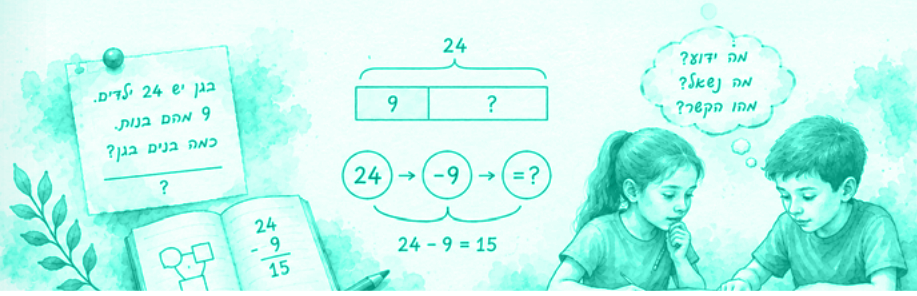


בעיות מילוליות בביה"ס היסודי

פרופ' שרה הרשקוביץ

המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח) 1981-2020
ולאורך כל השנים הוראה במסלולים להוראת
מתמטיקה במכללות להכשרת מורים



בעיות מילוליות בביה"ס היסודי

שרה הרשקוביץ

זכיתי להיות תלמידתה של פרופ' פרלה נשר!!!
זכיתי לעבוד עם פרופ' פרלה נשר במשך 40 שנה!!!
אני מתחילה מאמר זה בשתי האמירות הנ"ל כי אני מוצאת בהן משמעות רבה מאוד לכל שנות עבודתי והתפתחותי כעוסקת בחינוך מתמטי. במאמר זה אציג את תפיסת העולם לפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה שלמדתי מפרלה והמשכתי לעסוק בתחום זה במשך כל השנים.

הגעתי למטח בשנת 1981 בעקבות מודעה בעיתון. חיפשו איש צוות נוסף לקבוצת המתמטיקה. היקף העבודה גדל, הצוות הקיים היה קטן מדי ומצאו צורך להרחיבו. כשראינו את המודעה, בעלי אמר - זה בדיוק מה שאת מתעניינת בו. שמחתי מאוד להתקבל לצוות ומכאן התחילה הרפתקה מרתקת למשך כארבעה עשורים.

במאמר זה אציין את תמצית התיאוריה וההיבטים המעשיים של פתרון בעיות מילוליות בביה"ס היסודי, כפי שלמדתי מפרלה, וכיוון שנושא זה היה קרוב לליבי המשכתי לעסוק בו בהרחבה גם בלימודיי כתלמידתה של פרלה, במחקרי ובתהליך כתיבת פרקי הלימוד המתאימים. בתוכנית הלימודים (שמתחדשת אחת לכ-10 שנים) כתוב שיש לפתור בעיות מילוליות לפי פעולות החשבון שהתלמידים כבר מכירים. הוזכרו היבטים של קשר למציאות עם דגש במבנה הלוגי, שמוביל להבחנה בין המרכיבים השונים של הבעיה. אולם לא נזכר מאומה לגבי ההיבטים המשפיעים על רמות הקושי של הבעיות השונות, לא מבחינת המבנה, לא מבחינת דרכי הניסוח, ולא מבחינת ההיבטים הקשורים לניתוח הבעיות ולגורמים המשפיעים על רמות הקושי. הייתה לי הרגשה שיש היבטים נוספים שמשפיעים על רמת הקושי שאיני מכירה, ויש בנדון מקום לבדיקה ומחקר יסודי.

כשהתחלתי לעסוק בנושא שמחתי שפרלה לצידי - ידעתי שהיא המומחית בתחום, היא עסקה בנושא זה שנים רבות, ועליו כתבה את עבודת הדוקטורט שלה באוניברסיטת הרווארד בהנחיית המומחים בתחום "מעבר משפה טבעית לשפה מתמטית" (מה זה עבור ילדים צעירים להבין את הפסוק '2+3=5') (Nesher, 1972). הדוקטורט זיכה אותה בפרס הצטיינות בבית הספר לחינוך של הרווארד, ואני זכיתי לעוגן משמעותי ומרכזי להמשך עבודתי בחינוך המתמטי. ידעתי שאני יכולה ללמוד מפרלה, להתפתח ולהמשיך להתפתח ולפתח. שאלתי את פרלה שאלות שונות הקשורות לנושא במהלך הפיתוח והיא ענתה: "את יודעת מה אנחנו עושים, קוראים את המחקרים מהעבר וחוקרים בעצמנו היבטים חדשים". זה היה האתגר!

במאמר זה אציג תמצית של ההיבטים הקשורים לבעיות מילוליות ודרכי הופעתם בחומרי הלמידה. היבטים אלה יש להביא בחשבון בתהליך הלמידה של התלמידים, ועל המורים להביא אותם בחשבון בתהליך ההוראה שלהם. היבטים אלו צריכים להופיע במפורש בספרי הלימוד בהצגת הנושא לתלמידים, במדריכים למורה ובהשתלמויות המורים.

המעוניינים בהרחבה ובדוגמאות מפורטות מוזמנים לעיין בספר "האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי[1]".

מהי בעיה מילולית במתמטיקה?

הבעיות המילוליות קושרות בין העולם המציאותי לעולם המתמטי, לפיכך מרחב הבעיות השונות רחב כשם שהסיטואציות הקיימות בעולם רבות. הבעיות המילוליות מתארות את העולם באופן מילולי, ואילו בעזרת המתמטיקה נרצה לחשוף מרכיבים שאינם נתונים בתיאור המילולי. מעצם צורת הצגת הבעיות בטקסט מילולי עלינו להתמודד עם הקשר שבין השפה הטבעית לשפה המתמטית הפורמלית. בעוד שבשפה הטבעית נוכל לתאר סיטואציה נתונה במגוון דרכים כעושר השפה,

1. הרשקוביץ, ש. (2014). "האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי" הוצאת מטח. את הספר אפשר למצוא גם בגרסה דיגיטלית במערכת כותר, הספרייה המקוונת של ישראל. https://kotar.cet.ac.il/KotarApp/Viewer.aspx?nBookID=100596887.



הרי שבמתמטיקה השפה פורמלית קצרה וחד־משמעית. חלק מהמורכבות של בעיות שונות נובעת מצורת ההצגה המילולית, ותפקידם של העוסקים בהוראת מתמטיקה לזהות מורכבות זאת ולזמן לתלמידים בזמן ובמקום המתאים להם (לפי התפתחותם הקוגניטיבית מחד־גיסא, ולפי הידע המתמטי והידע על אודות העולם מאידך־גיסא) את הדרך והכלים לפתרון הבעיות השונות. נתחיל מבעיות מילוליות פשוטות במתמטיקה כפי שהן מוצגות בפני תלמידים בראשית לימודי המתמטיקה שלהם בבית הספר. אלו בעיות הבנויות מטקסט המתאר אירוע (כאמור סטריאוטיפי) מהעולם ה"מציאותי", אולם האופן שבו מתואר האירוע מבוסס על הנחות יסוד מסוימות ומוסכמות.

נשר וכתריאל (Nesher & Katriel, 1977; Nesher, 1980) הגדירו הנחות סמויות אלה כך:

א. בעיה מילולית בחשבון היא יחידת טקסט העומדת בפני עצמה. היא מופיעה בהקשר של הוראת חשבון, מניחים שכל העצמים המוזכרים בה קיימים, ורק הם קיימים. אין עצמים נוספים מלבדם.

