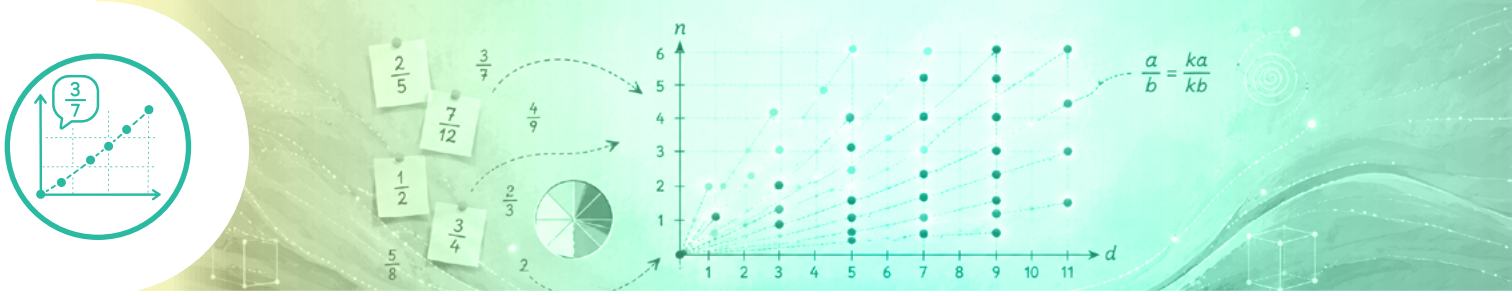


לראות מעבר לתשובה: ייצוג קרטזי ככלי דיאגנוסטי לזיהוי אסטרטגיות עבודה של תלמידים במשימות של שברים עם תשובות רבות

ד"ר אמל קעדאן,
אוניברסיטת חיפה

פרופ' מיכל ירושלמי,
אוניברסיטת חיפה

Prof. Daniel Chazan,
University of Maryland, USA



לראות מעבר לתשובה: ייצוג קרטזי ככלי דיאגנוסטי לזיהוי אסטרטגיות עבודה של תלמידים במשימות של שברים עם תשובות רבות

אמל קעדאן, מיכל ירושלמי, דניאל חזן

תקציר

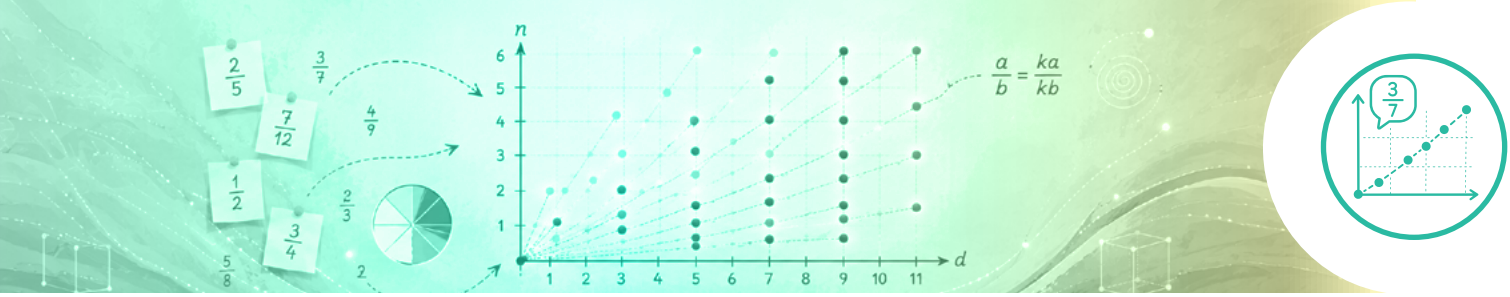
כמורים למתמטיקה קל לנו לסמן תשובות של תלמידים כנכונות או כשגויות, אך קשה יותר להבין את החשיבה שעומדת מאחוריהן. למשל, כדי ללמוד על הבנת מושג השבר של תלמידים נבקש למצוא שבר בין שני שברים נתונים. תשובה נכונה לא בהכרח תבהיר לנו אם השבר נתפס כמספר (כגודל), אם התשובה היא תוצאת כלל חישובי גרידא, או אם היא נובעת מהתייחסות למונה ולמכנה כאל שני מספרים שלמים ונפרדים. כל אחת מהאפשרויות תצריך דגשים והסברים שונים במהלך ההוראה. במאמר זה אנו מציעים דרך לייצוג תשובות תלמידים באופן שיוכל לשמש ככלי המאפשר למורה לאבחן את אסטרטגיית העבודה של התלמידים. באמצעות דוגמאות מתוך עבודות תלמידים, נראה כיצד דפוסים חזותיים לשברים בעלי מכנה קבוע, לשברים שקולים, או להרחבה נכונה או שגוייה של השבר יכולים לסייע למורה לתכנן משוב ממוקד, שיחה מתמטית או משימת המשך. נרחיב ונדגים כיצד סביבת הערכה שבמרכזה ייצוג קרטזי, שבו כל שבר מוצג כנקודה במישור, מזמנת מהלכי הוראה משולבים הערכה מעצבת והוראה מותאמת אישית.

מילות מפתח: שברים; ייצוג קרטזי; אסטרטגיות עבודה; הערכה מעצבת.

מבוא: האתגר מאחורי התשובה הבודדת

כולנו, במהלך ההוראה בכיתה, בזמן תכנון שיעורים ובבדיקת מבחנים, פוגשים תשובות של תלמידים. לעיתים אצל אותו תלמיד חלק מן התשובות נכונות וחלקן שגויות. במבט ראשון אפשר לסמן נכונות, לקבוע ציון, ולהמשיך הלאה. אבל לעיתים קרובות דווקא שם מתחילה השאלה החשובה יותר: מה קורה כאן? האם מדובר באי־הבנה בסיסית? בשימוש בכלל חישובי בלי להבין את משמעותו? או אסטרטגיה עקבית שלעיתים מניבה תשובות נכונות ולעיתים שגויות? ובעיקר, איך אפשר להשתמש בתשובות האלה כבסיס למשוב מקדם ולהערכה מעצבת?

