אדם). מבחינה מתמטית, המודל מאפשר להציג את המערכות עם בסיס אחר.



5), ובכך מורכב מהם מלבן עם ממדים 3 על 2 (נזכיר "עובי" של יחידה אחת לכל מקל). גישה זו **מגדירה** את שטח המלבן ככמות היחידות המרכיבות אותו, והולכת יד ביד עם הצגת לוח הכפל של פיתגורס. מנקודת מבט פיתגוריאנית, כפל אינו רק פעולה - אלא יש לו משמעות גאומטרית, ולוח הכפל מדגיש זאת (לרבות חילופיות הכפל כ"הפיכת" המלבן, מקרים מיוחדים של ריבועים כמלבנים שווי צלעות ועוד).

איור 5

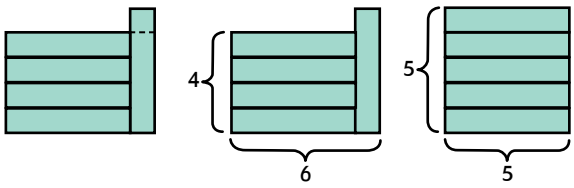
ממחוברים זהים למכפלת המספרים.



5. נדגים עוד, כי המודל המוחשי המוזכר מספק כלֵי **חקר של תכונות כפל** די מתקדמות. למשל, חמישה מקלות בגודל 5 המונחים זה מעל זה מרכיבים ריבוע ששטחו כמובן שווה ל־5×5=25 יחידות שטח. אם תלמיד "סתם משחק" ומעמיד את המקל ה־"עליון" של קונסטרוקציה זו ליד ארבעה אחרים, מתקבל כאן מבנה מורכב יותר - ומהו? הוא מורכב ממלבן שממדיו הם 4 (הורד גובהו ב־1) על 6 (נוספה לאורכו המקורי יחידה אחת), וגם מ־"צ'ופצ'יק", ריבוע יחידה (ראו איור 6). האם מדובר רק במשחק מצחיק? כלל לא: שטח הצורה כולה כמובן נשמר בהזזת המקל, ובכך שטח המלבן המתקבל קטן ב־1 משטח הריבוע המקורי. חשוב גם כן לציין כי למלבן זה, 6 על 4, היקף זהה להיקף הריבוע: הארכת צלע אחת מתלווה לקיצור צלע סמוכה באותו אורך. בשפת המספרים, ערך המכפלה 5×5 גדול ב־1 מערך המכפלה 6×4 בעלת אותו סכום הגורמים. כיווני החקר ברורים מכך: מה יקרה אם "נעמיד" רצועה נוספת (ובכך מעבר למלבן 7×3), והאם התוצאות המתקבלות תלויות בכלל בממדי הריבוע המקורי?

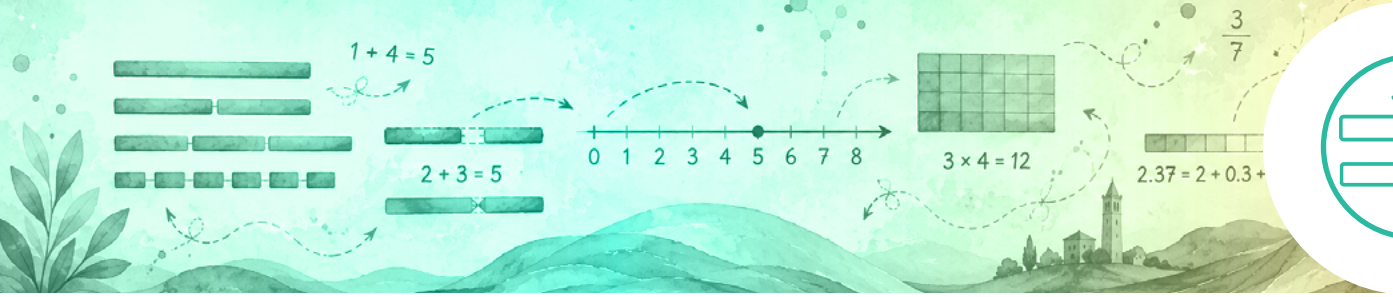
איור 6

יישום מודל הבדידים לחקר: השוואת שטחים בין מלבנים שווי היקף (פרטים בתוך המלל).



ובמבט כללי יותר

בסופם של דבריי לזכרה של פרלה נשר ברצוני לציין כי היא התמידה להציג את התמחותה דווקא בתחום השלבים הראשוניים של בניית ידע מתמטי. אך מעבר להשפעה "המיידית" על הלומד הצעיר, לגישה התבניתית שבה התמקדנו כאן קיימת גם תרומה לטווח הארוך בהמשך למידת המתמטיקה. לשיטה זו הדגשים אלגבריים ברורים: היא מבוססת על (ומפתחת את) יכולת **ההפשטה**, מזמנת ודוגלת ב**הכללות**. אך נראה כי ייחודיות הגישה בפיתוח יכולת לראות את הביטוי המתמטי כמשהו מובנה ושלם: 2+3 זאת אחת מההצגות של מספר, והוא גם סכום של שני מספרים, וגם אובייקט אחד. יכולת זאת, **חשיבה מבנית** (structure sense), היא מרכיב חשוב מאוד של חשיבה אלגברית מתקדמת (Hoch & Dreyfus, 2006). עם יכולת ראייה של מבנים סמויים, תלמידים, לדוגמה, מזהים סכום של מספרים זהים כמכפלה - ובהמשך אמורים להיעזר ביכולת זאת בכינוס איברים דומים ברב־איבר. הם אמורים לזהות את הביטויים $\frac{a+3}{a-1}$ ו־$\frac{a-1}{a+3}$ כזוג מספרים הופכיים, ולגלות מייד כי למשוואה $1-\frac{1}{n+2}=(1-\frac{1}{n+2})$ אין פתרונות (כאשר אפילו לא מוסיפים סוגריים להפרש בין שני האיברים הראשונים באגף שמאל של המשוואה). בהמשך, ראייה זאת מאפשרת לקבוע כי לאי־שוויון "מורכב מאוד" $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}<1$ בכלל אין מה לחפש פתרונות: סכום של שני מספרים אי־שליליים לא יכול להיות שלילי. נדמה, כי יכולות אלו "לפתור מבלי לבצע שום פעולה ו־"רק" לחשוב ולשקול" משמעותיות יותר מאשר שימוש בטכניקות פורמליות למיניהן.



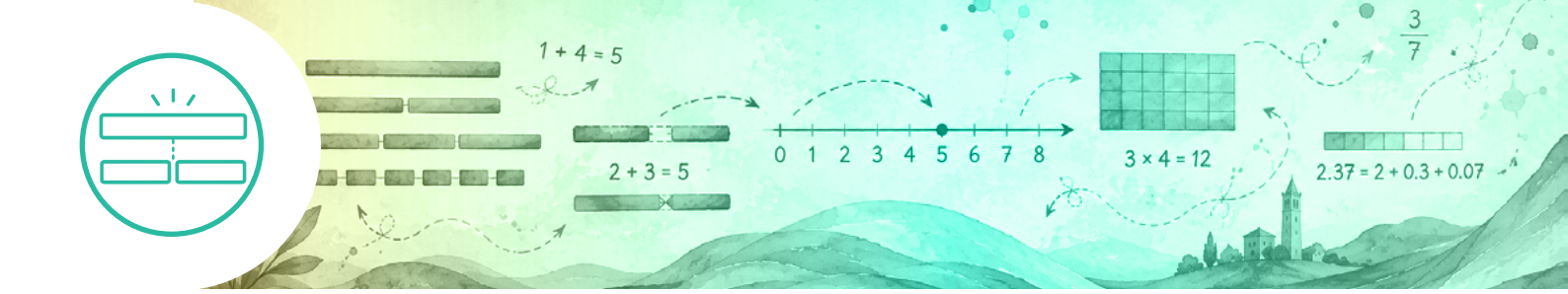
פעילותה של פרופ' פרלה נשר, עמיתיה ותלמידיה השפיעה ועוד תשפיע רבות על חקר בחינוך מתמטי, ועל עשייה הוראתית בארץ וגם בעולם.

יהי זכרה של פרלה ברוך.

ביבליוגרפיה

- מובשוביץ-הדר, נ' וסיניצקי, א' (2013). האם אפשר בלי שברים פשוטים? - לא, אבל... חלק א: העשרוניים כנתיב להבנת השבר הפשוט. *מספר חזק 2000, 24*, 21-28.
- ספרד, א' ופרל, ח' (1995). שיחה עם פרופ' פרלה נשר - המדענית הראשית של משרד החינוך. *על"ה - עלון למורי המתמטיקה, 16*, 1-9.
- Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375-402.
- Fishbein, E. (1983). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9-18.
- Hoch, M., and Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Prague, Czech Republic: PME.
- Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective. *ZDM - Mathematics Education, 37*(1), 16-22.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169.




1 + 4 = 5
2 + 3 = 5
0 1 2 3 4 5 6 7 8
3 × 4 = 12
3/7
2.37 = 2 + 0.3 + 0.07


3×4=12
0 1 2 3 4 5
5=2+3
5=1+4

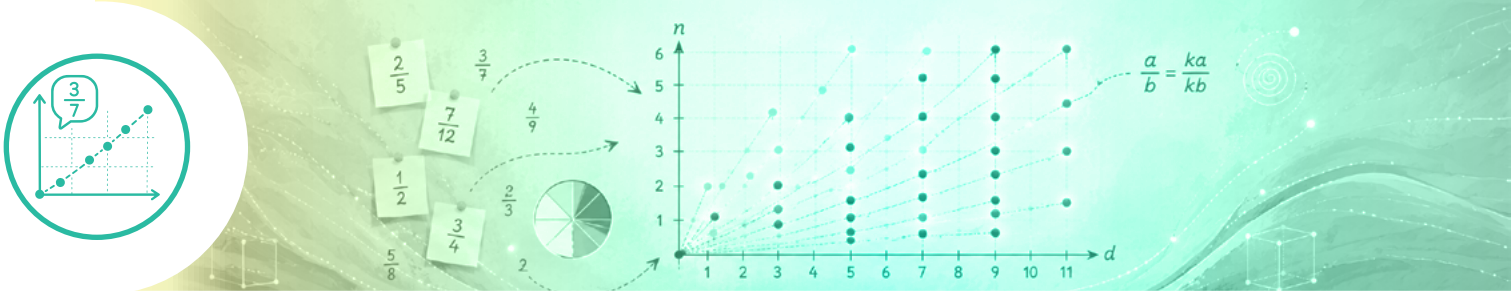


לראות מעבר לתשובה: ייצוג קרטזי ככלי דיאגנוסטי לזיהוי אסטרטגיות עבודה של תלמידים במשימות של שברים עם תשובות רבות

ד"ר אמל קעדאן,
אוניברסיטת חיפה

פרופ' מיכל ירושלמי,
אוניברסיטת חיפה

Prof. Daniel Chazan,
University of Maryland, USA



לראות מעבר לתשובה: ייצוג קרטזי ככלי דיאגנוסטי לזיהוי אסטרטגיות עבודה של תלמידים במשימות של שברים עם תשובות רבות