ב. בבעיות פשוטות וסטריאוטיפיות (בתחילת הדרך) אין חשיבות לאמיתות או אי־אמיתות של המצב המתואר בטקסט הבעיה בעולם הממשי. בעיה מילולית בחשבון יכולה להיות תקנית לחלוטין וניתן לפתור אותה, גם אם אין היא מציאותית, כל עוד מתוארים קשרים מתאימים בין העצמים המתוארים בטקסט. (בשלבים מתקדמים יותר יתנסו התלמידים במצבים שבהם עליהם לשקול אם תשובתם הגיונית ומתאימה למציאות).

ג. בעיה מילולית כוללת שאלה שיש עליה תשובה, ומנסח הבעיה יודע את התשובה. (נעיר: שגם התשובה "אי אפשר" - היא תשובה[2]).

ד. השאלה בבעיה מילולית היא כזו שהתשובה עליה יכולה להינתן לאחר שיקולים מתמטיים, בניית מודל מתמטי ופתרון בעזרת פעולות מתמטיות.

ה. הבנת הטקסט של הבעיה מצריכה הבנת מערכת היחסים שבין כל המשפטים המרכיבים את הבעיה.

2. לדוגמה: כמה בנים בקבוצה שבה 15 ילדים ומחציתם בנים?

זהות העצמים המופיעים בבעיה תלויה במערכת היחסים שבין הקבוצות שהעצמים שייכים אליהן.

ו. כל בעיה מילולית עוסקת בתכונות הכמותיות של העצמים. התכונות האחרות שלהם קובעות את המבנה הלוגי-מתמטי של הבעיה. השאלה המופיעה בטקסט מתייחסת לאלמנט הכמותי של העצמים.

מה כולל תהליך פתרון בעיה מתמטית?

מתמטיקאים ופסיכולוגים קוגניטיביים שונים כמו פויה (Polya, 1945), מאיר (Mayer, 1992), פונק (Funke, 2010), גלזר וחבריו (Glaser, Linn & Bohrnstedt, 1997), ורבים נוספים עסקו בשלבי פתרון בעיות שנפרט כאן.

פוסון הדסון ופילר (Fuson, Hudson & Pilar, 1997) הגדירו את השלבים האלה כך:

א. הבנת הטקסט והקשר שלו למציאות - יכול להתבצע ע"י דימוי המציאות, ציור המציאות, תיאור המציאות המתוארת בטקסט במילים של הפותר.

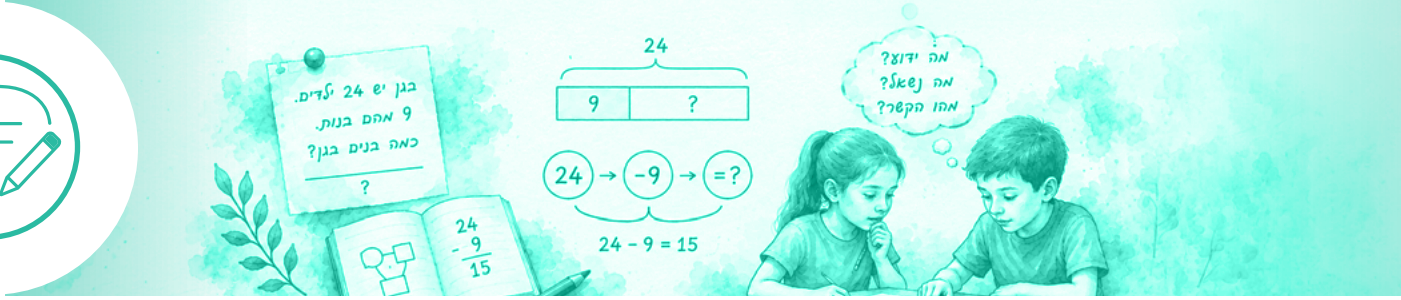
ב. ייצוג התיאור המתמטי בעזרת כלים מתמטיים (מודלים מוחשיים) וסכמות מתמטיות (גרפיות).

ג. התמקדות ומציאת המרכיבים החסרים. כלומר הצגת תהליך הפתרון המתמטי (בניית הביטויים המתמטיים המתאימים).

ד. פתרון (חישוב) בכלים מתמטיים.

ה. בדיקת הקשר שבין הפתרון המתמטי לתיאור המציאות שאליה התייחסה הבעיה.

נשר (1983) הבחינה בין תהליכי פתרון בעיות מתמטיות "פשוטות", כפי שמוצגות בחיי ביה"ס, לבין בעיות מהחיים שיש להשתמש לפתרונן בחישובים מתמטיים. בעוד שבבעיה מתמטית (פשוטה) טיפוסית לעולם ביה"ס הנתונים מעובדים ומוצגים לתלמיד בתמציתיות ובאופן מכוון לביצוע אופרציות מתמטיות, בעיות מציאות מחייבות ניתוח הסיטואציה וזיהוי המרכיבים הכמותיים שיתמכו בפתרון הבעיה הנתונה (שלב שבבעיות ביה"ס נתון ישירות בתוך טקסט הבעיה). רק לאחר בניית מרחב העצמים והיחסים הכמותיים שלהם, ניתן להתייחס



לבעיה המתמטית הנגזרת מהנתונים ותכנון הפתרון. לדוגמה: אם הבעיה היא "כמה עולה בניית גדר מסביב לבריכה?", גם אם נתונים ממדי הבריכה ישנה מערכת שיקולים שיש להביא בחשבון כמו, האם הגדר צמודה לבריכה או משאירים מרווחים בין הבריכה לגדר, ואם כן, מה גודלם? מה גובה הגדר? מה מחיר מטר גדר, וכדומה.

סכמות ופתרון בעיות מילוליות

פסיכולוגים קוגניטיביים של שנות ה־80 שאנק ואבלסון וכן אנדרסון (Schank & Abelson, 1977; Anderson, 1980) התייחסו לסכמות כאל רשת סמנטית המייצגת יחסים או תרחישים של התנהגויות, למשל דפוס התנהגות במסיבה או במסעדה. הווארד (Howard, 1987) מתאר סכמה כייצוג מנטלי של היבטים מהעולם. יש לה מערכת של תנאים הקשורים זה לזה ומתייחסים זה לזה לפי הגירויים המתקבלים ויוצרים את המקרה הספציפי לסכמה. רומלהארט ונורמן (Rumelhart & Norman, 1985) מאפיינים סכמה כמבנה הנתונים לייצוג המושג הכללי הנשמר בזיכרון. קיימות סכמות להכללה של עצמים, מאורעות, תרחישים ופעולות. סכמות לעיתים קרובות מייצגות את אב־הטיפוס של המושגים. הן משמשות כמודלים לעולם. עיבוד נתונים המשתמש בסכמות מצריך תהליך של זיהוי איזו סכמה היא המתאימה ביותר לגירוי שהתקבל. סכמות כוללות מאפיינים אלה:

א. לסכמות יש משתנים.
ב. סכמות יכולות לכלול זו את זו.
ג. סכמות מייצגות ידע בכל רמת הפשטה.
ד. סכמות מייצגות ידע (יותר מאשר הגדרות).
ה. סכמות הן תהליך של זיהוי ועיבוד מצב המתאים לגירויים שהתקבלו ועיבודם למודל מתאים לסיטואציה.

רומלהארט ונורמן מדגישים שעל אף שלכאורה נראה כי מדובר באוסף של פרטים, חשוב להבין שהארגון שלהם וההקשר גם יחד בונים את הסכמה.

דוגמה מעניינת שרומלהארט ונורמן מציגים מתייחסת למרכיבים המוצגים באיור 1 שבהופיעם במבודד לא היו מקבלים כל משמעות.