שאלה זו חשובה במיוחד במשימות העוסקות במציאת שבר בין שני שברים (נכנה אותם "שברי העוגן"), בין אם שברי העוגן נתונים מספרית או מיוצגים על ישר המספרים. משימות אלו מופיעות באופן עקבי בתוכנית הלימודים החדשה במתמטיקה (2025), בהערכות ארציות כמו מבחני המיצ"ב (הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך) ובספרי לימוד לכיתה ה' (שבילים פלוס, 2018), כפי שמודגם בטבלה 1. הופעה חוזרת זו מדגישה את מרכזיותו של רעיון ה"בין" (betweenness) בהבנת המספרים הרציונליים, ואת הקשר שלו לרעיונות יסוד כמו סדר, שקילות וצפיפות. שוורץ (1996) מדגיש כי הבנה מושגית של מספרים אינה מתפתחת רק מחזרה על פרוצדורות חישוביות, אלא מעיסוק ישיר ברעיונות כמו סדר, אומדן ומשמעות הכמות (Schwartz, 1996). בהקשר של שברים, הוא מציין כי תלמידים יכולים להשקיע זמן רב בלימוד פרוצדורות כמו מציאת מכנה משותף, ועדיין להתקשות במשימה בסיסית יותר מבחינה מושגית: להציע שבר שערכו נמצא בין שני שברים נתונים. לכן, משימות אלו מאפשרות למורה לבדוק תוך כדי הערכת תוצאות תרגול, האם התלמיד מבין את השבר כמספר שניתן להשוות, למקם ולאמוד את ערכו ביחס לשברים אחרים.



טבלה 1

דוגמאות למשימות של מציאת שבר בין שני שברים

1. א. לפניכם חלק מישר מספרים המחולק לחמישה קטעים שווים.



תנו דוגמה לשני מספרים שיכולים להיות על הקטע המסומן באדום ודוגמה לשני מספרים שיכולים להיות על הקטע המסומן בכחול.

ב. יעל טוענת שבין שני השברים $\frac{1}{2}$ ו־$\frac{3}{4}$ יש רק שבר אחד $\frac{2}{3}$. הסבירו מדוע יעל טועה (תוכנית הלימודים החדשה במתמטיקה, 2025).

2. כתבו שבר כלשהו הנמצא בין השבר $\frac{3}{4}$ לשבר $\frac{4}{5}$ (מיצ"ב 2014/2013).

3. לפניכם ישר מספרים (מיצ"ב 2015/2016):



איזה מספר מבין המספרים שלפניכם נמצא בקטע המודגש על ישר המספרים?

1 ☐ $\frac{6}{7}$ 2 ☐ $\frac{7}{8}$ 3 ☐ $\frac{9}{10}$ 4 ☐ $\frac{12}{11}$

4. לפניכם ריבוע שצלעותיו מודגשות (מיצ"ב 2019/2009)

חלק משטח הריבוע צבוע באפור. סמנו את המשפט הנכון.



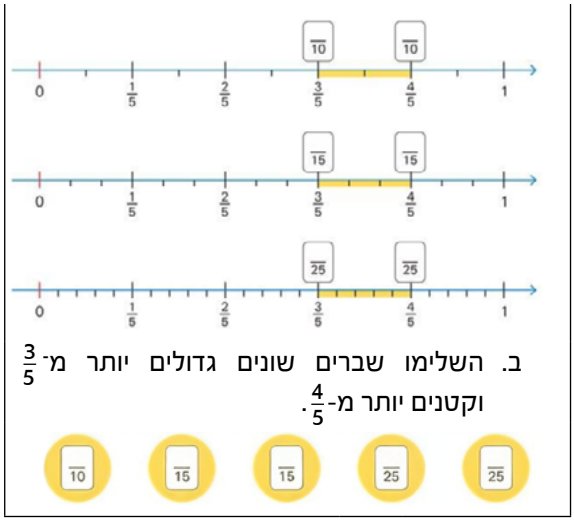
1 ☐ השטח האפור קטן מ־$\frac{1}{4}$ שטח הריבוע.

2 ☐ השטח האפור גדול מ־$\frac{1}{4}$ שטח הריבוע וקטן מ־$\frac{1}{3}$ שטח הריבוע.

3 ☐ השטח האפור גדול מ־$\frac{1}{3}$ שטח הריבוע וקטן מ־$\frac{1}{2}$ שטח הריבוע.

4 ☐ השטח האפור גדול מ־$\frac{1}{2}$ שטח הריבוע.

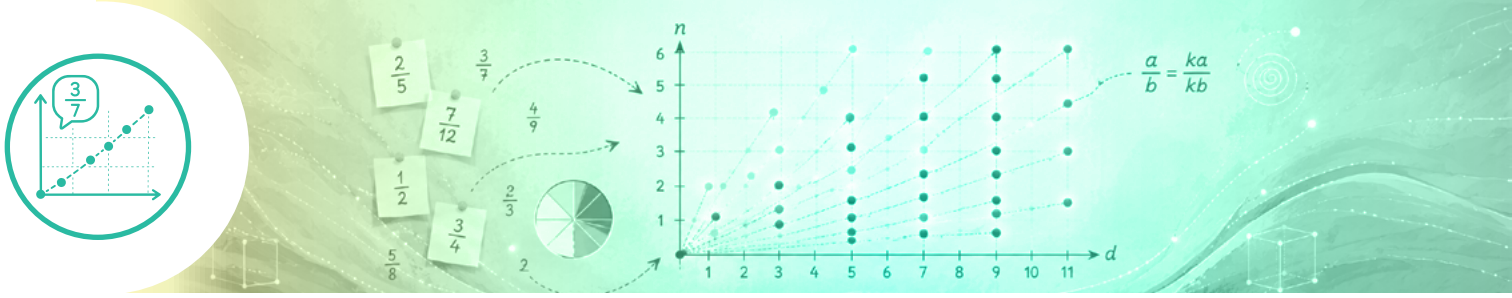
5. א. בכל אחד מהישרים השלימו את השברים השווים ל־$\frac{3}{5}$ ו־$\frac{4}{5}$ (שבילים פלוס לכיתה ה'):



ב. השלימו שברים שונים גדולים יותר מ־$\frac{3}{5}$ וקטנים יותר מ־$\frac{4}{5}$.