אמל קעדאן, מיכל ירושלמי, דניאל חזן

תקציר

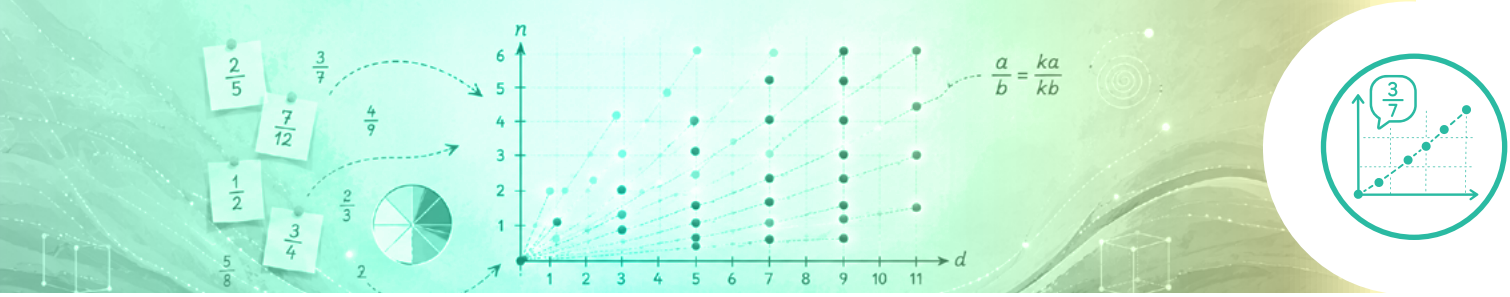
כמורים למתמטיקה קל לנו לסמן תשובות של תלמידים כנכונות או כשגויות, אך קשה יותר להבין את החשיבה שעומדת מאחוריהן. למשל, כדי ללמוד על הבנת מושג השבר של תלמידים נבקש למצוא שבר בין שני שברים נתונים. תשובה נכונה לא בהכרח תבהיר לנו אם השבר נתפס כמספר (כגודל), אם התשובה היא תוצאת כלל חישובי גרידא, או אם היא נובעת מהתייחסות למונה ולמכנה כאל שני מספרים שלמים ונפרדים. כל אחת מהאפשרויות תצריך דגשים והסברים שונים במהלך ההוראה. במאמר זה אנו מציעים דרך לייצוג תשובות תלמידים באופן שיוכל לשמש ככלי המאפשר למורה לאבחן את אסטרטגיית העבודה של התלמידים. באמצעות דוגמאות מתוך עבודות תלמידים, נראה כיצד דפוסים חזותיים לשברים בעלי מכנה קבוע, לשברים שקולים, או להרחבה נכונה או שגוייה של השבר יכולים לסייע למורה לתכנן משוב ממוקד, שיחה מתמטית או משימת המשך. נרחיב ונדגים כיצד סביבת הערכה שבמרכזה ייצוג קרטזי, שבו כל שבר מוצג כנקודה במישור, מזמנת מהלכי הוראה משולבים הערכה מעצבת והוראה מותאמת אישית.

מילות מפתח: שברים; ייצוג קרטזי; אסטרטגיות עבודה; הערכה מעצבת.

מבוא: האתגר מאחורי התשובה הבודדת

כולנו, במהלך ההוראה בכיתה, בזמן תכנון שיעורים ובבדיקת מבחנים, פוגשים תשובות של תלמידים. לעיתים אצל אותו תלמיד חלק מן התשובות נכונות וחלקן שגויות. במבט ראשון אפשר לסמן נכונות, לקבוע ציון, ולהמשיך הלאה. אבל לעיתים קרובות דווקא שם מתחילה השאלה החשובה יותר: מה קורה כאן? האם מדובר באי־הבנה בסיסית? בשימוש בכלל חישובי בלי להבין את משמעותו? או אסטרטגיה עקבית שלעיתים מניבה תשובות נכונות ולעיתים שגויות? ובעיקר, איך אפשר להשתמש בתשובות האלה כבסיס למשוב מקדם ולהערכה מעצבת?

שאלה זו חשובה במיוחד במשימות העוסקות במציאת שבר בין שני שברים (נכנה אותם "שברי העוגן"), בין אם שברי העוגן נתונים מספרית או מיוצגים על ישר המספרים. משימות אלו מופיעות באופן עקבי בתוכנית הלימודים החדשה במתמטיקה (2025), בהערכות ארציות כמו מבחני המיצ"ב (הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך) ובספרי לימוד לכיתה ה' (שבילים פלוס, 2018), כפי שמודגם בטבלה 1. הופעה חוזרת זו מדגישה את מרכזיותו של רעיון ה"בין" (betweenness) בהבנת המספרים הרציונליים, ואת הקשר שלו לרעיונות יסוד כמו סדר, שקילות וצפיפות. שוורץ (1996) מדגיש כי הבנה מושגית של מספרים אינה מתפתחת רק מחזרה על פרוצדורות חישוביות, אלא מעיסוק ישיר ברעיונות כמו סדר, אומדן ומשמעות הכמות (Schwartz, 1996). בהקשר של שברים, הוא מציין כי תלמידים יכולים להשקיע זמן רב בלימוד פרוצדורות כמו מציאת מכנה משותף, ועדיין להתקשות במשימה בסיסית יותר מבחינה מושגית: להציע שבר שערכו נמצא בין שני שברים נתונים. לכן, משימות אלו מאפשרות למורה לבדוק תוך כדי הערכת תוצאות תרגול, האם התלמיד מבין את השבר כמספר שניתן להשוות, למקם ולאמוד את ערכו ביחס לשברים אחרים.



טבלה 1

דוגמאות למשימות של מציאת שבר בין שני שברים

1. א. לפניכם חלק מישר מספרים המחולק לחמישה קטעים שווים.



תנו דוגמה לשני מספרים שיכולים להיות על הקטע המסומן באדום ודוגמה לשני מספרים שיכולים להיות על הקטע המסומן בכחול.

ב. יעל טוענת שבין שני השברים $\frac{1}{2}$ ו־$\frac{3}{4}$ יש רק שבר אחד $\frac{2}{3}$. הסבירו מדוע יעל טועה (תוכנית הלימודים החדשה במתמטיקה, 2025).

2. כתבו שבר כלשהו הנמצא בין השבר $\frac{3}{4}$ לשבר $\frac{4}{5}$ (מיצ"ב 2014/2013).

3. לפניכם ישר מספרים (מיצ"ב 2015/2016):



איזה מספר מבין המספרים שלפניכם נמצא בקטע המודגש על ישר המספרים?

1 ☐ $\frac{6}{7}$ 2 ☐ $\frac{7}{8}$ 3 ☐ $\frac{9}{10}$ 4 ☐ $\frac{12}{11}$

4. לפניכם ריבוע שצלעותיו מודגשות (מיצ"ב 2019/2009)

חלק משטח הריבוע צבוע באפור. סמנו את המשפט הנכון.



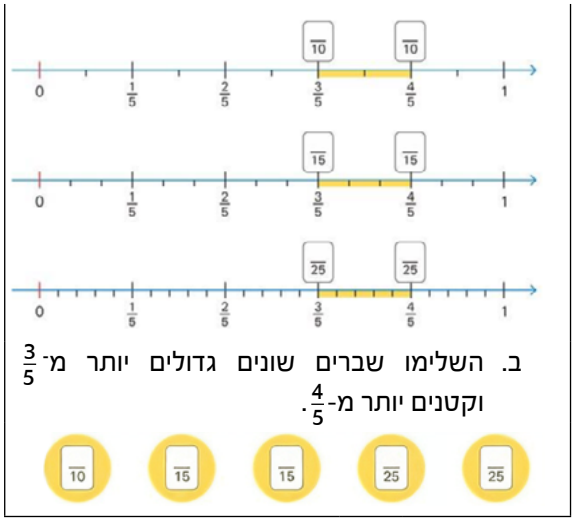
1 ☐ השטח האפור קטן מ־$\frac{1}{4}$ שטח הריבוע.

2 ☐ השטח האפור גדול מ־$\frac{1}{4}$ שטח הריבוע וקטן מ־$\frac{1}{3}$ שטח הריבוע.

3 ☐ השטח האפור גדול מ־$\frac{1}{3}$ שטח הריבוע וקטן מ־$\frac{1}{2}$ שטח הריבוע.

4 ☐ השטח האפור גדול מ־$\frac{1}{2}$ שטח הריבוע.

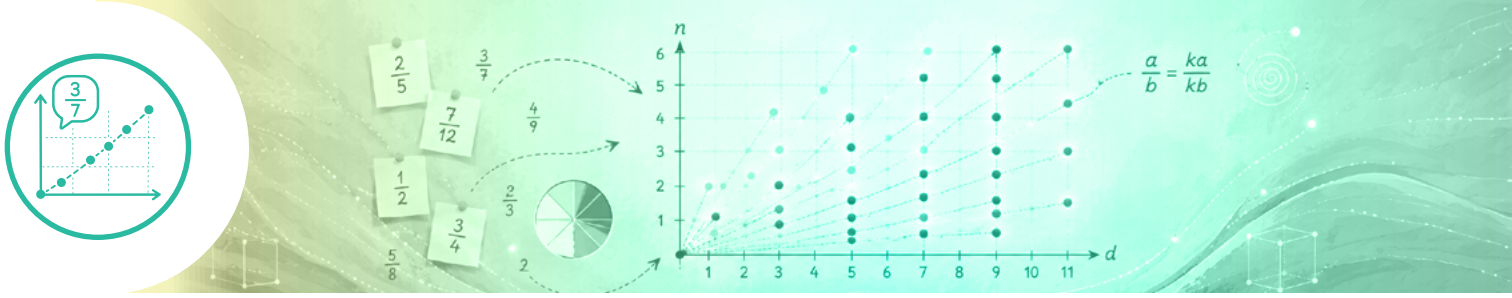
5. א. בכל אחד מהישרים השלימו את השברים השווים ל־$\frac{3}{5}$ ו־$\frac{4}{5}$ (שבילים פלוס לכיתה ה'):



ב. השלימו שברים שונים גדולים יותר מ־$\frac{3}{5}$ וקטנים יותר מ־$\frac{4}{5}$.

בשאלה מן הסוג "כתבו שבר כלשהו הנמצא בין $\frac{1}{3}$ ל־$\frac{3}{5}$", תלמיד עשוי לענות $\frac{2}{4}$. בשאלה אחרת, שבה הוא מתבקש למצוא שבר בין $\frac{1}{5}$ ל־$\frac{2}{5}$, תלמיד אחר עשוי לענות $\frac{2}{6}$. בשני המקרים התשובה עונה על דרישות השאלה, אך מתוך תשובה בודדת קשה לדעת מה עמד מאחוריה: האם התלמיד התייחס לשבר כמספר בעל ערך? האם פירש את המילה "בין" דרך המונים והמכנים של השברים הנתונים? או האם פעל לפי אסטרטגיה אחרת?

לעומת זאת, כאשר מבקשים מן התלמיד ליצור כמה שברים בין שני שברים נתונים, כמו במשימה של מאמר זה שניסוחה הוא: "כתבו חמישה שברים בין שני השברים הנתונים", אוסף התשובות יכול לחשוף דפוסים, הכללות ואסטרטגיות נכונות ושגויות כאחד (Yerushalmy & Olsher, 2020). מחקרים הראו כי הצגת דוגמאות מרובות יחד עשויה לחשוף דפוסים שאינם ניכרים בדוגמה יחידה, וכי המשך הפקת הדוגמאות עשוי להביא לידי ביטוי דרכי חשיבה וקשרים המתגלים רק בשלבים מאוחרים יותר של הרצף (Leung & Lee, 2013; Olsher, Yerushalmy & Chazan, 2016; Yerushalmy, Olsher, Harel & Chazan, 2023). כך למשל, התשובה $\frac{2}{4}$ יכולה להיראות כתשובה נכונה בודדת, אך כאשר היא מופיעה יחד עם תשובות נוספות כמו ($\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$), ניתן לראות שהתלמיד בחר שברים שמוניהם ומכניהם נמצאים בין המונים והמכנים של שברי העוגן או שווים להם. כלומר, ייתכן שהתלמיד פירש את הדרישה "בין" כהשוואה בין רכיבי השבר, ולא



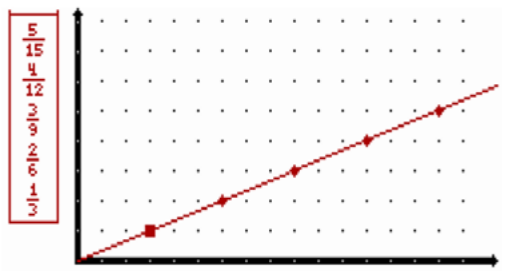
כהשוואה בין ערכי השברים.