איור 1



ואולם כאשר מוסיפים פירוט שמרכיבים שונים אלה קשורים לפנים (איור 2) הם מקבלים משמעות ברורה.

איור 2

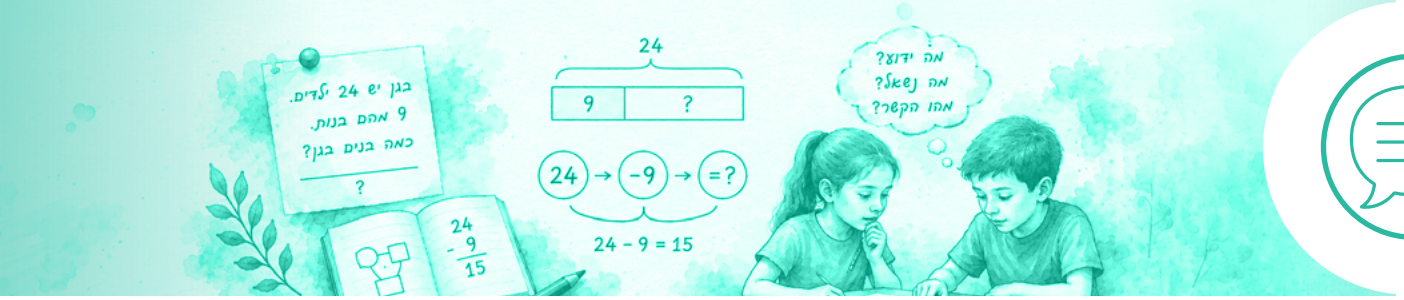


מקקללנד ורומלהארט (McClelland & Rumelhart, 1987) טוענים שהסכמה היא מבנה נתונים לייצוג רעיון הכולל את העצמים, את המצבים ואת סדרת המאורעות הקשורים לרעיון. במילים אחרות, הסכמה היא מעין מודל של הרעיון. עיבוד המידע בעזרת הסכמה כולל את בניית המודל המתאים ביותר למצב נתון.

סכמות בהוראת מתמטיקה

נשר (Nesher, 1986) ורזניק ואומנסון (Resnick & Omanson, 1987) הצביעו על שינוי באוריינטציה של הוראת המתמטיקה, מחיפוש דרכי הוראה כלליות להבנה של הסכמות המיוחדות לתחומים מתמטיים מחד־גיסא, ולסכמות המשפיעות על דרכי ההבנה והטעויות הקונספטואליות המתגלות בלימוד כל נושא מתמטי בנפרד מאידך־גיסא.

למעשה, החוקרים השונים (גם הפסיכולוגים הקוגניטיביים וגם החוקרים בתחום החינוך המתמטי) ממשיכים את ההגדרה של פיאז'ה, העוסקת ב"סכמה של פעולה" המתאפיינת ביכולת לחזור על הפעולה שמדובר בה, היכולת לחזור ממנה (כלומר הפיכות),



והיכולת להכלילה. אלה הם המרכיבים המאפיינים סכמה של פעולה (Piaget, 1980, p. 205). לפי פיאז'ה, הסכמה נוצרת בתהליך של הטמעה (Assimilation) והתאמה (Accommodation). ההטמעה היא הסתגלות לסכמה קיימת, ואילו ההתאמה היא תהליך של קליטת ידע בעקבות התמודדות קוגניטיבית עם הכרת מושגים חדשים תוך כדי הפרה פנימית (אם המושגים לא תואמים את הציפיות) או קונפליקט פנימי (אם הידע החדש עומד בסתירה לידע הקודם) עם תפיסות קיימות קודמות לגבי המושגים הקודמים. קליטת הידע החדש היא התהליך המוביל להרחבת הסכמה הקיימת. אצל פיאז'ה מושג הסכמה אינו קשור רק לחשיבה אלא גם לדפוסי התנהגות מוטוריים.

פישביין (Fishbein & Grossman, 1997; Fischbein, 1999) שממשיך את תפיסתו של פיאז'ה, מגדיר סכמה כ"דפוס של פעולה" (pattern of action), ומרחיב הגדרה זו לאסטרטגיות לפתרון קבוצות של בעיות. לפי פישביין, **סכמה היא תוכנית פעולה**. לעיתים קרובות התנהגות לפי סכמה נתונה היא אוטומטית עד כדי אי תשומת לב לאוסף של פעולות רבות לביצוע מטלה נתונה.

פישביין הבחין בין שני סוגים של סכמות: סוג אחד מציג תחום מוגדר ומרוכז (condensed) של עצמים או אירועים, ואילו הסוג השני עוסק בהתנהגות המסתגלת למצב חדש בדרך של התאמה והטמעה (assimilation and accommodation).

לדעת פישביין, הסכמה מאפשרת:

א. לקלוט ולבנות הליך המבוסס על האינפורמציה שנקלטה ולאור זאת -

ב. להגיב באופן משמעותי ויעיל לגירויים שהתקבלו מהסביבה.

סכמות ובעיות מילוליות

השימוש בסכמות לניתוח סוגי בעיות מילוליות החל בשנות ה־80 בידי קבוצות חוקרים ממקומות שונים ברחבי העולם, שהסכימו על דרכי ניתוח משותפות:

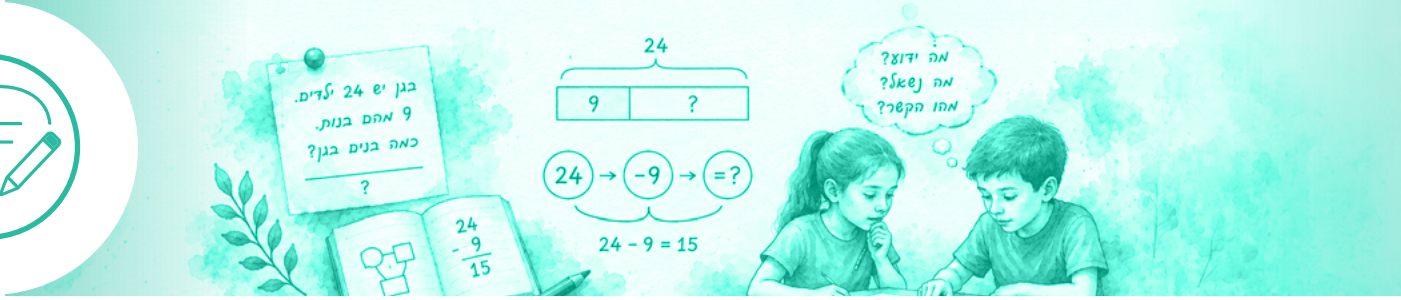
Nesher and Teubal 1975; Nesher and Katriel 1977; Carpenter, Moser et al. 1982; Vergnaud 1982; Nesher 1982; Nesher, Greeno et al. 1982; Greeno and Kintsch 1985; Riley and Greeno 1988; Vergnaud 1988; Verschaffel & De Corte 1993; Kintsch, 1994.

ניתוח זה כלל אפיון של סוגי בעיות מילוליות, מרכיבי קושי שלהם, וטעויות צפויות של תלמידים (בנושא זה נרחיב בפרקים הבאים בכל סוג בעיות שנעסוק בו).