בשאלה מן הסוג "כתבו שבר כלשהו הנמצא בין $\frac{1}{3}$ ל־$\frac{3}{5}$", תלמיד עשוי לענות $\frac{2}{4}$. בשאלה אחרת, שבה הוא מתבקש למצוא שבר בין $\frac{1}{5}$ ל־$\frac{2}{5}$, תלמיד אחר עשוי לענות $\frac{2}{6}$. בשני המקרים התשובה עונה על דרישות השאלה, אך מתוך תשובה בודדת קשה לדעת מה עמד מאחוריה: האם התלמיד התייחס לשבר כמספר בעל ערך? האם פירש את המילה "בין" דרך המונים והמכנים של השברים הנתונים? או האם פעל לפי אסטרטגיה אחרת?

לעומת זאת, כאשר מבקשים מן התלמיד ליצור כמה שברים בין שני שברים נתונים, כמו במשימה של מאמר זה שניסוחה הוא: "כתבו חמישה שברים בין שני השברים הנתונים", אוסף התשובות יכול לחשוף דפוסים, הכללות ואסטרטגיות נכונות ושגויות כאחד (Yerushalmy & Olsher, 2020). מחקרים הראו כי הצגת דוגמאות מרובות יחד עשויה לחשוף דפוסים שאינם ניכרים בדוגמה יחידה, וכי המשך הפקת הדוגמאות עשוי להביא לידי ביטוי דרכי חשיבה וקשרים המתגלים רק בשלבים מאוחרים יותר של הרצף (Leung & Lee, 2013; Olsher, Yerushalmy & Chazan, 2016; Yerushalmy, Olsher, Harel & Chazan, 2023). כך למשל, התשובה $\frac{2}{4}$ יכולה להיראות כתשובה נכונה בודדת, אך כאשר היא מופיעה יחד עם תשובות נוספות כמו ($\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$), ניתן לראות שהתלמיד בחר שברים שמוניהם ומכניהם נמצאים בין המונים והמכנים של שברי העוגן או שווים להם. כלומר, ייתכן שהתלמיד פירש את הדרישה "בין" כהשוואה בין רכיבי השבר, ולא



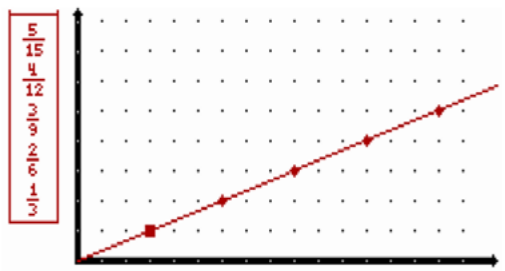
כהשוואה בין ערכי השברים.

באופן דומה, התשובה $\frac{2}{6}$ יכולה להיראות כתשובה נכונה כאשר בודקים אותה לבדה. אולם כאשר מתבוננים בה כחלק מאוסף תשובות כמו ($\frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \frac{5}{9}, \frac{6}{10}$), ניתן לזהות שהתלמיד הפעיל כלל עקבי של הוספת אותו מספר למונה ולמכנה של אחד משברי העוגן ($\frac{1}{5}$). במקרה כזה, אוסף התשובות אינו משמש רק לבדיקה של נכון או לא נכון, אלא הופך לכלי לזיהוי דרך הפעולה שעמדה מאחורי הבחירה. רעיון זה מתחבר להצעתו של שוורץ (Schwartz, 2018), שלפיה יש ערך רב במשימות שאינן מסתיימות בתשובה נכונה אחת בלבד. במשימות כאלה תלמידים נדרשים להציע דוגמאות, להשוות ביניהן ולהצדיק מדוע הן עומדות בתנאי המשימה. בהקשר של מציאת שברים בין שני שברים, ריבוי התשובות האפשריות יוצר צורך בכלי שיאפשר למורה לארגן את מרחב התשובות, לזהות דפוסים, ולדון עם התלמידים במשמעות המתמטית של הבחירות שלהם.

במאמר זה אנו מציעים דרך "לראות" את הדפוסים האלה באמצעות ייצוג קרטזי של שברים (איור 1). בייצוג זה כל שבר מיוצג כנקודה במישור: המכנה מיוצג על הציר האופקי, והמונה על הציר האנכי. כאשר מציבים במישור את כל השברים שתלמיד הציע, מתקבלת תמונה שיש בה מידע על אסטרטגיית העבודה שלו.

איור 1

השקילות של $\frac{1}{3}$ לפי המאמר של ארנון ואחרים (2001)



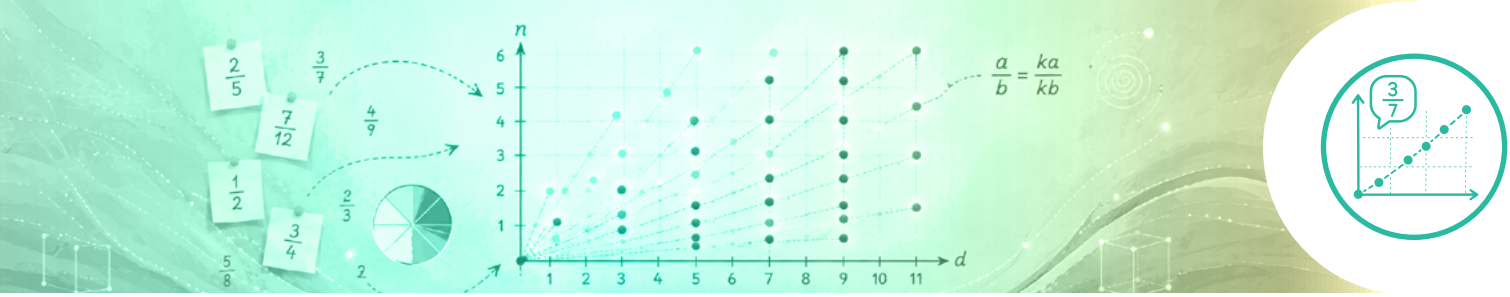
מאמר זה נכתב לזכרה של פרלה נשר ומתוך דיאלוג עם רעיונותיה. נשר ראתה בהוראת מתמטיקה לא רק הקניית כללים ופרוצדורות, אלא הזדמנות להבין כיצד תלמידים חושבים וכיצד ייצוגים מתמטיים יכולים לחשוף מבנים מושגיים (Nesher, 1989). בעבודתה על שברים, ובפרט בייצוג הקרטזי, הודגמה האפשרות להפוך רעיונות כמו שקילות, סדר וצפיפות לנראים עבור תלמידים ומורים כאחד (Arnon, Nesher, & Nirenburg, 2001). במאמר הנוכחי אנו מבקשים להרחיב מבט זה: לא רק להשתמש בייצוג הקרטזי ככלי הוראה לתלמידים, אלא גם ככלי דיאגנוסטי המאפשר למורים להתבונן באוסף התשובות של התלמידים מעבר לנכונותן, לזהות דרכי עבודה, אסטרטגיות והחשיבה המתמטית שלהם. בדרך זו אוסף תשובותיו של התלמיד, כפי שהוא מיוצג במישור הקרטזי, הופך לכלי עבודה בידי המורה. הייצוג משמש מפה חזותית של אסטרטגיות, קשיים והזדמנויות להוראה, ומסייע למורה להחליט מה כדאי לברר עם התלמידים ומה נכון ללמד או להעמיק בהמשך.