באופן דומה, התשובה $\frac{2}{6}$ יכולה להיראות כתשובה נכונה כאשר בודקים אותה לבדה. אולם כאשר מתבוננים בה כחלק מאוסף תשובות כמו ($\frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{9}, \frac{6}{10}$), ניתן לזהות שהתלמיד הפעיל כלל עקבי של הוספת אותו מספר למונה ולמכנה של אחד משברי העוגן ($\frac{1}{5}$). במקרה כזה, אוסף התשובות אינו משמש רק לבדיקה של נכון או לא נכון, אלא הופך לכלי לזיהוי דרך הפעולה שעמדה מאחורי הבחירה. רעיון זה מתחבר להצעתו של שוורץ (Schwartz, 2018), שלפיה יש ערך רב במשימות שאינן מסתיימות בתשובה נכונה אחת בלבד. במשימות כאלה תלמידים נדרשים להציע דוגמאות, להשוות ביניהן ולהצדיק מדוע הן עומדות בתנאי המשימה. בהקשר של מציאת שברים בין שני שברים, ריבוי התשובות האפשריות יוצר צורך בכלי שיאפשר למורה לארגן את מרחב התשובות, לזהות דפוסים, ולדון עם התלמידים במשמעות המתמטית של הבחירות שלהם.

במאמר זה אנו מציעים דרך "לראות" את הדפוסים האלה באמצעות ייצוג קרטזי של שברים (איור 1). בייצוג זה כל שבר מיוצג כנקודה במישור: המכנה מיוצג על הציר האופקי, והמונה על הציר האנכי. כאשר מציבים במישור את כל השברים שתלמיד הציע, מתקבלת תמונה שיש בה מידע על אסטרטגיית העבודה שלו.

איור 1

השקילות של $\frac{1}{3}$ לפי המאמר של ארנון ואחרים (2001)



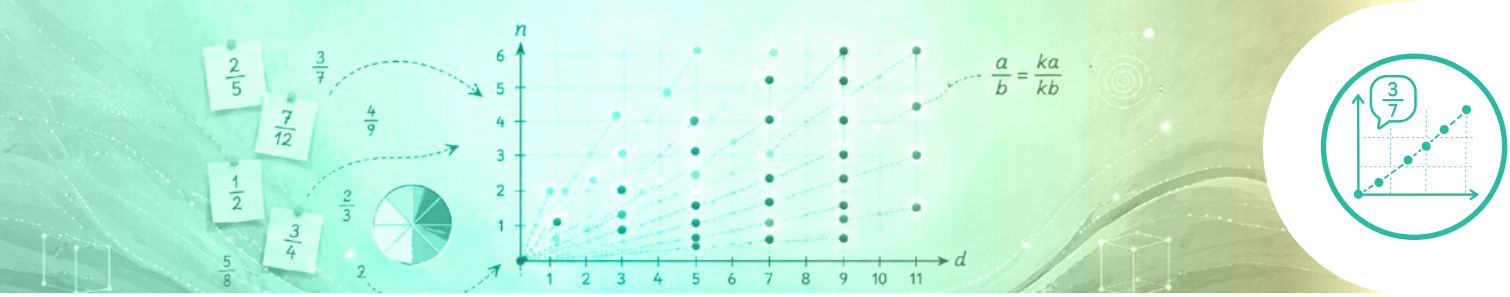
מאמר זה נכתב לזכרה של פרלה נשר ומתוך דיאלוג עם רעיונותיה. נשר ראתה בהוראת מתמטיקה לא רק הקניית כללים ופרוצדורות, אלא הזדמנות להבין כיצד תלמידים חושבים וכיצד ייצוגים מתמטיים יכולים לחשוף מבנים מושגיים (Nesher, 1989). בעבודתה על שברים, ובפרט בייצוג הקרטזי, הודגמה האפשרות להפוך רעיונות כמו שקילות, סדר וצפיפות לנראים עבור תלמידים ומורים כאחד (Arnon, Nesher, & Nirenburg, 2001). במאמר הנוכחי אנו מבקשים להרחיב מבט זה: לא רק להשתמש בייצוג הקרטזי ככלי הוראה לתלמידים, אלא גם ככלי דיאגנוסטי המאפשר למורים להתבונן באוסף התשובות של התלמידים מעבר לנכונותן, לזהות דרכי עבודה, אסטרטגיות והחשיבה המתמטית שלהם. בדרך זו אוסף תשובותיו של התלמיד, כפי שהוא מיוצג במישור הקרטזי, הופך לכלי עבודה בידי המורה. הייצוג משמש מפה חזותית של אסטרטגיות, קשיים והזדמנויות להוראה, ומסייע למורה להחליט מה כדאי לברר עם התלמידים ומה נכון ללמד או להעמיק בהמשך.

מתודולוגיה: כיצד נאספו הנתונים?

בפעילות השתתפו 47 תלמידים בכיתות ה'-ו'. התלמידים התבקשו לפתור שבע משימות, ובכל אחת מהן לכתוב חמישה שברים הנמצאים בין שני שברים נתונים. הבחירה לבקש חמישה שברים נועדה ליצור רצף רחב דיו לזיהוי אסטרטגיה או דפוס חוזר במרחב הדוגמאות האישי של התלמיד. חמישה שברים נבחרו כמספר מספק למטרה זו וכאיזון עם הזמן הכיתתי.

כדי לבחון כיצד אפשר לזהות דרכי עבודה ואסטרטגיות של תלמידים בשברים, פיתחנו סביבת עבודה דיגיטלית (יישומון) המבוססת על ייצוג קרטזי של שברים. בסביבה זו כל שבר שהתלמיד כותב מוצג כנקודה במישור: המכנה מיוצג על הציר האופקי והמונה מיוצג על הציר האנכי. כך, במקום לראות רק רשימה של שברים, אפשר לראות את מכלול התשובות של התלמיד כתמונה אחת. למשל באיור 2א שני שברי העוגן הם $\frac{3}{8}$ ו־$\frac{5}{8}$, וחמשת השברים שהתלמיד הציע כשברים בין שני השברים הנתונים הם: $\frac{7}{12}, \frac{5}{10}, \frac{5}{12}, \frac{3}{11}$ ו־$\frac{7}{8}$.

ביישומון קיימת אפשרות להזין שברים בצורה $\frac{a}{b}$, כך שכל שבר מוצג באופן מיידי כנקודה (a, b) במישור הקרטזי. עם זאת, במחקר הנוכחי בחרנו שהתלמידים יכתבו תחילה את תשובותיהם בנייר ועיפרון. בחירה זו נועדה, מצד אחד, לאפשר לנו לבחון את דרכי החשיבה והאסטרטגיות של התלמידים ללא השפעת ההמחשה

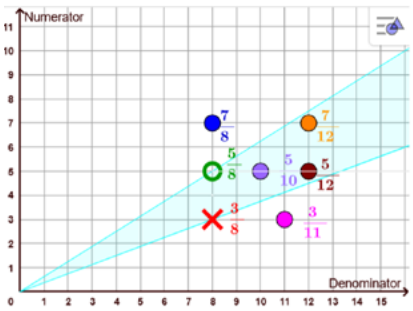


הגרפית, או המשוב המיידי של היישומון; וגם כדי, לשמר עדויות לתהליך עבודתם, כגון חישובים ורישומים שעשויים להעיד על הדרך שבה פעלו. לאחר איסוף הדפים הוזנו תשובותיו של כל תלמיד ליישומון על ידי החוקרים. כל שבר שהוזן הוצג כנקודה במישור הקרטזי, וכך נוצר עבור כל תלמיד מרחב דוגמאות חזותי, אוסף נקודות המייצג את השברים שבחר.

איורים 2א-2ג מדגימים שלושה מבטים אפשריים על תשובות תלמידים המאורגנות בייצוג הקרטזי. כל אחד מהמבטים מאפשר לבחון אם התשובות מתאימות לדרישת השאלה, ומן הארגון במישור ניתן ללמוד על דרך העבודה של התלמיד. כל נקודה (b, a) מייצגת שבר $\frac{a}{b}$. שני שברי העוגן מיוצגים על ידי X אדום (השבר הקטן) ועיגול ירוק (השבר הגדול). שאר הנקודות הן חמשת השברים שהתלמיד הציע כשברים בין שברי העוגן.

איור 2א

תחום התשובות הנכונות

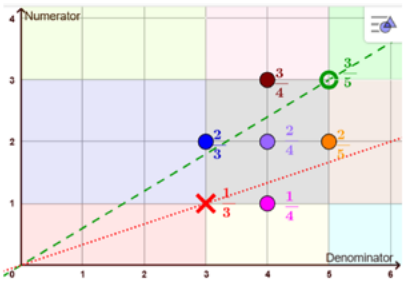


במבט הראשון קל לעקוב אחר הנכונות המתמטית של אוסף תשובות (איור 2א): בדקנו אם הנקודות המייצגות את השברים שניתנו כתשובות נמצאות באזור שבין שברי העוגן שנמצא בין שתי הקרניים היוצאות מראשית הצירים ועוברות דרך שברי העוגן, או מחוצה לו. מבט זה מאפשר לראות לא רק אם תשובה אחת נכונה או שגויה, אלא אם אוסף התשובות כולו נמצא בתוך תחום התשובות הנכונות או חורג ממנו.

המבט השני הוא על היחסים בין רכיבי השבר (איור 2ב): בחנו כיצד התלמידים בחרו את המונים והמכנים של השברים שלהם. הצבעים ברקע של האפלט מראים יחסים אלו. למשל, האם הם בחרו מונים ומכנים גדולים יותר מאלו של שברי העוגן, קטנים יותר, או כאלה שנמצאים ביניהם. מבט זה עוזר להבין האם התלמיד מתייחס לשבר כיחס בין מונה למכנה, או בעיקר לשני מספרים נפרדים כמו במספרים טבעיים. באיור 2ב מוצגים שני שברי עוגן $\frac{1}{3}$ ו-$\frac{3}{5}$. השברים שבחר התלמיד הם $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ ו-$\frac{2}{5}$. מן האיור ניתן לראות כי כל השברים הללו נמצאים בתוך המלבן האפור או על צלעותיו. ממצא זה עשוי להעיד כי בעת בחירת השברים שבין שני שברי העוגן, התלמיד הקפיד שלא לחרוג מטווח המונים והמכנים המופיעים בשברי העוגן.

איור 2ב

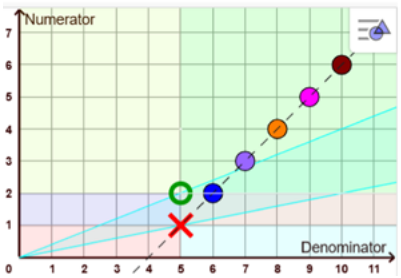
יחסים בין רכיבי השבר

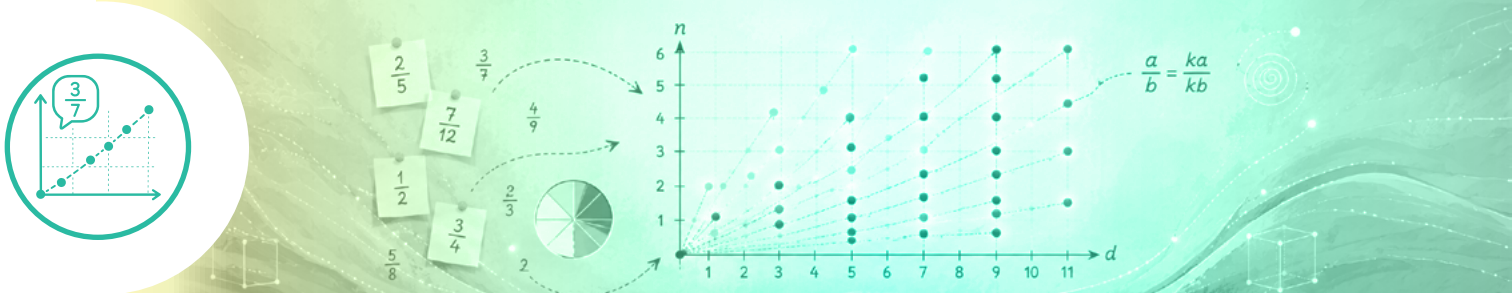


המבט השלישי היה תבניות חזותיות במישור (איור 2ג) שיכולות להעיד על דרכי עבודה ואסטרטגיות אצל התלמידים: חיפשנו דפוסים גיאומטריים בתשובות התלמידים שיכולים לרמוז על אסטרטגיות שונות. כגון קווים אלכסוניים (איור 2ג) שעשויים להעיד על תפיסות מוטעות כמו בדוגמה של הוספת מספר קבוע למונה ולמכנה של אחד משברי העוגן שראינו קודם.