לצורך פתרון בעיות טוען מאייר (Mayer, 1982), שדרושים ארבעה סוגי ידע שונים: לשוני-עובדתי, סכמתי, אלגוריתמי ואסטרטגי. את ארבעת סוגי הידע האלו הוא ממיין לשני שלבים במהלך פתרון בעיה: השלב הייצוגי והשלב החישובי. בשלב הייצוגי קיימים הידע הלשוני-עובדתי (הכולל את חוקי השפה ועובדות על העולם) והידע הסכמתי (הכולל את הקשר שהפותר מבצע עם הידע שלו בפתרון סוגים שונים של בעיות). זאת במטרה להבין את הסיטואציה המוצגת בבעיה ומציאת רעיונות, תהליכים או מודלים שבעזרתם בשלב הבא יתקיים תהליך הפתרון. בשלב החישובי קיימים הידע האלגוריתמי (הכולל את האלגוריתם לפתרון התרגיל או המשוואה המתאימה) והידע האסטרטגי (הכולל את דרך הפתרון של התרגיל או המשוואה) ובחינה רפלקטיבית אם התוצאה שהתקבלה מתאימה לבעיה שהוצגה.

השימוש בסכמות התרחב מניתוח סוגי בעיות וזיהוי קשיים של תלמידים אל פיתוח דרכי הוראה המשתמשות בסכמות לשלבי ניתוח הבעיה הנתונה, שימוש בייצוגים סכמתיים (schematic representations) כשלב בדרך אל הפתרון. שימושים אלו נבדקו בעבודות נוספות כמו של וויליס ופוסון (Willis & Fuson, 1988), נשר והרשקוביץ (Nesher & Hershkovitz, 1994), הרשקוביץ ונשר (Hershkovitz & Nesher, 2003), ואן דייק וחבריו (van Dijk et al., 2003), הרשקוביץ (Hershkovitz, 2009) ועוד. בתקופות שונות ובסוגי בעיות מילוליות שונות, הלמידה באמצעות חשיפה והתנסות בסכמות שונות נמצאו כמועילות ומקדמות הצלחה בפתרון בעיות של יותר תלמידים מאשר בלעדיהן.

גם בעבודותיהם של פנטזיארה גגאסיה ואליה (Pantziara et al., 2009) ושל פאגננט וולאסיס (Fagnant & Vlassis, 2013) שבדקו פתרון בעיות לא שגרתיות, נמצאו הישגים



גבוהים יותר אצל תלמידים שנחשפו לפתרון בעיות בעזרת ייצוגים סכמתיים.

סוגי בעיות הנלמדות בביה"ס היסודי: בעיות חד־שלביות

בעיה מילולית חד־שלבית היא בעיה שכדי לפתור אותה יש לבצע פעולה אריתמטית אחת ויחידה. הפעולה יכולה להיות חיבור, חיסור, כפל או חילוק. בבעיה חד־שלבית חייבים להופיע לפחות שלושה היגדים. שניים מהם מתארים קבוצות כלשהן שמכילים תיאור קבוצה וכמות, והמרכיב השלישי, המייצג על־פי־רוב את השאלה, מציג קשר תוכני בין שני ההיגדים שתוארו תחילה. קשר זה יכול לבוא לידי ביטוי בצורות שונות בבעיות המילוליות השונות.

נתבונן בדוגמה: *בכיתה 20 בנים ו־10 בנות.* כל עוד לא נתון ההיגד השלישי לא נוכל לדעת מהי השאלה ומהי הפעולה המתמטית לפתרונה. ההיגד השלישי יכול להיות כל אחד מההיגדים האלו, והוא מוביל לתהליך פתרון אחר:

א. כמה ילדים בכיתה?

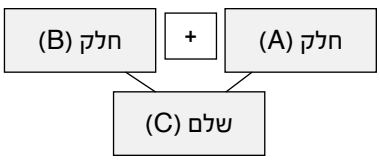
ב. בכמה גדול מספר הבנים ממספר הבנות?

ג. פי כמה גדול מספר הבנים ממספר הבנות?

ד. בכמה אפשרויות שונות הם יכולים להסתדר בזוגות?

גם ההקשרים שונים זה מזה, והניסוח שלהם משפיע על הבנת הסיטואציה ובעקבות כך על תהליך הפתרון. עדיין בכל אחת מהסיטואציות נתונות שתי קבוצות ויש למצוא את הקבוצה השלישית שהיא יכולה להיות חלק או שלם במבנה חיבורי הכולל:

חלקים ושלם



ואפשר לנסח שאלת שונות **בהקשרים שונים**. בהינתן שתי קבוצות כל הקשר ומרכיב חסר מובילים לבעיות שבהן רמת מורכבות שונה ורמת קושי שונה לפתרון. (הרחבה בנדון תוכלו למצוא בספר - "האם זו בעיה?")

ובאופן דומה אפשר למצוא בעיות בהקשרים שונים בבעיות בעלות מבנה כפלי.

מבנה כפלי

מבנה כפלי מכיל גורמים ומכפלה. נבחן את האפשרויות השונות. נתבונן לדוגמה בסיפור: *למסיבה הגיעו 4 ילדים שהחזיקו בידיהם 20 בלונים. כל ילד החזיק בידו 5 בלונים.*

הסיפור המתואר כולל שלושה היגדים:

A: היגד המתאר קבוצה של 4 ילדים.

B: היגד המתאר קבוצה של 20 בלונים.

C: היגד המתאר קשר שבין שתי הקבוצות שתוארו בהיגדים הקודמים.

כל ילד החזיק בידו 5 בלונים. זהו היגד המתאר את הקשר שבין הילדים לבין הבלונים: בהינתן שניים מההיגדים, נוכל לשאול על ההיגד השלישי, ולחשב אותו בעזרת תרגיל כפל או תרגיל חילוק.

לסיפור המתואר לעיל ניתן לנסח שלוש בעיות שונות.

<u>בעיה א</u>

למסיבה הגיעו 4 ילדים. כל ילד החזיק בידו 5 בלונים. כמה בלונים החזיקו כל הילדים?

שאלה זו נפתור בעזרת תרגיל הכפל, כיוון שהשאלה הייתה על המכפלה.

4	×	5	=	?
ילדים		בלונים לכל ילד		בלונים

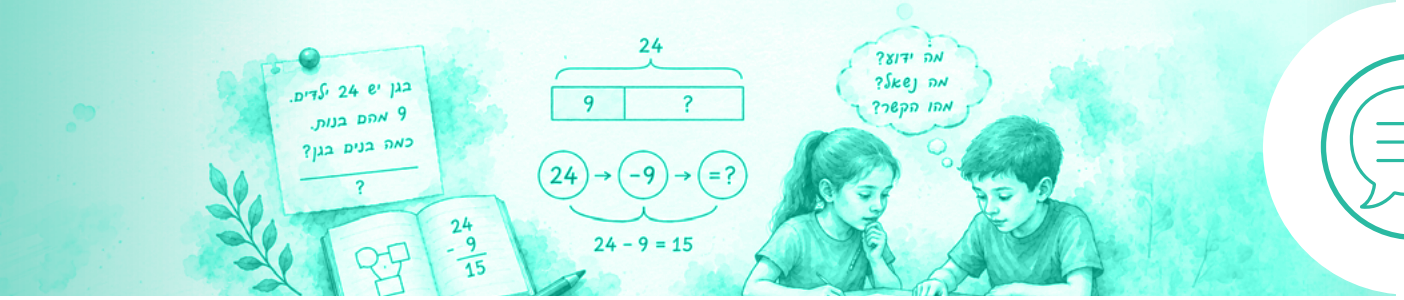
<u>בעיה ב</u>

למסיבה הגיעו ילדים שהחזיקו בידיהם 20 בלונים. כל ילד החזיק בידו 5 בלונים. כמה ילדים הגיעו למסיבה?