מתודולוגיה: כיצד נאספו הנתונים?

בפעילות השתתפו 47 תלמידים בכיתות ה'-ו'. התלמידים התבקשו לפתור שבע משימות, ובכל אחת מהן לכתוב חמישה שברים הנמצאים בין שני שברים נתונים. הבחירה לבקש חמישה שברים נועדה ליצור רצף רחב דיו לזיהוי אסטרטגיה או דפוס חוזר במרחב הדוגמאות האישי של התלמיד. חמישה שברים נבחרו כמספר מספק למטרה זו וכאיזון עם הזמן הכיתתי.

כדי לבחון כיצד אפשר לזהות דרכי עבודה ואסטרטגיות של תלמידים בשברים, פיתחנו סביבת עבודה דיגיטלית (יישומון) המבוססת על ייצוג קרטזי של שברים. בסביבה זו כל שבר שהתלמיד כותב מוצג כנקודה במישור: המכנה מיוצג על הציר האופקי והמונה מיוצג על הציר האנכי. כך, במקום לראות רק רשימה של שברים, אפשר לראות את מכלול התשובות של התלמיד כתמונה אחת. למשל באיור 2א שני שברי העוגן הם $\frac{3}{8}$ ו־$\frac{5}{8}$, וחמשת השברים שהתלמיד הציע כשברים בין שני השברים הנתונים הם: $\frac{7}{12}, \frac{5}{10}, \frac{5}{12}, \frac{3}{11}$ ו־$\frac{7}{8}$.

ביישומון קיימת אפשרות להזין שברים בצורה $\frac{a}{b}$, כך שכל שבר מוצג באופן מיידי כנקודה (a, b) במישור הקרטזי. עם זאת, במחקר הנוכחי בחרנו שהתלמידים יכתבו תחילה את תשובותיהם בנייר ועיפרון. בחירה זו נועדה, מצד אחד, לאפשר לנו לבחון את דרכי החשיבה והאסטרטגיות של התלמידים ללא השפעת ההמחשה

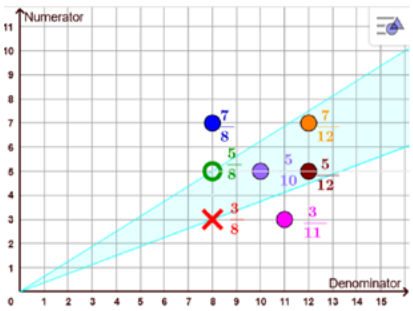


הגרפית, או המשוב המיידי של היישומון; וגם כדי, לשמר עדויות לתהליך עבודתם, כגון חישובים ורישומים שעשויים להעיד על הדרך שבה פעלו. לאחר איסוף הדפים הוזנו תשובותיו של כל תלמיד ליישומון על ידי החוקרים. כל שבר שהוזן הוצג כנקודה במישור הקרטזי, וכך נוצר עבור כל תלמיד מרחב דוגמאות חזותי, אוסף נקודות המייצג את השברים שבחר.

איורים 2א-2ג מדגימים שלושה מבטים אפשריים על תשובות תלמידים המאורגנות בייצוג הקרטזי. כל אחד מהמבטים מאפשר לבחון אם התשובות מתאימות לדרישת השאלה, ומן הארגון במישור ניתן ללמוד על דרך העבודה של התלמיד. כל נקודה (b, a) מייצגת שבר $\frac{a}{b}$. שני שברי העוגן מיוצגים על ידי X אדום (השבר הקטן) ועיגול ירוק (השבר הגדול). שאר הנקודות הן חמשת השברים שהתלמיד הציע כשברים בין שברי העוגן.

איור 2א

תחום התשובות הנכונות

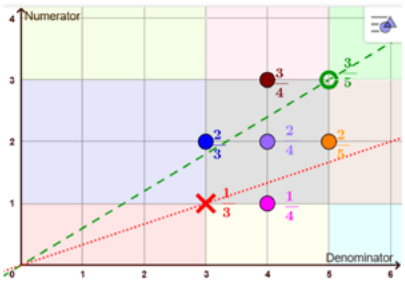


במבט הראשון קל לעקוב אחר הנכונות המתמטית של אוסף תשובות (איור 2א): בדקנו אם הנקודות המייצגות את השברים שניתנו כתשובות נמצאות באזור שבין שברי העוגן שנמצא בין שתי הקרניים היוצאות מראשית הצירים ועוברות דרך שברי העוגן, או מחוצה לו. מבט זה מאפשר לראות לא רק אם תשובה אחת נכונה או שגויה, אלא אם אוסף התשובות כולו נמצא בתוך תחום התשובות הנכונות או חורג ממנו.

המבט השני הוא על היחסים בין רכיבי השבר (איור 2ב): בחנו כיצד התלמידים בחרו את המונים והמכנים של השברים שלהם. הצבעים ברקע של האפלט מראים יחסים אלו. למשל, האם הם בחרו מונים ומכנים גדולים יותר מאלו של שברי העוגן, קטנים יותר, או כאלה שנמצאים ביניהם. מבט זה עוזר להבין האם התלמיד מתייחס לשבר כיחס בין מונה למכנה, או בעיקר לשני מספרים נפרדים כמו במספרים טבעיים. באיור 2ב מוצגים שני שברי עוגן $\frac{1}{3}$ ו-$\frac{3}{5}$. השברים שבחר התלמיד הם $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ ו-$\frac{2}{5}$. מן האיור ניתן לראות כי כל השברים הללו נמצאים בתוך המלבן האפור או על צלעותיו. ממצא זה עשוי להעיד כי בעת בחירת השברים שבין שני שברי העוגן, התלמיד הקפיד שלא לחרוג מטווח המונים והמכנים המופיעים בשברי העוגן.