איור 2ג

תבניות חזותיות במישור שיכולות להעיד על אסטרטגיות עבודה





באמצעות שילוב של שלושת המבטים, נכונות מתמטית, יחסים בין רכיבי השבר ותבניות חזותיות, ניתחנו את מרחבי הדוגמאות של התלמידים במטרה להבין את דפוס העבודה העומד מאחוריהן, ובכך להפוך את הייצוג הקרטזי ככלי דיאגנוסטי שיכול לשמש את המורה.

ממצאים: ניתוח אסטרטגיות עבודת התלמידים באמצעות דפוסים חזותיים

בחלק זה נציג דוגמאות מתוך עבודות תלמידים, ונראה כיצד הייצוג הקרטזי מאפשר לזהות אסטרטגיות, קשיים והזדמנויות להוראה מתוך מכלול הבחירות של התלמידים.

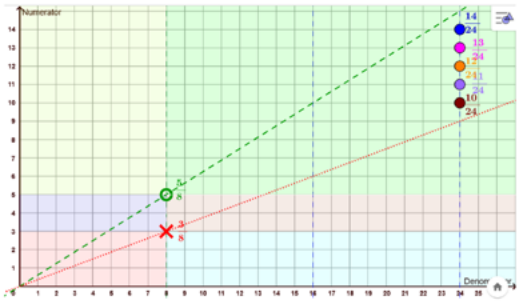
1. שימוש במכנה קבוע (איורים א3-ד3)

להלן דוגמאות להגשות שבהן תלמידים השתמשו במכנה קבוע. בכל הדוגמאות הנקודות מופיעות לאורך קו אנכי, משום שהמכנה נשאר קבוע. עם זאת, ההבדלים בין הדוגמאות מראים שלא כל שימוש במכנה קבוע מוביל לאותה דרך פעולה או לאותה רמת נכונות.

איורים א3-ד3 מדגימים שימוש במכנה קבוע או במכנה משותף כאשר השברים שבוחר התלמיד משתקפים כנקודות על קו או קווים אנכיים.

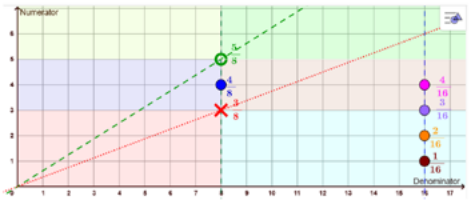
איור א3

הרחבה למכנה משותף עם מרווח מספיק בין המונים



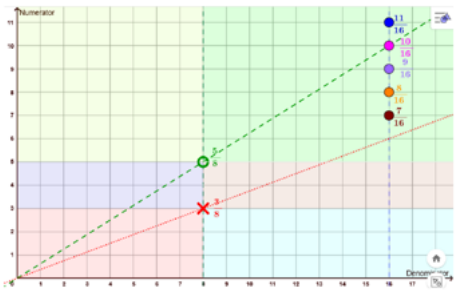
איור ב3

סדרה במונים המתחילה מ־1



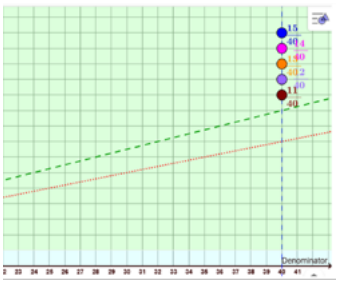
איור ג3

גלישה מחוץ לתחום השברים הנכונים



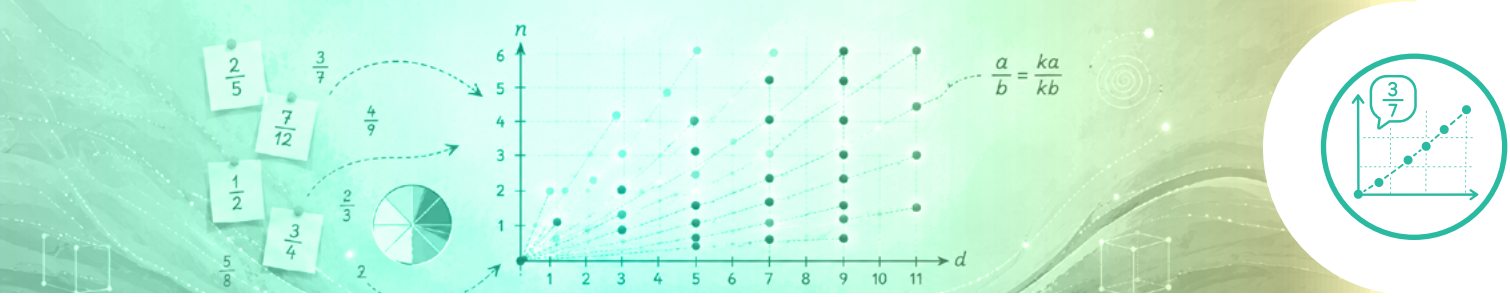
איור ד3

מציאת שבר שקול לשבר הגדול ובחירת השברים על ידי הגדלה סדרתית של המונה



במקרים רבים אפשר לזהות תלמידים המשתמשים במכנה משותף כדי למצוא שברים בין שני שברים נתונים. בייצוג הקרטזי, תשובות כאלה מופיעות כנקודות המסודרות לאורך קו אנכי, כלומר סביב אותו מכנה קבוע. לעיתים זהו המכנה המשותף של שני השברים הנתונים. דפוס זה מאפשר לזהות באופן מיידי שהתלמיד מארגן את הפתרונות שלו סביב מכנה משותף.

אסטרטגיה זו מבוססת בדרך כלל על הרחבת השברים הנתונים למכנה משותף, ולאחר מכן בחירת מונים



הנמצאים בין המונים שהתקבלו. כאשר המרווח בין המונים אלה גדול דיו, האסטרטגיה יכולה להוביל לסדרה של תשובות נכונות, כפי שניתן לראות באיור 3א.

עם זאת, איורים 3ב-3ד מראים גם שלא די בכך שהתלמיד משתמש באותו מכנה. אופן בחירת המונים חשוב לא פחות. בחלק מהמקרים התלמידים בוחרים מונים לפי סדרה קבועה, אך חלק מן השברים המתקבלים נמצאים מחוץ לתחום הפתרון, כפי שניתן לראות באיור 3ג. לעיתים הבחירה מתחילה במספר כמו 1 (איור 3ב), בלי קשר לגבולות המשימה, ולעיתים הבחירה נשענת על השבר הגדול יותר או על שבר שקול לו. כך, באיור 3ד, השבר השקול ל-$\frac{1}{4}$ הוא $\frac{10}{40}$, והתלמיד בחר את שבריו כסדרה עולה שבה המונים גדלים באחד בכל פעם, החל מן המונה של השבר השקול ל-$\frac{1}{4}$.

מה הדפוס מזמין מבחינה פדגוגית? כאשר תשובות התלמידים מסתדרות על קו אנכי, ניתן לשער שהם משתמשים במכנה קבוע או במכנה משותף. אולם הדפוס עצמו אינו מספיק כדי לדעת אם הבחירה מבוססת על הבנת ערך השבר, או על פעולה טכנית בלבד. לכן, השלב הבא בעבודת המורה הוא לברר כיצד נבחרו המונים, ואם התלמידים בודקים את ערך השברים ביחס לשברי העוגן.

התערבות אפשרית אחת היא לבקש מן התלמידים למצוא שברים נוספים בין שני שברי העוגן, אך הפעם בתנאי שלא כל השברים יהיו בעלי אותו מכנה. דרישה זו יכולה לעודד את התלמידים להרחיב את דרכי העבודה שלהם, ולבחון את ערך השבר גם מחוץ לפרוצדורה של מכנה משותף.

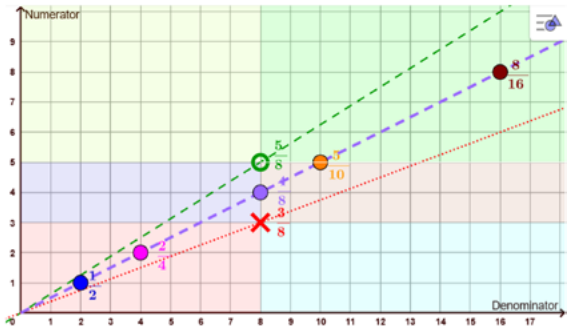
התערבות אפשרית נוספת היא להציג לכיתה כמה תשובות של תלמידים המשתמשים באותו מכנה, חלקן נכונות וחלקן שגויות, ולבקש מן התלמידים להסביר: איזו תשובה נמצאת באמת בין שני שברי העוגן? איזו תשובה חורגת מן התחום? דיון כזה יכול להדגיש שמכנה משותף הוא כלי מועיל, אך אינו מספיק כשלעצמו; יש לבחון גם את ערך השבר ואת מיקומו ביחס לשברי העוגן.

2. יצירת שברים שקולים (איורים 4א ו-4ב)

להלן דוגמאות להגשות שבהן התלמיד אינו יוצר שברים שונים, אלא וריאציות שונות של אותו ערך מספרי של השבר. דפוס זה משקף אסטרטגיה שבה התלמיד יוצר וריאציות של אותו שבר באמצעות הרחבה שיטתית של המונה והמכנה, או בחירת שברים שקולים לשבר ידוע כמו חצי או אחד. כך, למשל, התלמיד מצא את השבר $\frac{4}{8}$ בין שני שברי העוגן $\frac{3}{8}$ ו-$\frac{5}{8}$ ואז הוא בחר "בייצוגים שונים של השבר $\frac{4}{8}$" כפי שהוא כתב בכיתובים כהסבר לדרך העבודה שלו למציאת השברים. השברים שהוא בחר הם ($\frac{8}{16}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$) כפי שניתן לראות באיור 4א.

איור 4א

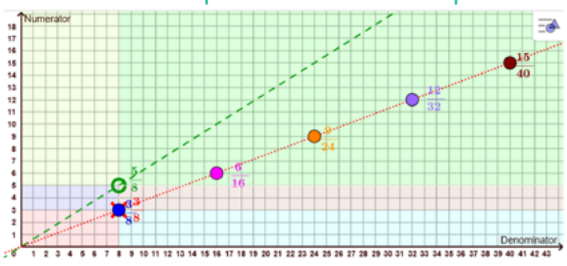
שברים שקולים לחצי



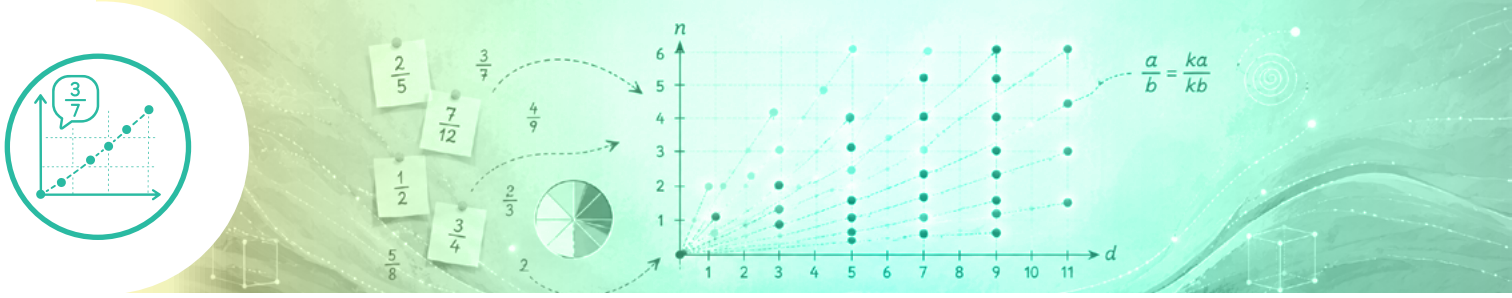
במקרים אחרים השברים נוצרים מתוך הרחבה של אחד משברי העוגן, מתוך הנחה כי שינוי המונה והמכנה יוצר שבר חדש בתחום הפתרון, כפי שניתן לראות באיור 4ב כאשר השברים $\frac{3}{8}$, $\frac{12}{32}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{6}{16}$ ו-$\frac{15}{40}$ הם שברים שקולים לשבר העוגן הקטן יותר $\frac{3}{8}$. בכיתובים שלו, התלמיד הסביר את מציאת השברים בכפל המונה והמכנה של שבר העוגן הקטן באותו מספר (הרחבה).