התרגיל הישיר לפתרון הבעיה הוא חילוק[3] - כיוון שהשאלה הייתה על אחד הגורמים:

20	÷	5	=	?
בלונים		בלונים לכל ילד		ילדים

3 יש העונים בעזרת התרגיל: 20=?×5 . גם תרגיל זה מייצג באופן מדויק את מבנה הבעיה ופתרונה.



בעיה ג

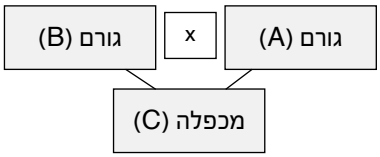
למסיבה הגיעו 4 ילדים. כל ילד החזיק בידו מספר שווה של בלונים. בסה"כ כל הילדים החזיקו בידיהם 20 בלונים. כמה בלונים החזיק כל ילד?

התרגיל הישיר לפתרון הבעיה הוא חילוק[4] - כיוון שגם שאלה זו הייתה על אחד הגורמים.

20	÷	4	=	?
בלונים		ילדים		בלונים לכל ילד

בשתי הבעיות הראשונות כתוב במפורש בטקסט הבעיה, שמספר הבלונים בידו של כל ילד הוא שווה (על־ידי ההיגד: "כל ילד החזיק בידו 5 בלונים"), לעומת זאת בבעיה השלישית שואלים על מספר הבלונים שכל ילד מחזיק. אילו לא היה כתוב במפורש "כל ילד החזיק בידו מספר שווה של בלונים" אפשר היה לקבל גם תשובה שבה כל ילד מחזיק בידו מספר שונה של בלונים (כל עוד סכומם 20 בלונים), ובמקרה זה לא ניתן היה לענות על השאלה בעזרת תרגיל חילוק.

כאמור, בעיות בעלות מבנה כפלי עוסקות בקשר שבין שלושה מרכיבים. שני מרכיבים הם הגורמים (A, B) והמרכיב השלישי (C) הוא המכפלה.



במרבית המקרים המרכיבים מתוארים על ידי מספר וכינוי (כזכור בבעיות השוואה ישנו מספר המתאר את היחס שבין שתי הקבוצות).

בהינתן המרכיבים A,B ויש לחשב את C - הפתרון הישיר הוא בעזרת תרגיל כפל.

בהינתן המרכיבים A, C ויש לחשב את B, או בהינתן המרכיבים B, C ויש לחשב את A - הפתרון הישיר הוא בעזרת תרגיל חילוק.

הֶקְשרים שונים מובילים למבחר בעיות המעוררות רמות שונות של קשיים.

4 יש העונים בעזרת התרגיל: 20=?×4 . וכמו במקרה הקודם זהו פתרון מדויק המייצג את מבנה הבעיה ופתרונה.

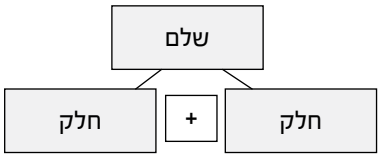
על דרכי ניסוח נוספות של אוסף השאלות שהוצג לעיל ניתן לקרוא עוד בספר "האם זו בעיה?".

בעיות מילוליות דו־שלביות

כשעוברים מבעיות חד־שלביות (חיבוריות או כפליות) לבעיות דו־שלביות, עוברים לקשר או הרכבה בין שני מבנים חד־שלביים שבהם דנו עד כאן.

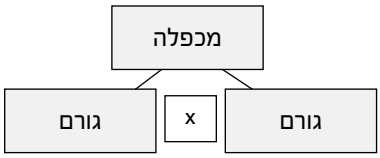
בבעיות החיבוריות עסקנו במגוון של בעיות שהמקשר בין כולן היה מבנה תלת־מקומי שהציג את הקשר שבין שני חלקים ושלם.

ייצגנו מבנה זה בעזרת הסכמה:

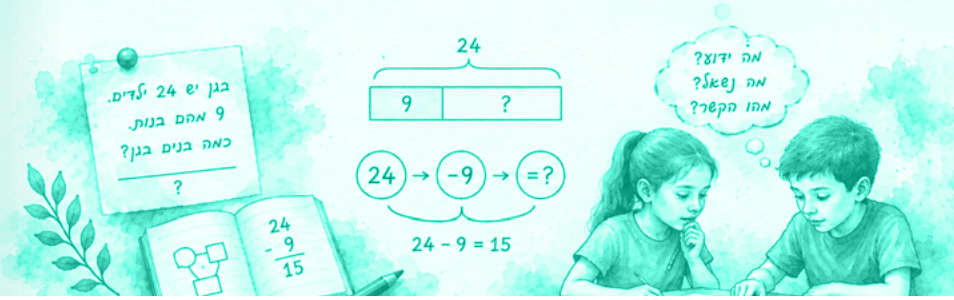


בכל בעיה חד־שלבית חיבורית יש שלושה היגדים, אשר שניים מהם היגדים שמופיע בהם גם התיאור הכמותי (מספר) וגם תיאור הקבוצה הנדונה (כינוי/שם), ומרכיב אחד שמציג את השאלה שמופיע בו רק שם הקבוצה ולא מופיעה הכמות. על הפותר להיעזר בפעולה הבינארית המתאימה למציאת הכמות של המרכיב שבו הוא היה חסר. אם הכמות חסרה במרכיב המתאר את השלם - הפתרון המתאים הוא באמצעות תרגיל חיבור. אם הכמות חסרה במרכיב המתאר חלק, הפתרון הישיר המתאים הוא באמצעות תרגיל חיסור.

בבעיות כפליות דנו במבנה תלת־מקומי שייצגנו באמצעות הסכמה:



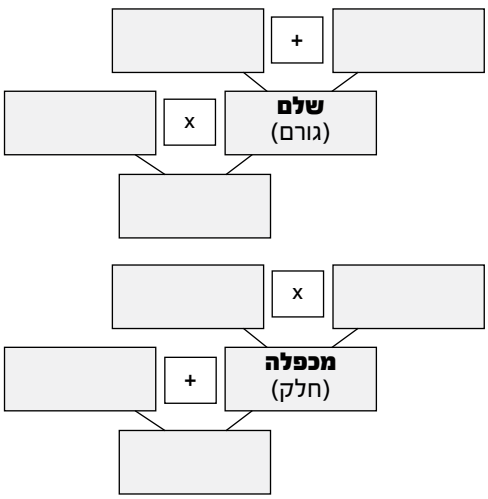
באופן אנלוגי לבעיות החיבוריות החד־שלביות, בכל בעיה כפלית חד־שלבית יש שלושה היגדים, אשר בשניים מהם מופיע גם התיאור הכמותי (מספר) וגם תיאור הקבוצה הנדונה (שם), ומרכיב אחד שמציג את השאלה, ומופיע בו רק שם הקבוצה ולא מופיעה הכמות. על הפותר להיעזר בפעולה הבינארית המתאימה למציאת הכמות



של המרכיב שבו הוא חסר.
אם הכמות חסרה במרכיב המתאר את המכפלה - הפתרון הישיר המתאים הוא באמצעות תרגיל כפל. אם הכמות חסרה במרכיב המתאר גורם, הפתרון הישיר המתאים הוא באמצעות תרגיל חילוק.