איור 2ב

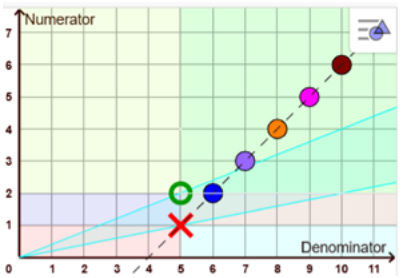
יחסים בין רכיבי השבר

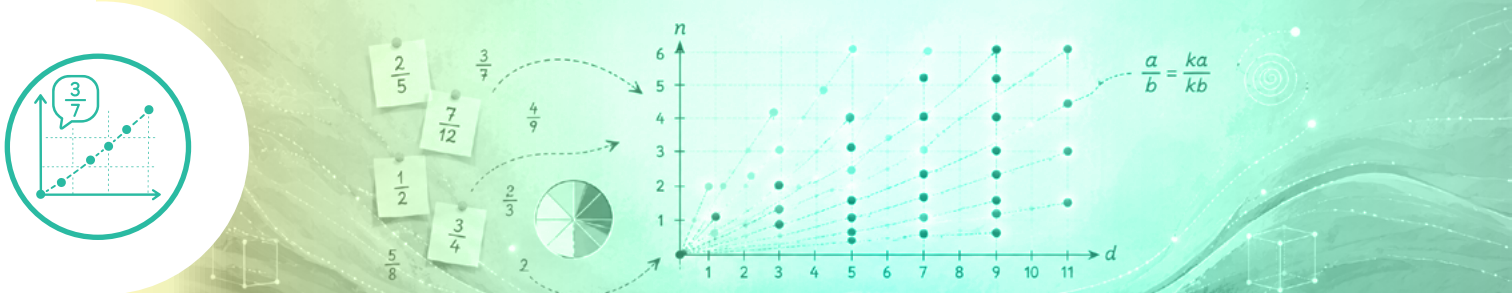


המבט השלישי היה תבניות חזותיות במישור (איור 2ג) שיכולות להעיד על דרכי עבודה ואסטרטגיות אצל התלמידים: חיפשנו דפוסים גיאומטריים בתשובות התלמידים שיכולים לרמוז על אסטרטגיות שונות. כגון קווים אלכסוניים (איור 2ג) שעשויים להעיד על תפיסות מוטעות כמו בדוגמה של הוספת מספר קבוע למונה ולמכנה של אחד משברי העוגן שראינו קודם.

איור 2ג

תבניות חזותיות במישור שיכולות להעיד על אסטרטגיות עבודה





באמצעות שילוב של שלושת המבטים, נכונות מתמטית, יחסים בין רכיבי השבר ותבניות חזותיות, ניתחנו את מרחבי הדוגמאות של התלמידים במטרה להבין את דפוס העבודה העומד מאחוריהן, ובכך להפוך את הייצוג הקרטזי ככלי דיאגנוסטי שיכול לשמש את המורה.

ממצאים: ניתוח אסטרטגיות עבודת התלמידים באמצעות דפוסים חזותיים

בחלק זה נציג דוגמאות מתוך עבודות תלמידים, ונראה כיצד הייצוג הקרטזי מאפשר לזהות אסטרטגיות, קשיים והזדמנויות להוראה מתוך מכלול הבחירות של התלמידים.

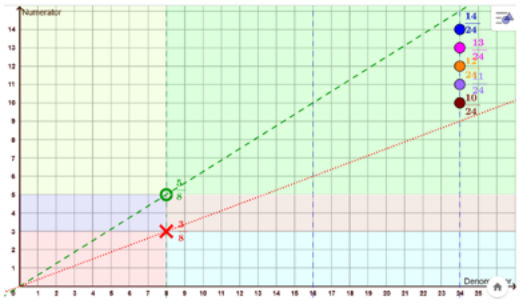
1. שימוש במכנה קבוע (איורים א3-ד3)

להלן דוגמאות להגשות שבהן תלמידים השתמשו במכנה קבוע. בכל הדוגמאות הנקודות מופיעות לאורך קו אנכי, משום שהמכנה נשאר קבוע. עם זאת, ההבדלים בין הדוגמאות מראים שלא כל שימוש במכנה קבוע מוביל לאותה דרך פעולה או לאותה רמת נכונות.

איורים א3-ד3 מדגימים שימוש במכנה קבוע או במכנה משותף כאשר השברים שבוחר התלמיד משתקפים כנקודות על קו או קווים אנכיים.