איור 4ב

שברים שקולים לאחד משברי העוגן



הייצוג הקרטזי מאפשר לראות באופן מיידי שלמרות ריבוי התשובות, כל הנקודות מתכנסות לאותה קרן היוצאת



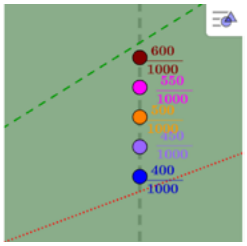
מראשית הצירים (אותו קו של שקילות).
מבחינה הוראתית, זהו הבדל חשוב: המורים יכולים להבחין בין תלמיד שמבין שיש אינסוף שברים שונים בין שני שברים, לבין תלמיד שחוזר על אותו שבר שוב ושוב בצורות שקולות.
מה הדפוס מזמין מבחינה פדגוגית? כאשר הנקודות מסתדרות על קרן אחת היוצאת מראשית הצירים, ניתן לשער שהתלמידים יוצרים שברים שקולים לאותו ערך. מבחינה פדגוגית, דפוס זה מזמין שיחה על ההבדל בין שברים הכתובים בצורות שונות לבין שברים שערכם שונה. המורים יכולים לשאול: האם השברים שכתבת שונים זה מזה? במה הם שונים? האם הם מייצגים ערכים שונים על ישר המספרים? פעילות המשך אפשרית היא לבקש מן התלמידים למצוא שברים נוספים בין שני שברי העוגן, אך הפעם לוודא שכל שבר מייצג ערך מספרי אחר.
אפשרות נוספת היא לתת לתלמידים אוסף של שברים שקולים ואוסף של שברים שונים הנמצאים בין אותם שני שברי עוגן, ולבקש מהם למיין: אילו שברים הם רק ייצוגים שונים של אותו מספר, ואילו שברים מייצגים ערכים שונים? פעילות כזו יכולה לחזק את ההבחנה בין שינוי בצורה הכתובה של השבר לבין שינוי בערך המספרי שלו.

3. הישענות על הייצוג העשרוני (איורים 5א ו־5ב)

להלן דוגמאות להגשות שבהן תלמידים השתמשו בייצוג עשרוני כדי למצוא שברים בין שני שברים נתונים. בייצוג הקרטזי, תשובות כאלה מופיעות כנקודות המסודרות לאורך קווים אנכיים (x=10, 100, 1000), משום שהתלמיד בוחר מכנים שהם חזקות של 10, כגון 100 או 1000. אסטרטגיה זו מבוססת על המרת השברים הנתונים לייצוג עשרוני, בחירת ערכים עשרוניים ביניהם, ולאחר מכן הצגתם מחדש כשברים. למשל, בין $\frac{3}{8}$ לבין $\frac{5}{8}$, תלמידים עשויים לבחור ערכים עשרוניים בין 0.375 ל־0.625 ולהציגם כשברים עם מכנה 100 או 1000. בכיתובים בנייר, אחד התלמידים הסביר את דרך העבודה שלו למציאת השברים: "הרחבתי את שני השברים למכנה 1000 על מנת לכתוב את השברים שביניהם". התלמיד בחר את השברים $\frac{600}{1000}, \frac{450}{1000}, \frac{400}{1000}, \frac{500}{1000}$ ו־$\frac{550}{1000}$. בייצוג הקרטזי זה מופיע כקו אנכי x=1000 כפי שניתן לראות באיור 5א.

איור 5א

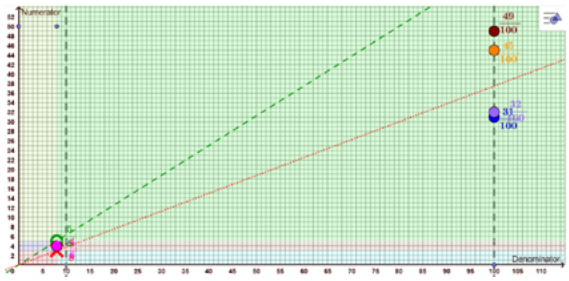
שברים עם מכנה 1000



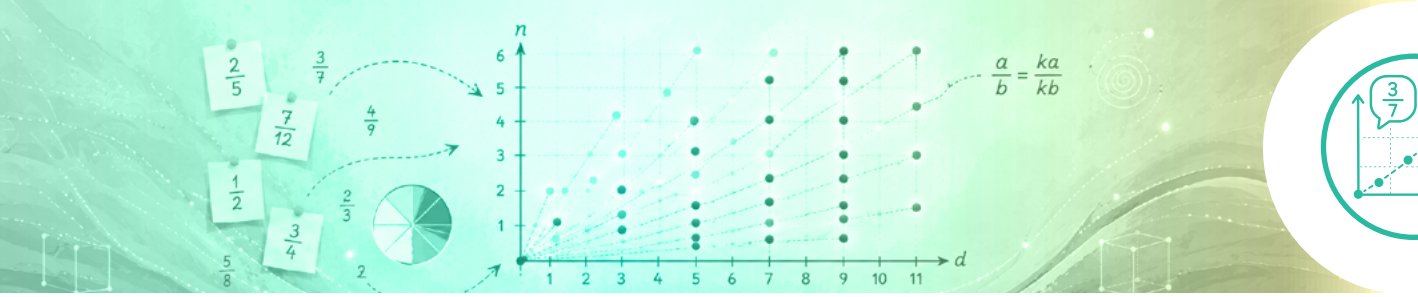
במקרים רבים זוהי אסטרטגיה יעילה, משום שהיא מאפשרת לתלמיד לזהות יחס של סדר בין השברים. בנוסף, הייצוג הקרטזי מאפשר גם לראות מתי ההמרה העשרונית אינה מדויקת. למשל, כאשר מתוך הכיתובים של אחד התלמידים ראינו שהוא ממיר את $\frac{3}{8}$ ל־0.30 ואת $\frac{5}{8}$ ל־0.50, ולאחר מכן הוא בחר את השברים $\frac{45}{100}, \frac{32}{100}$, ו־$\frac{4}{8}$. בייצוג הקרטזי חלק מן הנקודות מופיעות מחוץ לתחום הפתרון, כפי שניתן לראות באיור 5ב. בכך הייצוג הקרטזי מסייע למורה להבחין בין שימוש נכון בייצוג העשרוני לבין שימוש חלקי או שגוי, ולזהות כיצד בחירת הייצוג משפיעה על מיקום השברים ביחס לשברי העוגן.

איור 5ב

שברים עם מכנה 100 לאחר המרה לא מדויקת



מה הדפוס מזמין מבחינה פדגוגית? כאשר התשובות מופיעות סביב מכנים כמו 100 או 1000, ניתן לשער שהתלמידים נעזרים בייצוג עשרוני. דפוס זה מזמין את המורה לבדוק לא רק אם התלמידים יודעים להמיר שברים לעשרוניים, אלא אם הם משתמשים בהמרה כדי להבין סדר וערך. המורים יכולים לבקש מהתלמידים לייצג את שברי העוגן ואת השברים שבחרו בשלוש דרכים: כשברים, כמספרים עשרוניים ועל ישר המספרים. לאחר מכן הוא



יכול לבקש מהם להסביר כיצד כל ייצוג מאשר שהשברים נמצאים בין שני שברי העוגן, ולבחון מקרים שבהם ההמרה העשרונית מקורבת בלבד. פעילות זו נועדה לחזק את הקשר בין הייצוגים ולהעמיק את ההבנה של סדר וגודל, ולא להסתפק בביצוע טכני של המרה.

דיון והשלכות פדגוגיות: מה הכלי מאפשר למורה?

הדגמנו כיצד הייצוג הקרטזי יכול לסייע למורות ולמורים לראות את אוסף התשובות של תלמיד כתמונה אחת, ולא כרשימה של תשובות נפרדות. בכך הוא מאפשר לעבור מבדיקת תשובה בודדת לפירוש של דפוסי עבודה: לזהות אם תלמיד פועל לפי כלל עקבי, נשען על שברים שקולים, מתייחס למונה ולמכנה בנפרד, או מתקשה בהבנת סדר וצפיפות של שברים.

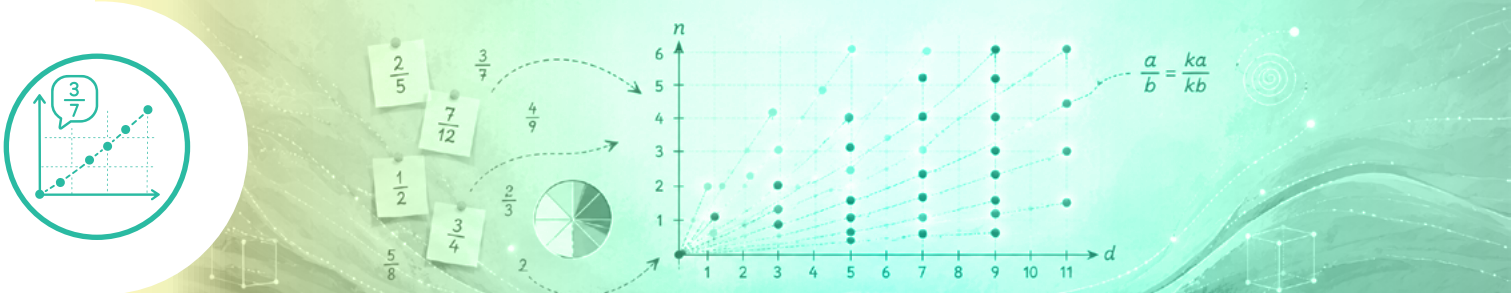
מנקודת מבט של הערכה מעצבת, מידע כזה יכול לשמש בסיס לשיח מתמטי עם תלמידים, לתכנון משימות המשך ולמתן משוב ממוקד יותר. במקום להסתפק באמירה "נכון" או "לא נכון", המורים יכולים לשאול: מה הדפוס שהתלמיד יצר? מה הוא מלמד על הבנתו? ואיזו התערבות יכולה לקדם אותו? במובן זה, הייצוג מציע למורה מסלול עבודה מעשי: זיהוי דפוס, ניסוח השערה דיאגנוסטית, בחירת שאלה מתאימה ותכנון התערבות כיתתית או משימת המשך. התרומה אינה רק בכך שהמורה רואה את התשובות באופן חזותי, אלא בכך שהראייה החזותית מסייעת לו לבחור את הצעד הפדגוגי הבא.

עם זאת, חשוב להיות זהירים וישרים בנוגע לאתגר שהייצוג מציב. הייצוג הקרטזי אינו ייצוג מוכר ושגרתי עבור רוב המורים, ובוודאי שאינו מובן מאליו בקריאה ראשונה. כמו כל ייצוג מתמטי חדש, גם כאן נדרש זמן כדי ללמוד כיצד לקרוא את המישור, כיצד לזהות דפוסים, וכיצד להבחין בין פרשנות מבוססת לבין השערה ראשונית. במובן זה, הייצוג אינו "קורא מחשבות" ואינו מאפשר לדעת בוודאות מה תלמיד חשב. לעיתים דפוסים שונים עשויים להיראות דומים על המסך, ולעיתים יש צורך בהסבר מילולי של התלמיד, או בשיח כיתתי כדי להבין את דרך הפעולה במלואה. לפיכך, הייצוג אינו מחליף את שיקול הדעת של המורה, אלא משמש כלי המסייע לנסח השערות דיאגנוסטיות המבוססות על דפוסי העבודה שנצפו, ולבדוק כיצד לעצב את ההוראה.