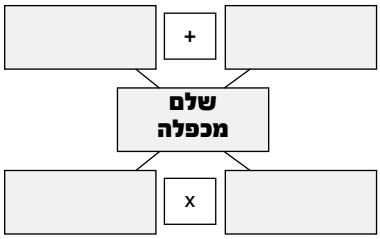
כל בעיה דו־שלבית מורכבת משתי סכמות חד־שלביות.
שתי סכמות חד־שלביות ניתן להרכיב כך:
א. הרכבה של שתי סכמות חיבוריות,
ב. הרכבה של שתי סכמות כפליות,
ג. הרכבה של סכמה חיבורית עם סכמה כפלית.
מכל אחד מההרכבים הנ"ל ניתן ליצור את הסכמות האלה (Hershkovitz & Nesher, 1996; Nesher & Hershkovitz, 1985; Reusser, 1990; Shalin & Bee, 1994). לצורך ההבהרה נפרט את אפשרות ג, המורכבת יותר כיוון שמשתתפות בה שתי סכמות: החיבורית והכפלית.
הרכבת שתי הסכמות התלת־מקומיות מתאפשרת בשלוש דרכים:

1. הרכבה היוצרת **סכמה היררכית**:

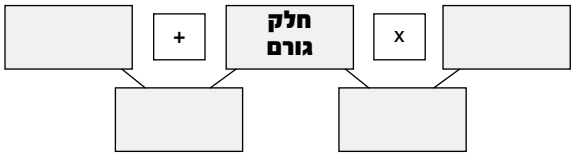


בסכמה מורכבת זו, השלם מהסכמה החיבורית מתאחד עם הגורם של הסכמה הכפלית, או המכפלה מהסכמה הכפלית היא החלק בסכמה החיבורית.

2. הרכבה היוצרת **סכמת שלם משותף**:
בסכמה מורכבת זו מתאחדים השלם של הסכמה החיבורית עם המכפלה של הסכמה הכפלית.



3. הרכבה היוצרת **סכמת חלק משותף**:



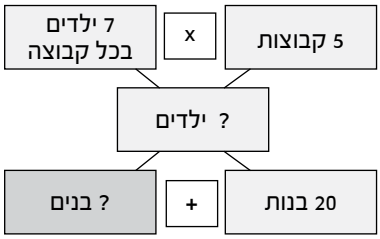
בעוד שבבעיה חד־שלבית מספר הגורמים המופיעים בטקסט שווה למספר הגורמים המופיעים בסכמה, לא כך פני הדברים בבעיה דו־שלבית.
בבעיה חד־שלבית מופיעים שלושה גורמים, וכך פני הדברים בייצוגה בסכמה (עיינו שנית בפסקאות הקודמות). בבעיה דו־שלבית, שהיא הרכב של שתי בעיות חד־שלביות, לא יימצאו שישה מרכיבים, אלא רק חמישה מרכיבים, כיוון ששני מרכיבים מתוך הסכמות החד־שלביות התאחדו.
בסכמה ההיררכית, מכפלה התאחדה עם חלק או שלם התאחד עם גורם. בסכמת השלם המשותף, שלם התאחד עם מכפלה, ובסכמת החלק המשותף, חלק התאחד עם גורם.

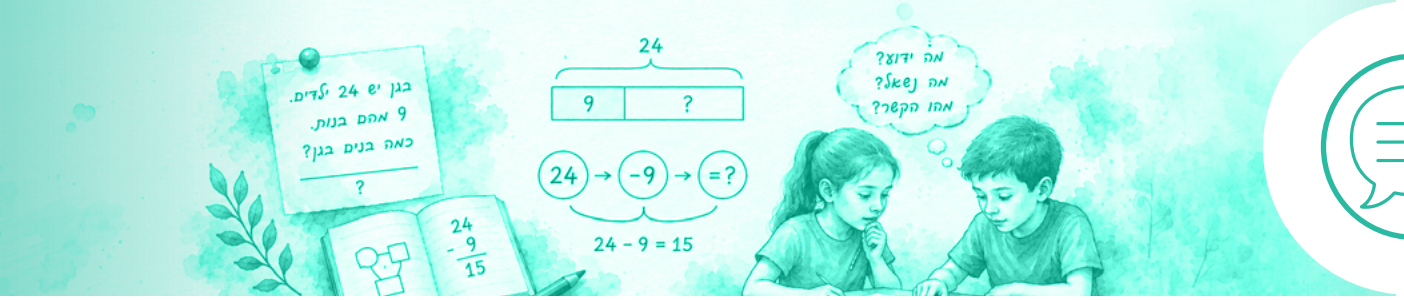
במטרה לבחון סוגיה זו נתבונן לדוגמה בבעיה דו־שלבית:

<u>בעיה א</u>

בכיתה היו 5 קבוצות.
בכל קבוצה 7 ילדים. בכיתה היו 20 בנות.
כמה בנים היו בכיתה?

נתבונן בסכמה המתאימה לבעיה זו:

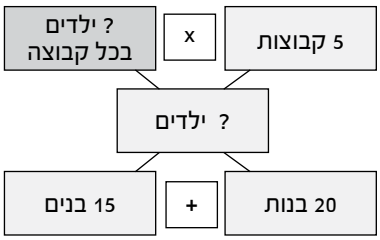




את הבעיה אפשר לפתור בשלבים. כיוון שכל הכינויים רשומים בפירוט בתוך הסכמה, נקצר כאן בשלב החישוב ולא נכתוב את הכינויים בתוך התרגיל.
נפתור תחילה את פעולת הכפל (מתוך הסכמה הכפלית, כי בה יש שני נתונים):
$5 \times 7 = 35$ לקבלת מספר הילדים בכיתה.
עם התוצאה שהתקבלה ניתן להמשיך אל הסכמה החיבורית: $35 - 20 = 15$ ולקבל את מספר הבנים בכיתה.
ניתן כמובן גם לפתור בתרגיל מורכב אחד: $5 \times 7 - 20 = 15$.
אפשר לשאול שאלות שונות על סיטואציה נתונה, ובמקרה זה אותה סכמה מייצגת כל בעיה. ההבדל בין הבעיות השונות הוא בנתונים ובניסוח השאלה.
לאותה סיטואציה ניתן לנסח שתי בעיות שונות שאותן נפרט כאן. לא נדון בבעיה המקבילה לחלוטין לבעיה א, שבה במקום לשאול על הבנים שואלים על הבנות, כי כל הניתוח זהה לחלוטין.

<u>בעיה ב</u>

בכיתה היו 15 בנות ו־20 בנים.
הם התחלקו ל־5 קבוצות, כך שבכל קבוצה היה מספר שווה של ילדים. כמה ילדים היו בכל קבוצה?
הסכמה המתאימה לבעיה זו:



לאור הכינויים המופיעים בתוך הסכמה נציג רק את התרגילים הנדרשים לפתרון הבעיה. הפתרון בשלבים:

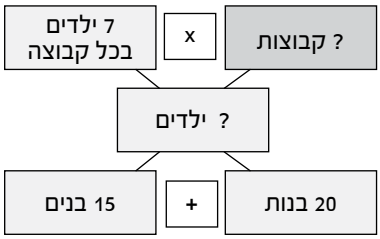
$15 + 20 = 35$

$35 : 5 = 7$

ובתרגיל מורכב: $(15 + 20) : 5 = 7$.