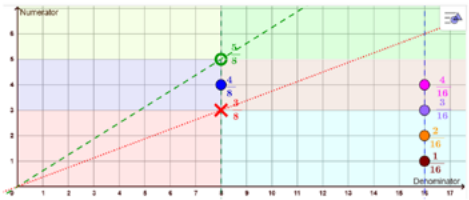
איור א3

הרחבה למכנה משותף עם מרווח מספיק בין המונים



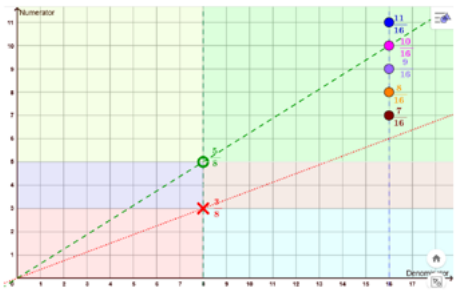
איור ב3

סדרה במונים המתחילה מ־1



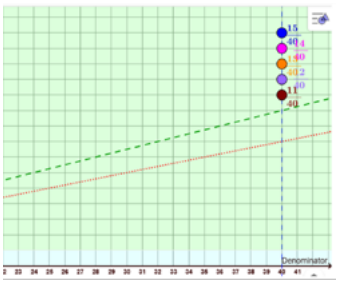
איור ג3

גלישה מחוץ לתחום השברים הנכונים



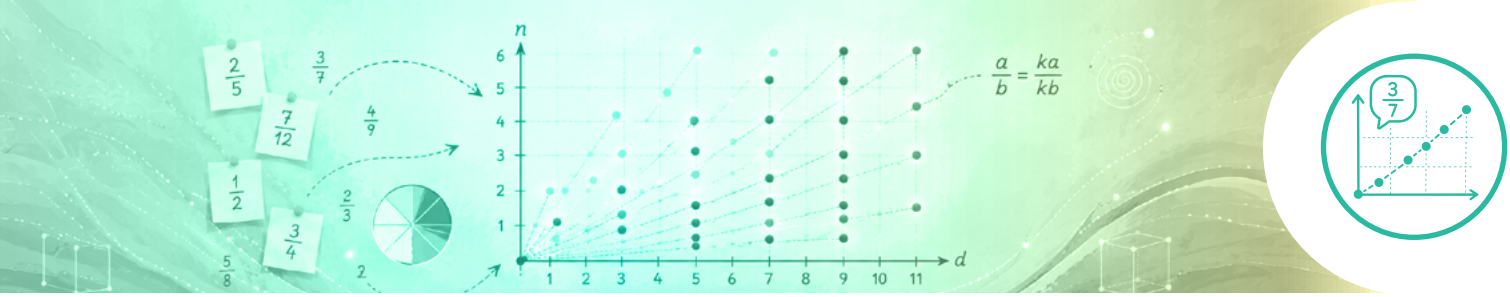
איור ד3

מציאת שבר שקול לשבר הגדול ובחירת השברים על ידי הגדלה סדרתית של המונה



במקרים רבים אפשר לזהות תלמידים המשתמשים במכנה משותף כדי למצוא שברים בין שני שברים נתונים. בייצוג הקרטזי, תשובות כאלה מופיעות כנקודות המסודרות לאורך קו אנכי, כלומר סביב אותו מכנה קבוע. לעיתים זהו המכנה המשותף של שני השברים הנתונים. דפוס זה מאפשר לזהות באופן מיידי שהתלמיד מארגן את הפתרונות שלו סביב מכנה משותף.

אסטרטגיה זו מבוססת בדרך כלל על הרחבת השברים הנתונים למכנה משותף, ולאחר מכן בחירת מונים



הנמצאים בין המונים שהתקבלו. כאשר המרווח בין המונים אלה גדול דיו, האסטרטגיה יכולה להוביל לסדרה של תשובות נכונות, כפי שניתן לראות באיור 3א.

עם זאת, איורים 3ב-3ד מראים גם שלא די בכך שהתלמיד משתמש באותו מכנה. אופן בחירת המונים חשוב לא פחות. בחלק מהמקרים התלמידים בוחרים מונים לפי סדרה קבועה, אך חלק מן השברים המתקבלים נמצאים מחוץ לתחום הפתרון, כפי שניתן לראות באיור 3ג. לעיתים הבחירה מתחילה במספר כמו 1 (איור 3ב), בלי קשר לגבולות המשימה, ולעיתים הבחירה נשענת על השבר הגדול יותר או על שבר שקול לו. כך, באיור 3ד, השבר השקול ל-$\frac{1}{4}$ הוא $\frac{10}{40}$, והתלמיד בחר את שבריו כסדרה עולה שבה המונים גדלים באחד בכל פעם, החל מן המונה של השבר השקול ל-$\frac{1}{4}$.

מה הדפוס מזמין מבחינה פדגוגית? כאשר תשובות התלמידים מסתדרות על קו אנכי, ניתן לשער שהם משתמשים במכנה קבוע או במכנה משותף. אולם הדפוס עצמו אינו מספיק כדי לדעת אם הבחירה מבוססת על הבנת ערך השבר, או על פעולה טכנית בלבד. לכן, השלב הבא בעבודת המורה הוא לברר כיצד נבחרו המונים, ואם התלמידים בודקים את ערך השברים ביחס לשברי העוגן.

התערבות אפשרית אחת היא לבקש מן התלמידים למצוא שברים נוספים בין שני שברי העוגן, אך הפעם בתנאי שלא כל השברים יהיו בעלי אותו מכנה. דרישה זו יכולה לעודד את התלמידים להרחיב את דרכי העבודה שלהם, ולבחון את ערך השבר גם מחוץ לפרוצדורה של מכנה משותף.

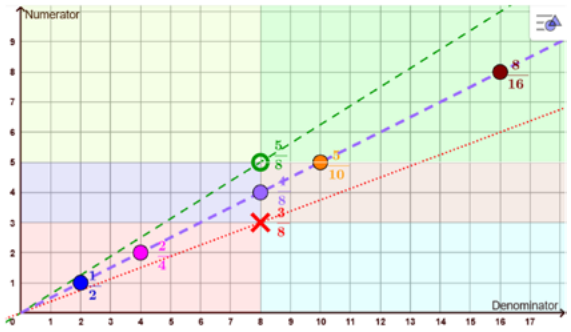
התערבות אפשרית נוספת היא להציג לכיתה כמה תשובות של תלמידים המשתמשים באותו מכנה, חלקן נכונות וחלקן שגויות, ולבקש מן התלמידים להסביר: איזו תשובה נמצאת באמת בין שני שברי העוגן? איזו תשובה חורגת מן התחום? דיון כזה יכול להדגיש שמכנה משותף הוא כלי מועיל, אך אינו מספיק כשלעצמו; יש לבחון גם את ערך השבר ואת מיקומו ביחס לשברי העוגן.

2. יצירת שברים שקולים (איורים 4א ו-4ב)

להלן דוגמאות להגשות שבהן התלמיד אינו יוצר שברים שונים, אלא וריאציות שונות של אותו ערך מספרי של השבר. דפוס זה משקף אסטרטגיה שבה התלמיד יוצר וריאציות של אותו שבר באמצעות הרחבה שיטתית של המונה והמכנה, או בחירת שברים שקולים לשבר ידוע כמו חצי או אחד. כך, למשל, התלמיד מצא את השבר $\frac{4}{8}$ בין שני שברי העוגן $\frac{3}{8}$ ו-$\frac{5}{8}$ ואז הוא בחר "בייצוגים שונים של השבר $\frac{4}{8}$" כפי שהוא כתב בכיתובים כהסבר לדרך העבודה שלו למציאת השברים. השברים שהוא בחר הם ($\frac{8}{16}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$) כפי שניתן לראות באיור 4א.