למרות האתגר, הערך של הייצוג טמון בכך שלאחר שמתרגלים לקרוא אותו, הוא יכול לחשוף מידע שקשה לראות בדרכים אחרות. הוא אינו מחליף ייצוגים מוכרים וחשובים של שברים, כמו ישר המספרים, מודלים של חלק־שלם או ייצוגים עשרוניים, אלא מוסיף נקודת מבט אבחונית נוספת. התרומה הייחודית שלו היא ביכולת להפוך מרחב של תשובות תלמידים למפה חזותית של אסטרטגיות, קשיים והזדמנויות להוראה.

לייצוג כזה עשויה להיות תרומה לא רק ברמת המורה הבודד בכיתה, אלא גם ברמה מערכתית רחבה יותר. במבחנים מערכתיים או בהערכות רחבות היקף, כמו מבחני מיצ"ב (תנופה) בישראל, או הערכות מחוזיות בארצות אחרות, בדרך כלל נאסף מידע על שיעורי הצלחה וכישלון. אולם מידע כזה אינו תמיד מסביר מה עומד מאחורי הקושי. ניתוח של דפוסי תשובות באמצעות ייצוג קרטזי יכול לספק למורים, לרכזי מקצוע, למדריכים ולמקבלי החלטות תמונה עשירה יותר: לא רק כמה תלמידים טעו, אלא אילו סוגי פעולה או אסטרטגיות הופיעו בקרב תלמידים וקבוצות שונות.

במובן זה, הייצוג הקרטזי ממשיך את הרעיון של שימוש בייצוגים מתמטיים מופשטים ככלים לחשיפת מבנים וקשרים. כאן ניתן לחזור לרעיונותיה של פרלה נשר, שראתה בייצוגים לא רק אמצעי להצגת תשובות, אלא דרך לאפשר לתלמידים ולמורים לראות יחסים מתמטיים. בדומה למערכת הבדידים, שבה ייצוג מוחשי מסייע לחשוף יחסים בין כמויות, הייצוג הקרטזי מציע דרך להפוך את מרחב התשובות של תלמידים לאובייקט שניתן להתבונן בו, לדון בו וללמוד ממנו. אפשרות זו אינה מוגבלת רק למשימות של מציאת שברים בין שני שברים. גם בנושאים נוספים הקשורים בשברים פשוטים, הייצוג הקרטזי עשוי לסייע בהמחשת קשרים מתמטיים ובחשיפת טעויות שכיחות. למשל, בהוראת חיבור וחיסור שברים ניתן להשתמש בייצוג כדי להראות מדוע חיבור המונים וחיבור המכנים, כגון הטעות הנפוצה של כתיבת $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, אינו מייצג את פעולת החיבור, אלא יוצר שבר הנמצא בין שני השברים



הנתונים. באופן דומה, בהוראת כפל שברים ופעולות הפוכות, ניתן להראות כי מעבר משבר לשבר ההופכי שלו מתאים להחלפת המונה והמכנה, ולכן מיוצג במישור כהשתקפות של הנקודה ביחס לקו הסימטריה y=x.

תרומתו של הייצוג במאמר זה היא בכך, שהוא מאפשר למורה לראות מעבר לתשובה, ולזהות בתוך אוסף התשובות סימנים לפעולה מתמטית, לקושי מושגי ולהזדמנות להוראה. במובן זה, המאמר ממשיך את דרכה של נשר לא באמצעות חזרה על הייצוג הקרטזי כפי שהופיע בעבודתה, אלא באמצעות הרחבת תפקידו: מן הייצוג ככלי להבניית מושגים מתמטיים אצל תלמידים, אל הייצוג ככלי פרשני ודיאגנוסטי בעבודת המורה.

אחת האפשרויות העולות מממצאי מחקר זה היא שילובו של הייצוג הקרטזי במערכות הערכה ממוחשבות, כדוגמת STEP. בעוד שהמאמר הנוכחי התמקד ביכולתו של הייצוג לשמש כלי דיאגנוסטי למורה, שילובו במערכת הערכה ממוחשבת עשוי להרחיב את השימוש בו. בסביבה כזו כל תלמיד יכול לקבל משוב מיידי על תשובותיו, ובה בעת יכולה המערכת להציג למורה תמונה מצטברת ומתעדכנת של אסטרטגיות ודרכי העבודה של כלל תלמידי הכיתה. תמונה זו עשויה לאפשר למורה לזהות בזמן אמת דפוסים חוזרים, קשיים משותפים או דרכי פעולה בלתי צפויות, ולהתאים בהתאם את השיח הכיתתי, את משימות ההמשך ואת ההתערבות הפדגוגית. בכך ניתן להרחיב את השימוש בייצוג הקרטזי מתהליך של ניתוח בדיעבד לכלי התומך בהערכה מעצבת במהלך ההוראה עצמה.

ביבליוגרפיה

- הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך. *מבחנים וסקרים*. ראמ"ה. https://rama.gov.il/assessments
- משרד החינוך (2025). *תוכנית הלימודים במתמטיקה ליסודי*. פורטל עובדי הוראה - המרחב הפדגוגי. https://pop.education.gov.il/tchumey_daat/matmatika/yesodi/oraat-math/tohnit-limudim
- המרכז לטכנולוגיה חינוכית (2018). *שבילים פלוס לכיתה ה': מארז חוברות*. המרכז לטכנולוגיה חינוכית.
- Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (2001). Where do Fractions Encounter their Equivalents? Can this Encounter Take Place in Elementary-School?. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(2), 167–214. https://doi.org/10.1023/A:1017998922475
- Leung, A., & Lee, A. M. S. (2013). Students' geometrical perception on a task-based dynamic geometry platform. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 361–377. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9433-7
- Nesher, P. (1989). Microworlds in mathematical education: A pedagogical realism. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 187–215). Lawrence Erlbaum Associates.
- Olsher, S., Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2016). *How Might the Use of Technology in Formative Assessment Support Changes in Mathematics Teaching?* For the Learning of Mathematics, *36*(3), 11–18.
- Schwartz, J. L. (2018, December 1). *A physicist's lament*. AMS Blogs: On Teaching and Learning Mathematics.
- Schwartz, J. L. (1996). *Semantic aspects of quantity* [Unfinished draft]. https://www.researchgate.net/publication/242313499_Semantic_Aspects_of_Quantity
- Yerushalmy, M. & Olsher, S. (2020). Online assessment of students' reasoning when solving example-eliciting tasks: Using conjunction and disjunction to increase the power of examples. *ZDM - Mathematics Education, 52*, 1033–1049. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01134-0
- Yerushalmy, M., Olsher, S., Harel, R., & Chazan, D. (2023). Supporting inquiry learning: An intellectual mirror that describes what it "sees." *Digital Experiences in Mathematics Education, 9*, 315–342.



״אין לך מועיל יותר מן
הדיבור, שמתוך כך
אתה מכיר את האמת״

ש״י עגנון, מתוך ״סיפור פשוט״

תרבות הכיתה הישראלית הלומדת מתמטיקה בחינוך העל־יסודי
מאפייני השיח הכיתתי ויחסי כוח בצל בחינות הבגרות

פרופ׳ אילנה לבנברג
נשיאת האקדמית גורדון



תרבות הכיתה הישראלית הלומדת מתמטיקה בחינוך העל־יסודי[1]
מאפייני השיח הכיתתי ויחסי כוח בצל בחינות הבגרות

אילנה לבנברג

תקציר

מטרת המחקר הייתה לאפיין את המורה הישראלי למתמטיקה בחינוך העל־יסודי כפי שהוא משתקף בשיח הכיתתי בזמן אמת. נקודת המוצא של המחקר מניחה כי מעבר לתכנים המתמטיים הגלויים והפורמליים הנלמדים בשיעור, דברי המורה, אופן פעולתו ודפוסי התקשורת שלו נושאים בחובם מרכיבים עמוקים המשקפים את תפיסתו, זהותו המקצועית והתרבות הבית־ספרית והחברתית שבה הוא פועל. המחקר בחן את זהותו המקצועית של המורה למתמטיקה דרך שלושה היבטים שלובים: ההיבט האינטראקציוני, ההיבט המתמטי וההיבט התרבותי באמצעות מתודולוגיה משולבת - כמותית ואיכותנית־אתנוגרפית. כאן יוצג החלק שעוסק בתרבות כיתה, והוא מתבסס על ניתוח מעמיק של 12 שיעורי מתמטיקה מצולמים בחינוך העל־יסודי, וכן ראיונות עומק עם המורים. ממצאי המחקר מצביעים בפן התרבותי, שהמורה הישראלי מתגלה כמי שנע בין שני קטבים ייחודיים: הרצון לשמור על סמכות, שליטה ופרגמטיות מכוונת בחינות בגרות, לבין הצורך ליצור גיבוש חברתי, אחווה וטשטוש המדרג ההיררכי באמצעות דפוסי שיח 'דוגריים' ושימוש בסלנג.

רקע תאורטי

המונח "שיח כיתתי" (Classroom Discourse) מקיף את כלל מערך התקשורת של המורה עם כיתתו, ובכלל זה מונולוגים, דיאלוגים, שימוש בשפה מתמטית פורמלית לצד שפת יומיום, וכל מגוון פעילויות התקשורת (Communicational Acts) המתרחשות לאורך השיעור. גישה זו מבוססת על ההנחה הקונסטרוקטיביסטית והסוציו־תרבותית, שלפיה למידה היא תהליך חברתי מובהק שאינו מנותק מהקשרו. כפי שמציינים הלידי וחסן (Halliday & Hasan, 1989), הידע מועבר בהקשרים חברתיים, והמילים מחליפות משמעויות מתוך הפעילויות שבהן הן מעוגנות.

בחינוך המתמטי, חוקרים מובילים (כגון Lemke, 1990; Lampert, 1990; Ball, 1991; Yackel & Cobb, 1996) רואים בשיח אמצעי קריטי לקידום לימודי המתמטיקה. שיח כיתתי תקין ומפרה מאפשר "משא ומתן" (Negotiation) על משמעויות מתמטיות, מחזק את היכולת לטעון טענות, להסיק מסקנות, לבצע רדוקציה דדוקטיבית וליצור ידע משותף לכלל הלומדים.

רעיונות אלה עמדו בבסיס הרפורמות הגדולות שהובילה המועצה הלאומית של מורי המתמטיקה בארה"ב (NCTM) בסטנדרטים שפורסמו בשנים 1989 ו־2000, אשר הדגישו את חשיבות הדיון המתמטי הפתוח בכיתה והסטת מרכז הכובד מהמורה לתלמיד. המחקר בחן באיזו מידה חלחלה רוח רפורמה זו אל בין כותלי כיתת המתמטיקה הישראלית, וכיצד מאפייני התרבות המקומית מעצבים את השיח הלכה למעשה.

כדי לנתח את הפן התרבותי של הכיתה אימץ מחקר זה פרספקטיבה אתנוגרפית, הרואה בכיתה קבוצה חברתית בעלת תרבות ייחודית, המנהלת אינטראקציות חברתיות מורכבות. מסגרות תיאוריות שונות היוו את הבסיס למחקר.

א. מודל אירועי הדיבור של היימס (Hymes, 1972)

היימס טבע את המושג "כשירות תקשורתית" (Communicative Competence) - היכולת לתקשר ביעילות בתוך מבנה תרבותי נתון. המודל שלו מפרק את התקשורת לשלוש רמות ישימות אשר הותאמו במחקר הנוכחי לסביבת הכיתה:

1. מאמר זה מתבסס על אחד מפרקי עבודת הדוקטורט שנכתבה בשנת 2009 בשם: *"מאפיינים מקצועיים של המורה למתמטיקה בחינוך העל יסודי המשתקפים בשיח הכיתתי"* בהנחיית פרופ' פרלה נשר ז"ל.