במקביל אפשר גם לבחון את **<u>בעיה ג</u>**

בכיתה היו 15 בנות ו־20 בנים.
הם התחלקו לקבוצות כך שבכל קבוצה היו 7 ילדים.
כמה קבוצות היו בכיתה?
הסכמה המתאימה לבעיה זו:



לאור הכינויים המופיעים בתוך הסכמה נציג רק את התרגילים הנדרשים לפתרון הבעיות. הפתרון בשלבים:

$15 + 20 = 35$

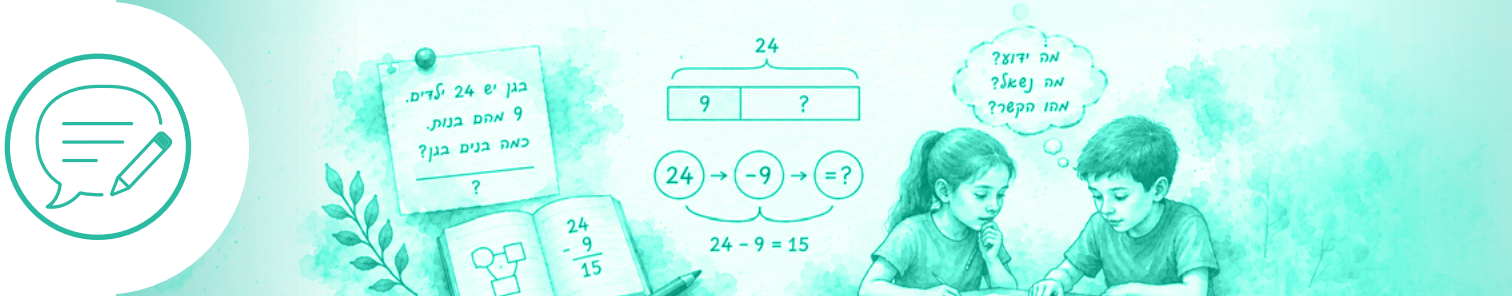
$35 : 7 = 5$

ובתרגיל מורכב: $(15 + 20) : 7 = 5$.

<u>לסיכום</u>

בסכמה של "שלם משותף" אשר בנויה מסכמה חיבורית וסכמה כפלית יש בדיוק שלוש בעיות השונות זו מזו.

באופן דומה אפשר לנתח את הבעיות הדו־שלביות בעזרת חיבור בין שתי הסכמות המתאימות.
ניתוח זה הוא בסיס להוראת ניתוח בעיות מילוליות מורכבות, לזיהוי הבעיות השונות האפשריות, ולמחקר לזיהוי רמות הקושי השונות של כל סוג של בעיה. הניתוח שהוצג כאן, ובדיקת רמות הקושי של הבעיות הדו־שלביות היה נושא הדוקטורט של הרשקוביץ (1992).
נציג כאן רק את אחד הממצאים העוסק באינטראקציה שבין הסכמות לבין הפעולות (להרחבה אפשר לקרוא בספר "האם זו בעיה?").
מצאנו שגם הסכמות וגם הפעולות הן משתנים המשפיעים על דרגת הקושי של הבעיות השונות, לפיכך מעניין לבדוק את האינטראקציה ביניהן. בטבלה נציג את אחוז המצליחים בפתרון הבעיות לפי סוג הפעולות וסוג הסכמות.
לסיכום פרק זה העוסק בבעיות דו־שלביות נתבונן באחד הממצאים המקשר בין הסכמות לבין הפעולות המתמטיות הנדרשות לפתור את הבעיות.



טבלה 1

אחוזי הצלחה בפתרון בעיות שהן אינטראקציה בין פעולות לסכמות.

סכמות / פעולות	היררכית	שלם משותף	חלק משותף
חיבור-כפל	80	-	-
חיבור-חילוק	72	72	60
חיסור-כפל	72	55	60
חיסור-חילוק	61	-	40

חשוב לשים לב שבטבלה 1 יש תאים ריקים. אלו תאים שהרכב פעולות מסוים לא יכול להתקיים בסכמה הספציפית, לדוגמה בסכמת השלם המשותף לא ייתכן צירוף הפעולות חיבור וכפל למשל, כאשר הפעולה היא כפל תוצאתה תוביל לקבלת מכפלה שהיא גם השלם בתבנית החיבורית. בהינתן המרכיב השלם בתבנית החיבורית, הפעולה הנגזרת מתבנית זו יכולה להיות רק חיסור.

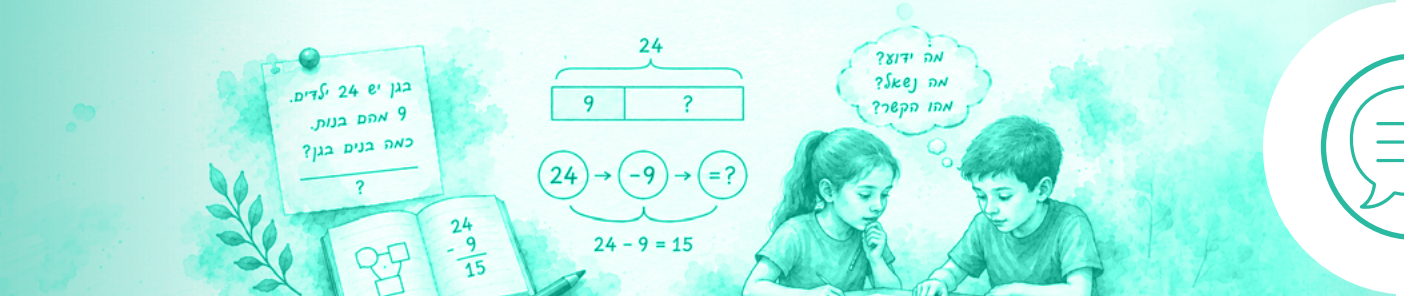
השפעתו של משתנה הסכמות נמצא מובהק, והוא עומד בהתאמה לניתוחים הקוגניטיביים המצופים מראש. על־פי ניתוחים אלה אמורות הסכמות לסייע לפותר למקד את המידע הדיפוזי הנתון במסגרת בעיה "מהחיים" למבנה מתמטי מוגדר. גם רשר (Reusser, 1990) מציין, שלפתור בעיה מילולית פירושו למצוא ייצוג שיעזור לעבור מהטקסט המילולי אל הייצוג המתמטי הפורמלי. ייצוג טוב וממצה הוא כמעט הפתרון כולו, מכיוון שהוא עוזר לארגן את הנתונים למבנה ברור ומוגדר, שהתלמיד יכול למפות בעזרתו את נתוני הבעיה, ואח"כ לעבוד איתם. הסכמה עוזרת לתלמיד לנתח את האלמנטים הנתונים בבעיה על־פי תפקידם, ובעזרתה הוא יכול לבדוק אילו אלמנטים חסרים לו. די לחפשם בטקסט או לחשבם בעצמו. הסכמה ממקדת את תשומת ליבו של התלמיד לתפקיד של כל אחד מהמרכיבים השונים, ואינה משאירה בידיו מרחב אפשרויות אינסופי.

נושא הבעיות המילוליות הוא רחב מאוד. הצגת התחלת הלימוד בנושא אצל תלמידים צעירים ממחישה את המורכבות שנראית לרבים "ברורה מאליה", ובכך נדגיש שוב את שלמדנו מפרלה - "שום דבר לא ברור מאליו".