איור 4א

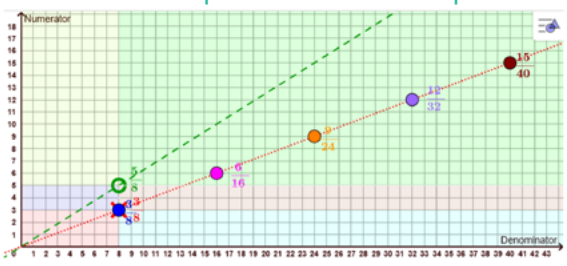
שברים שקולים לחצי



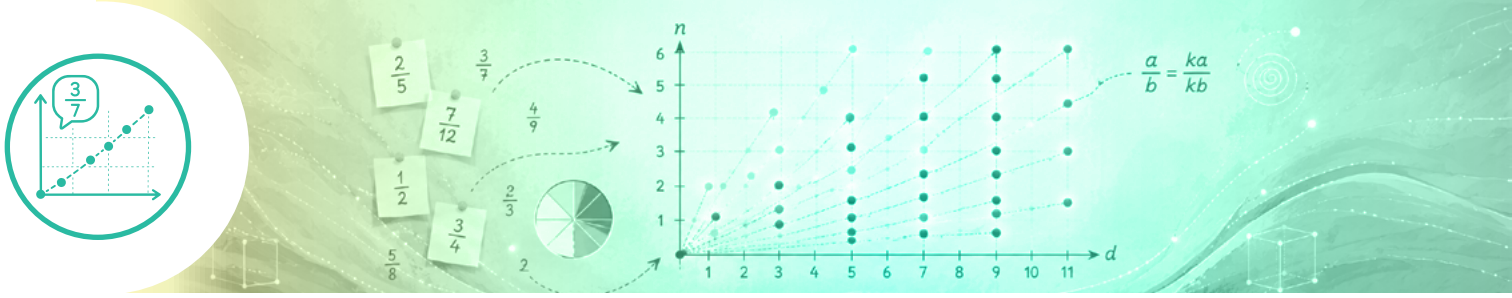
במקרים אחרים השברים נוצרים מתוך הרחבה של אחד משברי העוגן, מתוך הנחה כי שינוי המונה והמכנה יוצר שבר חדש בתחום הפתרון, כפי שניתן לראות באיור 4ב כאשר השברים $\frac{3}{8}$, $\frac{12}{32}$, $\frac{9}{24}$, $\frac{6}{16}$ ו-$\frac{15}{40}$ הם שברים שקולים לשבר העוגן הקטן יותר $\frac{3}{8}$. בכיתובים שלו, התלמיד הסביר את מציאת השברים בכפל המונה והמכנה של שבר העוגן הקטן באותו מספר (הרחבה).

איור 4ב

שברים שקולים לאחד משברי העוגן



הייצוג הקרטזי מאפשר לראות באופן מיידי שלמרות ריבוי התשובות, כל הנקודות מתכנסות לאותה קרן היוצאת



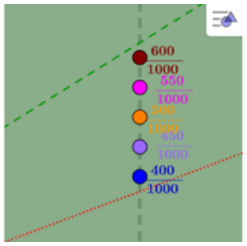
מראשית הצירים (אותו קו של שקילות).
מבחינה הוראתית, זהו הבדל חשוב: המורים יכולים להבחין בין תלמיד שמבין שיש אינסוף שברים שונים בין שני שברים, לבין תלמיד שחוזר על אותו שבר שוב ושוב בצורות שקולות.
מה הדפוס מזמין מבחינה פדגוגית? כאשר הנקודות מסתדרות על קרן אחת היוצאת מראשית הצירים, ניתן לשער שהתלמידים יוצרים שברים שקולים לאותו ערך. מבחינה פדגוגית, דפוס זה מזמין שיחה על ההבדל בין שברים הכתובים בצורות שונות לבין שברים שערכם שונה. המורים יכולים לשאול: האם השברים שכתבת שונים זה מזה? במה הם שונים? האם הם מייצגים ערכים שונים על ישר המספרים? פעילות המשך אפשרית היא לבקש מן התלמידים למצוא שברים נוספים בין שני שברי העוגן, אך הפעם לוודא שכל שבר מייצג ערך מספרי אחר.
אפשרות נוספת היא לתת לתלמידים אוסף של שברים שקולים ואוסף של שברים שונים הנמצאים בין אותם שני שברי עוגן, ולבקש מהם למיין: אילו שברים הם רק ייצוגים שונים של אותו מספר, ואילו שברים מייצגים ערכים שונים? פעילות כזו יכולה לחזק את ההבחנה בין שינוי בצורה הכתובה של השבר לבין שינוי בערך המספרי שלו.

3. הישענות על הייצוג העשרוני (איורים 5א ו־5ב)

להלן דוגמאות להגשות שבהן תלמידים השתמשו בייצוג עשרוני כדי למצוא שברים בין שני שברים נתונים. בייצוג הקרטזי, תשובות כאלה מופיעות כנקודות המסודרות לאורך קווים אנכיים (x=10, 100, 1000), משום שהתלמיד בוחר מכנים שהם חזקות של 10, כגון 100 או 1000. אסטרטגיה זו מבוססת על המרת השברים הנתונים לייצוג עשרוני, בחירת ערכים עשרוניים ביניהם, ולאחר מכן הצגתם מחדש כשברים. למשל, בין $\frac{3}{8}$ לבין $\frac{5}{8}$, תלמידים עשויים לבחור ערכים עשרוניים בין 0.375 ל־0.625 ולהציגם כשברים עם מכנה 100 או 1000. בכיתובים בנייר, אחד התלמידים הסביר את דרך העבודה שלו למציאת השברים: "הרחבתי את שני השברים למכנה 1000 על מנת לכתוב את השברים שביניהם". התלמיד בחר את השברים $\frac{600}{1000}, \frac{450}{1000}, \frac{400}{1000}, \frac{500}{1000}$ ו־$\frac{550}{1000}$. בייצוג הקרטזי זה מופיע כקו אנכי x=1000 כפי שניתן לראות באיור 5א.