- **סיטואציית דיבור (Speech Situation):** המאורע החברתי הכולל (למשל, שיעור המתמטיקה או פעילות חקר מוגדרת).
- **אירוע דיבור (Speech Event):** שיחה מוגדרת בתוך הסיטואציה המאפשרת לזהות נורמות חברתיות ולשוניות (למשל, דיון כיתתי על תכונות גאומטריות של קטע אמצעים).
- **פעולת דיבור (Speech Act):** היחידה המינימלית של השיח (למשל, הגדרה מתמטית ספציפית שהמורה מכתיב לתלמידיו).

ב. שלושת מרכיבי השיח של הלידי וחסן (Halliday & Hasan, 1989)

- **שדה השיח (Field of Discourse):** טבעה של הפעילות החברתית המתרחשת (למשל, תלמיד הפותר תרגיל על הלוח).
- **משתתפי השיח (Tenor of Discourse):** מי הם השותפים, תפקידיהם ויחסי הגומלין והמדרג ביניהם (למשל, היחס הא־סימטרי המובהק בין המורה המפקח לתלמיד המציג).
- **אופן השיח (Mode of Discourse):** תפקיד השפה והסגנון המצופה ממנה באינטראקציה.

ג. תיאוריית הנימוס והתדמית הציבורית של בראון ולוינסון (Brown & Levinson, 1987) והתאמתה לכיתה על ידי קזדן (Cazden, 1988)

במרכז תיאוריה זו עומד המושג של "שמירה על הפנים" (To save face), המייצג את התדמית הציבורית והדימוי העצמי שכל משתתף מעוניין לתקף במהלך אינטראקציה. כאשר דובר חש שאינו מצליח לשמור על תדמיתו, הוא חווה איום ומסתכן ב"איבוד פניו" (To lose face).

בסביבת הכיתה, כפי שמסכמת קזדן (Cazden, 1988), מורים נמצאים רוב הזמן בניהול פעולות המאיימות על תדמית התלמיד (Face Threatening Acts - FTA). המורים מגבילים את חופש התלמידים, מעבירים ביקורת פומבית על הישגיהם או התנהגותם, ובו־זמנית נדרשים לרכך (או "להמתיק") איום זה באמצעות אסטרטגיות נימוס שונות. רמת האיום (או חומרת ה־FTA) נקבעת על פי שלושה משתנים חברתיים קריטיים:

- **D (Social Distance):** הפער החברתי ומידת ההיכרות האישית בין הדוברים.
- **P (Relative Power):** יחסי הכוחות המובנים והמדרג ההיררכי ביניהם.
- **R (Ranking of Imposition):** מידת הכפייה או האכיפה שמפעיל המורה ברגע נתון.

כדי להתמודד עם משתנים אלה, השיח נע בין אמירות ישירות (Direct Mode), שבהן הפעולה נאמרת בגלוי ובציווי ויוצרת איום גבוה, לבין אמירות עקיפות (Indirect Mode), המשתמשות ברמזים, הצעות מוסכמות או החצנה רגשית להפחתת המתח.

עם זאת, כפי שביססה בלום-קולקה (Blum-Kulka, 1987) במחקריה המשווים, הזיקה בין עקיפות לנימוס משתנה מתרבות לתרבות. בתרבות הישראלית דווקא הישירות, הכנות ואמירת האמת ("דוגריות") זוכות להערכה חברתית גבוהה, וישראלים רבים מפרשים אמירות ישירות כביטוי לסולידריות, ולאו דווקא כאיום פוגעני.

לאור האמור לעיל, נציג כאן את מאפייני התרבות, כלומר, כיצד באים לידי ביטוי מאפיינים תרבותיים ייחודיים לחברה הישראלית בשיח הכיתתי, כמו שליטה בשיח בהתייחס לתכנים הנאמרים, ישירות/'דוגריות', גיבוש ואחווה, ופרגמטיות נוכח הצורך להכין את התלמידים לבחינות בכלל ולבחינות הבגרות בפרט.

הא־סימטריה בשיח הכיתתי

הניתוח הכמותי של תורות הדיבור (Turns) וזמני הדיבור חשף דפוס מובהק של אי־שוויון תקשורתי. השיח בכיתות שנחקרו התגלה כחד־צדדי באופן קיצוני: המורה הוא הדובר הדומיננטי והכמעט בלעדי. למעלה מ־50% מתורות הדיבור בכל שיעור נלקחו על ידי המורים.

כאשר בוחנים את משך זמן השיח הכולל, הממצאים חריפים עוד יותר: בתשעה מתוך שנים־עשר השיעורים, המורים דיברו ביותר ממחצית מזמן השיעור נטו (ובשלושת הנותרים - למעלה מ־40% מהזמן). לנושא הנלמד (גיאומטריה לעומת אלגברה) לא הייתה כל השפעה על חלוקת זמנים זו.



כדי לקבל מדד מדויק יותר לא-סימטריה, נבדק היחס בין מספר המבעים (Utterances) של המורה לזה של כלל התלמידים ביחד. במרבית הכיתות, מספר מבעי המורה היה **גדול פי שלושה** ממספר מבעי התלמידים. המורה לוקח לעצמו מספר מבעים רב ברצף בתוך תור דיבור יחיד, מה שמצביע על כך שמתן רשות דיבור פורמלית לתלמיד אינו יוצר חלוקה שוויונית של השיח.

האינטראקציה הכיתתית מורכבת בעיקר ממונולוגים ארוכים של המורה, השזורים בדיאלוגים קצרים, מקוטעים ומתוזמרים היטב הנשלטים באמצעות פנייה שמית או אנונימית. לא נצפו כלל אינטראקציות, דיונים או החלפת דעות בין התלמידים לבין עצמם (Student-to-Student interaction). שטף הדיבור מאופיין במעין "מרוץ" קצבי של שאלות מורה קצרות ותשובות תלמיד בנות מילה או שתיים - דפוס המשרת את המורה לצורך אי־איבוד שליטה וחיסכון בזמן, אך מונע כל אפשרות לדיון מתמטי אותנטי.

מאפייני התוכן: הקניית ידע פרוצדורלי אל מול חסך בהנמקה דדוקטיבית

בבחינת מרכיבי התוכן של השיח נמצא, כי בכל הכיתות ללא יוצא מן הכלל, המרכיב השולט באופן מוחלט הוא **הפנייה להסבר וידע**. המורים ממוקדים בהעברת הפרוצדורה, הגדרת האלגוריתם והקניית התוכן הגלוי. לעומת זאת, המרכיב המייצג שיח מתמטי ברמה קוגניטיבית גבוהה - פנייה להנמקה, הצדקה, העמקה וביסוס המבנה הדדוקטיבי של הדיסציפלינה (שהם אבני היסוד בהמלצות הסטנדרטים הבין־לאומיים) - נמצא נמוך ודל באופן משמעותי. כמעט שלא נרשם שימוש פעיל במשפטים ובהגדרות לצורך הוכחה פתוחה, ולא הוצגו שאלות הדורשות מהתלמיד לבצע סינתזה, או להצדיק את צעדיו באופן עצמאי.

המורים ניהלו שליטה מלאה ברמת הדיון באמצעות השאלות שהפנו לחלל הכיתה. רוב השאלות שנשאלו בזירה הציבורית היו שאלות ידע פשוטות ("שאלות מבחן" שנועדו לחלץ תשובה נכונה קבועה מראש). שאלות מסוג "הצדקה" ו"תרומה", האמורות לאתגר את החשיבה ולדחוף את השיח לרמה גבוהה, היוו כשליש בלבד מכלל שאלות המורה.

יוצא מן הכלל חלקי בהקשר זה היה שיעורי הגיאומטריה. בשל אופיו המובנה של המקצוע, המבוסס על הוכחות משפטים מול נתונים, המורים הציגו בשיעורים אלה מספר גבוה יותר של שאלות הדורשות הנמקה מתמטית ברמה גבוהה, אך גם הן נשארו תחת פיקוח הדוק ומנחה של המורה.

היבט מעניין נוסף הוא המרכיב של הוראות נוהג ונוהל (משמעת וסדר). למרות מספרם הגדול של התלמידים בכיתות התיכון, מרכיב זה היה קטן יחסית בשיח. לא נשמעו כמעט הערות בולטות או חריפות לסדר, דבר המעיד על כך שהתלמידים ממושמעים ומקבלים מראש את חוקי המשחק של השיעור.

מבנה הדיאלוגים עקב באדיקות אחר תבנית ה־IRE המסורתית (Initiation-Response-Evaluation: יוזמת מורה, תגובת תלמיד, הערכת מורה). המשוב שהמורה נתן לתלמידיו היה ברובו משוב עקיף, שהתבסס על טכניקת ה-**Revoicing** (חזרה מדויקת או מנוסחת מחדש של המורה על דברי התלמיד המשיב) כדי לתקף את התשובה הנכונה בפני כלל הכיתה.

המורה הישראלי בין שני קטבים תרבותיים

המורה למתמטיקה הישראלי, אשר התגלה במחקר זה, נע בין שני "קטבים" תרבותיים, בין קוטב הסמכות והפרגמטיות, מה שמוכתב לו על ידי אילוצי החוץ, לבין קוטב האחווה והגיבוש. להלן פירוט כפי שנמצא בשיח:

קוטב א': הסמכות והפרגמטיות	קוטב ב': האחווה והגיבוש
• שליטה מלאה בלו"ז ובתוכן	• טשטוש והשעיית המדרג החברתי
• הכנה אינטנסיבית לבגרות	• שימוש בסלנג ובסגנון מחוספס
• שימוש באמירות ישירות	• דימוי המורה כ"בן אנוש" חביב
• הכתבת פרוצדורות ותפריטים	• הצהרה על רצון בחופש ביטוי



קוטב א':
סמכות, שליטה ופרגמטיות מכוונת־בגרות

המורה הישראלי חווה לחץ מוסדי ומערכתי עצום, שכן מידת יעילותו והערכתו המקצועית נמדדות בראש ובראשונה על פי אחוזי ההצלחה והציונים של תלמידיו בבחינות הבגרות. זהותו המקצועית נוצקה, פשוטו כמשמעו, "בצל בחינת הבגרות". עובדה זו מולידה סגנון הוראה פרגמטי, תכליתי ומעשי ביותר ("תכלס"). השיעור מנוהל בקצב מהיר, ללא הפסקות, מתוך חרדה קבועה של "להספיק את החומר".

כדי לעמוד באילוצים אלה, המורים מאמצים אסטרטגיות של אמירות ישירות (Direct Mode) השומרות על כוחם ומעמדם המקצועי כבעלי הסמכות והידע הבלעדיים (Blum-Kulka, 1987). כפי שמציין למקה (Lemke, 1990), גם הדיסציפלינה המתמטית עצמה נתפסת כמערכת נוקשה הדורשת בהירות וחד־משמעיות, ולכן מורים נוטים להשתמש באמירות ישירות שאין לתלמיד זכות לערער עליהן.

בשיח הדבר מתבטא במבעי 'תפריט' (אלגוריתמים קבועים מראש המכוונים למבחן). דוגמה מובהקת לכך היא דבריו של המורה בנימין לכיתתו: "*כשאתם רואים את המילה חוצה זווית, משוטטת לה להנאתה בנתונים, מייד תחשבו על המשפט הזה, כי אז קרוב לוודאי שצריך להפעיל אותו*". או אמירתה הקצרנית והתכליתית של כלנית: "*האי־זוגיים - בכיתה. זוגיים - בבית. תרגיל ראשון, אני מעתיקה ללוח*".

בניתוח לפי מודל ה־FTA, Face Threatening Acts - (איום על "הפנים"). המורים מפעילים כוח וכפייה ומבצעים איומים פומביים תדירים על תדמית התלמידים (למשל, נזיפה פומבית בתלמיד מתפרץ או חסר ריכוז).