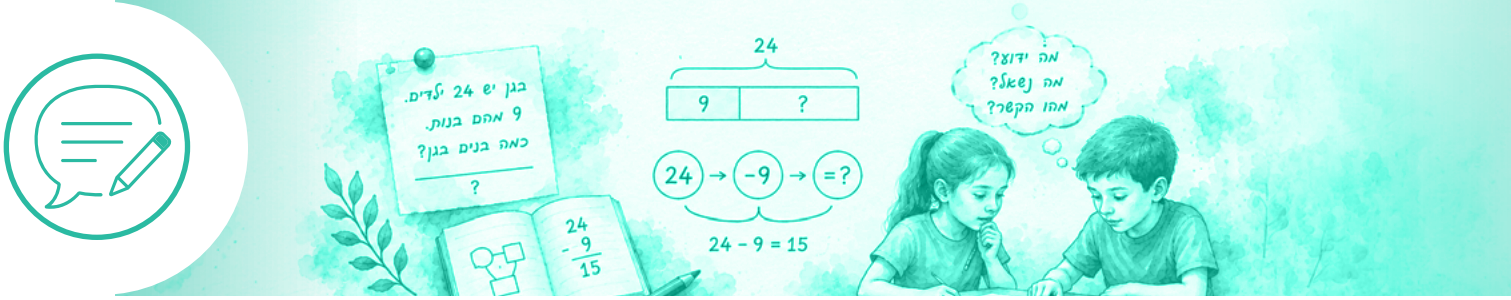
אסכם מאמר זה בדברי תודה לפרופ' פרלה נשר שזכיתי להיות תלמידתה, ולעסוק במחקר ופיתוח הוראת בעיות מילוליות מסוגים שונים ובהקשרים שונים. עולם מרתק נפתח בפניי והמשכתי לעסוק בו במשך כל שנות עבודתי.

ביבליוגרפיה

- הרשקוביץ, ש' (1992). *תרומת הסכמות לפתרון בעיות מילוליות דו־שלביות במתמטיקה*. חיבור לשם קבלת התואר "דוקטור לפילוסופיה", אוניברסיטת חיפה.
- הרשקוביץ, ש' (2014). *האם זו בעיה? בעיות מילוליות במספרים טבעיים בבית-הספר היסודי*. רמת אביב: מטח. מצוי בגרסה דיגיטלית במערכת כותר, הספרייה המקוונת של ישראל. https://kotar.cet.ac.il/KotarApp/Viewer.aspx?nBookID=100596887#1.5582.6.default
- נשר, פ' (1983). תהליכים קוגניטיביים הקשורים בפתרון בעיות מילוליות באריתמטיקה. בתוך מ' ניסן וא' לסט (עורכים), *בין חינוך לפסיכולוגיה* (עמ' 425-407). ירושלים: מאגנס, האוניברסיטה העברית.
- Anderson, J. A. (1980). *Cognitive psychology and its implications*. San Francisco, W.H. Freeman and Company.
- Carpenter, T. P., Moser, J. M., & Romberg, T. A. (1982). *Addition and Subtraction: A Cognitive Approach*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Fagnant, A., & Vlassis, J. (2013). Schematic representation in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 149-168.
- Fischbein, E. & Grossman, A., (1997). Schemata and intuitions in combinatorial reasoning. *Educational studies in Mathematics, 34*(1), 27-47.



- Mayer, R. (1982). The psychology of mathematical problem solving. In F. K. Lester & J. Garofalo (Eds.), *Mathematical problem solving*: *Issues in research* (pp. 1–13). Philadelphia, PA: Franklin Institute Press.
- Mayer, R. E. (1992). *Thinking*, *Problem solving*, *Cognition* (2nd Ed.). New York, NY: Freeman.
- McClelland, J. L., & Rumelhart D.E. (1987). *Parallel distributed processing*. MIT Press Cambridge, Mass. Press.
- Nesher, P. (1972). *From ordinary language to arithmetic language in the primary grades*. Unpublished Doctoral Dissertation, Harvard University, University Microfilm No. 76-10, 525.
- Nesher, P., & Teubal, E. (1975). Verbal Cues as an Interfering Factor in Verbal Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 6*(1), 41-51.
- Nesher, P. & Katriel T. (1977). A Semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics, 8*(3), 251-269.
- Nesher, P. (1980). The Stereotyped Nature of School Word Problems. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), 41-48.
- Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction*: *A cognitive perspective* (pp. 25–38). Lawrence Erlbaum.
- Nesher, P., Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational studies in mathematics, 13*(4), 373-394.
- Nesher, P. (1986). Learning Mathematics – a cognitive perspective. *American Psychologist*, *41*(10), 1114-1122.
- Fischbein, E. (1999). Intuitions and schemata in mathematical reasoning. *Educational studies in mathematics, 38*(1), 11-50.
- Funke, J. (2010). Complex problem solving: A case for complex cognition?. *Cognitive processing, 11*(2), 133-142.
- Fuson, K. C., Hudson, K., & Pilar, R. (1997). Phases of classroom mathematical problem-solving activity: The PCMPA framework for supporting algebraic thinking in primary school classrooms. *Cognition and Instruction, 15*(4), 481–510.
- Glaser, R., Linn, R., & Bohrnstedt, G. (1997). *Assessment in Transition*: *Monitoring the Nation's Educational Progress*. NY: National Academy of Education.
- Greeno, J. G., & Kintsch, W. (1985). Understanding and Solving Word Arithmetic Problem. *Psychological Review*, *92*(1), 109-129.
- Howard, R. W. (Ed.). (1987). *Concept and schemata*. London: Cassel educational artillery house.
- Hershkovitz, S., & Nesher, P. (1996). The role of schemes in designing computerized environments. *Educational Studies in Mathematics, 30*(4), 339-366.
- Hershkovitz, S., & Nesher, P. (2003). The role of schemes in solving word problems. *The Mathematics Educator, 7*(2), 1-24.
- Hershkovitz S. (2009). Intuition, Schema and Problem Solving. In J. Novotná & H. Moraová (eds.) *Proceedings of the SEMT*09 - *International Symposium Elementary Math Teaching* (pp. 31-42). Prague, the Czech Republic.
- Kintsch, W. (1994). Text comprehension, memory, and learning. *American Psychologist 49*, 294-303.



Development Center, University of Pittsburgh. https://eric.ed.gov/?id=ED259949

- Van Dijk, I. M. A. W., Van Oers, B., & Terwel, J. (2003). Providing or designing? Constructing models in primary maths education. *Learning and Instruction, 13*(1), 53-72.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In T. P. Carpenter, J. M. Moser, & T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction*: *A cognitive perspective* (pp. 39–59). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.
- Verschaffel, L., & De Corte, E. (1993). A decade of research on word problem solving in Leuven: Theoretical, methodological and practical outcomes. *Educational Psychology Review*, *5*, 239-256.
- Willis, G. B., & Fuson, K. C. (1988). Teaching Children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology, 80*(2), 192-201.
- Nesher P., & Hershkovitz S. (1994). The Role of Schemes in Two-Step Problems: Analysis and Research Findings. *Educational Studies in Mathematics*, *26*(1), 1-23.
- Pantziara, M., Gagatsis, A., & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1), 39-60.
- Piaget, J. (1980). *Experiments in contradiction*. Chicago and London: University of Chicago Press.
- Polya, G. (1945, 1973). *How to Solve it* (2nd Edition). Princeton: Princeton University Press.
- Resnick, L. B., & Omanson, S. F. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional Psychology*, 3, 41-96. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Reusser, K. (1990). From text to situation to equation: Cognitive simulation of understanding and solving mathematical word problems. *Learning and Instruction, 2*(2), 477-498.
- Riley, M. S., & Greeno, J. G. (1988). Development analysis of understanding language about quantities and of solving problems. *Cognitive and Instruction, 5*(1), 49-101.
- Rumelhart, D. E., & Norman, D. A. (1985). Representation and Knowledge. In A. Aitkenhead, & J. M. Slack (Eds.), *Issues in cognitive modeling* (pp. 15-92). London, UK: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schank, R., & Abelson, R. (1977). *Scripts*, *plans*, *goals and understanding*. Hillsdale, NJ. Lawrence Erlbaum Associates.
- Shalin, V. L., & Bee, N. V. (1985). *Structural differences between two-step word problems* (Report No. UPITT/LRDC/ONR/KLI-85/02). Learning Research and