קוטב ב':
גיבוש, אחווה והשעיית המדרג החברתי

מנגד, המורה הישראלי פועל בתוך חברה שבה האתוס המרכזי מקדש סולידריות, גיבוש חברתי, מניעת פורמליזם מוגזם ואנטי־היררכיה. כדי לזכות באהדת התלמידים ולהיחשב "חלק מהחבר'ה", המורה משתמש באסטרטגיות שיח ייחודיות המשעות את המדרג החברתי:

1. **אימוץ סגנון דיבור חברתי וסלנג:** המורה משתמש בסגנון הדיבור ה"מחוספס" של התלמידים, פניות בלשון חיבה ("חבר'ה", "ילדים", "חמודה") ומשפטים המציגים אותו כ"בן אנוש" פגיע המזדהה עם סבלם מול המתמטיקה הנוקשה. מורים משתמשים באמירות מרככות ומצטדקות כגון: "*אני לא רוצה לעצבן אתכם אבל...*" או "*אני מפחד לשאול, אבל אני אשאל...*" , ואף מנסים להקטין את הפער החברתי (Social Distance) על ידי שיתוף בחולשותיהם, כפי שעושה חבצלת: "*אני לא כל כך טובה ברדיאנים, אז אני פותרת במעלות...*".
2. **שימוש מניפולטיבי בגוף ראשון רבים ("אנחנו"):** מורים רבים מרבים להשתמש במילה 'אנחנו' במקום 'אני' ("*היום אני רוצה שאנחנו נצליח למצוא...*"). המילה 'אנחנו' נועדה לטשטש גבולות ולשדר אחדות ושותפות בידע. עם זאת, בהתאמה לתיאוריה של ורדי-ראט (2002), מדובר במקרים רבים ב"פסוודו-סולידריות" (סולידריות לכאורה). זוהי מעין מסכה לשונית, שכן המורה משתמש ב'אנחנו' בזמן שהוא פותר את התרגיל לבדו על הלוח ומכתיב את הכללים, ללא שיתוף אמיתי של התלמידים בקבלת ההחלטות.

הפער בין הרצוי למצוי

התנועה בין שני הקטבים הללו יוצרת דיסוננס עמוק בזהות המקצועית של המורה. בראיונות העומק, המורים הפגינו מודעות גבוהה לרוח הרפורמות והצהירו על השקפות עולם פדגוגיות מתקדמות - הם הביעו רצון לאפשר לתלמידים להתבטא חופשי, להעלות השערות ולנהל שיעורים גמישים.

אולם בפועל, כפי שהוכח בצילומי הווידאו, דפוסי השיח הכיתתי ורמת התוכן המתמטי היוו תמונת ראי של המטרה המעשית, הצלחה בבחינת הבגרות. האילוץ הפרגמטי ניצח את כל היתר.

לסיכום

חקר השיח בזמן אמת חשף פער בין המוצהר למבוצע בפועל. בעוד שמורי המתמטיקה מצהירים בראיונות על



אימוץ תפיסות פדגוגיות חדשניות, המעמידות את הלומד במרכז ומעודדות שיח חקר פתוח, הרי שהתנהגותם הלשונית בפועל משקפת תרבות כיתה שמרנית, הישגית, סמכותית ופרוצדורלית. תרבות זו מעוצבת על ידי בחינת הבגרות מחד, ועל ידי קודים תרבותיים-חברתיים של החברה הישראלית מאידך. תרבות הכיתה הישראלית הלומדת מתמטיקה, כפי שהיא משתקפת במחקר, איננה מרחב של דיאלוג דמוקרטי או משא ומתן שוויוני על משמעויות, אלא זירה א-סימטרית מובהקת שבה המורה אוחז בשליטה כמעט בלעדית על המרחב התקשורתי. ממצא זה מתקף את קביעותיה של קזדן (Cazden, 1988) בדבר האופי המובנה של השיח הכיתתי המסורתי, אך מקבל משנה תוקף והקצנה בהקשר של הוראת המתמטיקה בארץ. המורה לא רק מדבר מרבית הזמן אלא הוא משתמש במבנה התקשורתי כדי לבצר את מעמדו כסמכות עליונה.

יישומה של תיאוריית הנימוס והתדמית הציבורית של בראון ולוינסון (Brown & Levinson, 1987) חושף כי שיעור המתמטיקה רווי בפעולות המאיימות על תדמיתו הציבורית של התלמיד (Face Threatening Acts - FTA). מאחר שהמורה מנהל שיעור בקצב מהיר ותובעני, רמת הכפייה והאכיפה שלו (המשתנה R במודל) היא גבוהה ביותר. המורה מציב את התלמיד בעמדה פגיעה שבה כל תשובה שאינה מתאימה לאלגוריתם המצופה עלולה להוביל לאובדן פנים (To lose face) מול קבוצת השווים (הכיתה).

האיום על הפנים בכיתה הישראלית מתבצע ברובו באופן ישיר (Direct Mode), ללא הריכוך הלשוני המעודן המאפיין תרבויות מערביות אחרות. המורים משתמשים בציווים חדים, קוטעים תלמידים באמצע דבריהם, או פוסלים תשובות באופן נחרץ במטרה שלא "לבזבז זמן שיעור יקר". עם זאת, בשל התרבות התקשורתית הישראלית שנותחה על ידי כתריאל (Katriel, 1986), ישירות זו אינה נתפסת בהכרח על ידי התלמידים כהשפלה אישית או כחוסר נימוס קיצוני, אלא כחלק מ"חוקי המשחק" העניינים של הכיתה. התלמידים מקבלים את יחסי הכוחות הללו כגזירת גורל הכרחית לצורך הישרדות במערכת המכוונת למבחן, ולכן רמת הפרעות המשמעת והצורך בהוראות נוהל ישירות היו נמוכים באופן יחסי. התלמידים "ממושמעים לשיח" מכיוון שהם מפנימים שהמורה הוא המפתח שלהם להצלחה בבגרות.

האלמנט התרבותי המרתק ביותר שעולה מן המחקר הוא הדרך שבה המורה הישראלי מנסה "להמתיק" את האיום על הפנים ולטשטש את המדרג ההיררכי הנוקשה באמצעות שימוש בקודים לשוניים תרבותיים מקומיים. החברה הישראלית מתאפיינת באתוס של אנטי-פורמליזם, עממיות, וחתירה לגיבוש ואחווה (כתריאל, 1999). המורים למתמטיקה מאמצים סגנון דיבור "דוגרי", ישיר ומחוספס, המקטין באופן מודע ומלאכותי את המרחק החברתי (Social Distance - D) בינם לבין התלמידים. תופעה זו באה לידי ביטוי בשלושה אפיקים מרכזיים בשיח:

א. **אימוץ שפת הסלנג של הלומדים:** המורים משלבים בתוך ההסברים המתמטיים הפורמליים ביטויים מסלנג היומיום (כגון: משפט "משוטט לו להנאתו", פונקציה "משוגעת", "אל תעצבנו אותי", "מתמטיקה נוקשת"). השימוש בסלנג מפקיע את המתמטיקה מהאולימפוס האקדמי המנוכר ומוריד אותה לגובה העיניים של הרחוב הישראלי.

ב. **מבעי החצנה רגשית והפגנת חולשה של המורה**, החושפים בפני התלמידים את המגבלות והפחדים שלהם עצמם (למשל: "אני לא טובה ברדיאנים", "אני מפחדת לשאול אתכם"). אסטרטגיה זו נועדה להציג את המורה כ"בן אנוש" חם ונגיש, שותף לצרה, ולא כסוכן מנוכר של הממסד.

ג. **המניפולציה של גוף ראשון רבים ("אנחנו") בשיח המורה:** מורים נוהגים להשתמש בלשון רבים ("אנחנו") במהלך ההוראה, במקום להשתמש בגוף ראשון יחיד ("אני"). שימוש זה מיועד ליצור תחושה של אחווה, עבודת צוות, שותפות בידע וטשטוש הפערים המעמדיים בכיתה. בהתבסס על תיאוריית ה"פסוודו-סולידריות" (סולידריות מדומה) של ורדי-ראט (2002), מדובר למעשה במנגנון לשוני הממסך את המציאות. בעוד שהשפה משדרת פתיחות ושיתוף, בפועל המורה הוא זה שמנהל באופן בלעדי את ההוראה, מכתיב את הכללים ואומר את ההחלטות. כך נוצרת אשליה בלבד של מעורבות



מלאה מצד התלמידים, מבלי שניתן להם חופש או שותפות אמיתית מלאה בקבלת החלטות מתמטיות.

תרבות כיתה זו יוצרת דפוס תקשורת דואלי: מצד אחד, אווירה חמימה, קרובה, נטולת דיסטנס פורמלי קשיח ומלאה בפניות חיבה ("חבר'ה", "חמודה"); ומצד שני, מבנה פעילות נוקשה, סמכותי וקצר רוח, שבו התלמיד נותר פסיבי ומובל.

כל עוד מערכת החינוך תמשיך למדוד את המורה והכיתה דרך ציוני הבגרות, השיח הכיתתי יוסיף להיות תמונת ראי של לחץ זה. שינוי אמיתי בהישגי התלמידים ובאיכות החשיבה המתמטית שלהם מצריך לא רק החלפת תוכניות לימודים, אלא שינוי עומק בתרבות השיח ובמבנה הכוח המנהל את הכיתה הישראלית.

פרופ' פרלה נשר ז"ל ראתה בחקר תרבות הכיתה הישראלית הלומדת מתמטיקה את אחד הנושאים המרכזיים המשפיעים הן על ההוראה והן על הלמידה. מתוך נושאי המחקר שלה עם פרופ' תמר כתריאל, נבחנו גם במחקר זה מושגים כמו "גיבוש" או "דוגרי" כחלק ממאפייני השיח בתרבות הכיתה הישראלית.

מסירות והתמדה להוביל כל לומד להצלחה היו נר לרגליה של פרלה, ולכן, חשיבות חקר השיח כחלק בלתי נפרד מתרבות כיתה הייתה בעיניה הדרך להשגת מטרה זו.

פרלה היתה המנחה שלי בעבודת הדוקטורט, ואחת הנשים המשמעותיות ביותר בחיי. ידיעותיה ובעיקר היותה מנטור מהמעולים שהכרתי בכל שנות לימודיי. עד היום דרכי ההנחיה שלה הן סמל ומופת כיצד צריך מרצה להוביל את המונחים שלו.

פרלה ז"ל נבחרה להיות עמיתת כבוד הראשונה של המכללה האקדמית לחינוך "גורדון" בחיפה, כמובן בזכות תרומתה האדירה לחינוך המתמטי בישראל, והיה לי הכבוד להעניק לה את תעודת ההוקרה בטקס שהתקיים בשנת 2013.

רשימת מקורות

- כתריאל, ת' (1999). *מילות מפתח: דפוסי תרבות ותקשורת בישראל*. חיפה: הוצאת אוניברסיטת חיפה.
- ורדי-ראט, א' (2002). *השיח בהבניית המציאות החברתית בכיתות הלימוד, מאפייני שליטה ונימוס בשיח המורה*. חיבור לשם קבלת תואר "דוקטור לפילוסופיה" האוניברסיטה העברית, ירושלים.
- Ball, D. L. (1991). What's each person's truth? Arguments and mathematics in a third-grade classroom. In C. Maher & R. Davis (Eds.), *Mathematical Languages*, pp. 141-148.
- Blum-Kulka, S. (1987). Indirectness and politeness in requests: Same or different? *Journal of Pragmatics*, *11*(2), 131-146.
- Brown, P., & Levinson, S. C. (1987). *Politeness: Some universals in language usage*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Cazden, C. B. (1988). *Classroom discourse: The language of teaching and learning*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Halliday, M. A. K., & Hasan, R. (1989). *Language, context, and text: Aspects of language in a social-semiotic perspective*. Oxford: Oxford University Press.
- Hymes, D. (1972). On communicative competence. In J. B. Pride & J. Holmes (Eds.), *Sociolinguistics* (pp. 269-293). Baltimore: Penguin Books.
- Katriel, T. (1986). *Talking Straight: Dugri Speech in Israeli Sabra Culture*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, *27*(1), 29-63.
- Lemke, J.L. (1990). *Talking science: Language,*



learning, and values. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.



נשמח לשמוע את דעתכם

כניסה לטופס משוב מקוון