איור 5א

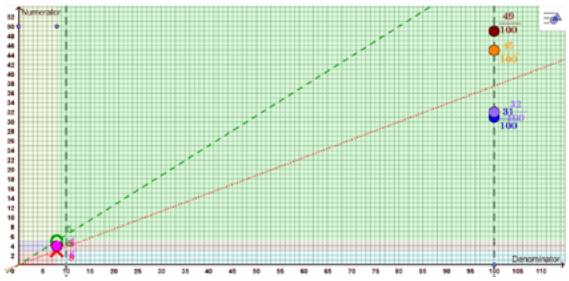
שברים עם מכנה 1000



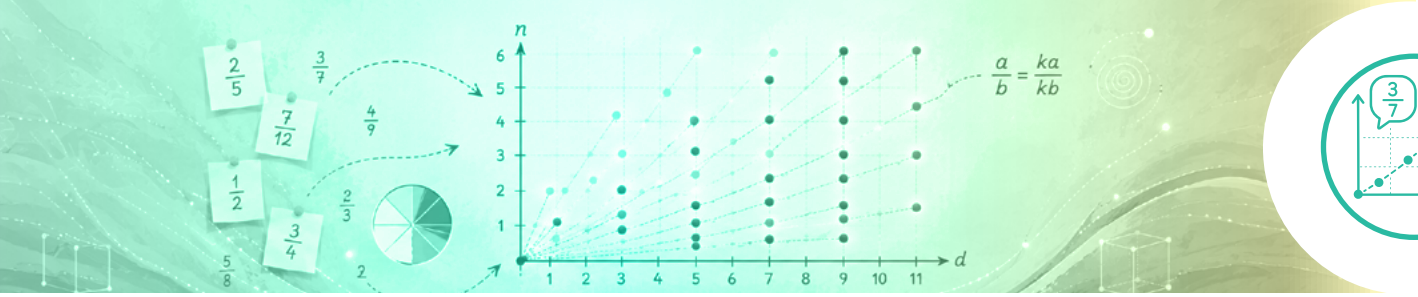
במקרים רבים זוהי אסטרטגיה יעילה, משום שהיא מאפשרת לתלמיד לזהות יחס של סדר בין השברים. בנוסף, הייצוג הקרטזי מאפשר גם לראות מתי ההמרה העשרונית אינה מדויקת. למשל, כאשר מתוך הכיתובים של אחד התלמידים ראינו שהוא ממיר את $\frac{3}{8}$ ל־0.30 ואת $\frac{5}{8}$ ל־0.50, ולאחר מכן הוא בחר את השברים $\frac{45}{100}, \frac{32}{100}$, ו־$\frac{4}{8}$. בייצוג הקרטזי חלק מן הנקודות מופיעות מחוץ לתחום הפתרון, כפי שניתן לראות באיור 5ב. בכך הייצוג הקרטזי מסייע למורה להבחין בין שימוש נכון בייצוג העשרוני לבין שימוש חלקי או שגוי, ולזהות כיצד בחירת הייצוג משפיעה על מיקום השברים ביחס לשברי העוגן.

איור 5ב

שברים עם מכנה 100 לאחר המרה לא מדויקת



מה הדפוס מזמין מבחינה פדגוגית? כאשר התשובות מופיעות סביב מכנים כמו 100 או 1000, ניתן לשער שהתלמידים נעזרים בייצוג עשרוני. דפוס זה מזמין את המורה לבדוק לא רק אם התלמידים יודעים להמיר שברים לעשרוניים, אלא אם הם משתמשים בהמרה כדי להבין סדר וערך. המורים יכולים לבקש מהתלמידים לייצג את שברי העוגן ואת השברים שבחרו בשלוש דרכים: כשברים, כמספרים עשרוניים ועל ישר המספרים. לאחר מכן הוא



יכול לבקש מהם להסביר כיצד כל ייצוג מאשר שהשברים נמצאים בין שני שברי העוגן, ולבחון מקרים שבהם ההמרה העשרונית מקורבת בלבד. פעילות זו נועדה לחזק את הקשר בין הייצוגים ולהעמיק את ההבנה של סדר וגודל, ולא להסתפק בביצוע טכני של המרה.

דיון והשלכות פדגוגיות: מה הכלי מאפשר למורה?

הדגמנו כיצד הייצוג הקרטזי יכול לסייע למורות ולמורים לראות את אוסף התשובות של תלמיד כתמונה אחת, ולא כרשימה של תשובות נפרדות. בכך הוא מאפשר לעבור מבדיקת תשובה בודדת לפירוש של דפוסי עבודה: לזהות אם תלמיד פועל לפי כלל עקבי, נשען על שברים שקולים, מתייחס למונה ולמכנה בנפרד, או מתקשה בהבנת סדר וצפיפות של שברים.

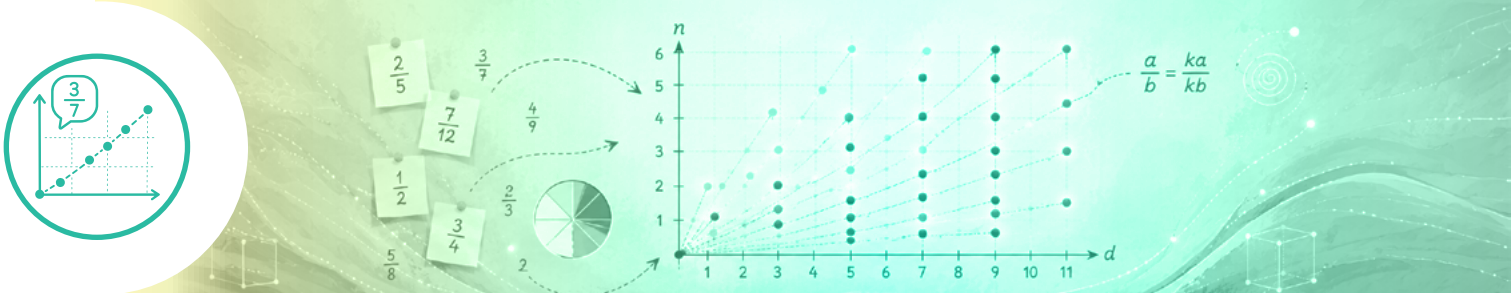
מנקודת מבט של הערכה מעצבת, מידע כזה יכול לשמש בסיס לשיח מתמטי עם תלמידים, לתכנון משימות המשך ולמתן משוב ממוקד יותר. במקום להסתפק באמירה "נכון" או "לא נכון", המורים יכולים לשאול: מה הדפוס שהתלמיד יצר? מה הוא מלמד על הבנתו? ואיזו התערבות יכולה לקדם אותו? במובן זה, הייצוג מציע למורה מסלול עבודה מעשי: זיהוי דפוס, ניסוח השערה דיאגנוסטית, בחירת שאלה מתאימה ותכנון התערבות כיתתית או משימת המשך. התרומה אינה רק בכך שהמורה רואה את התשובות באופן חזותי, אלא בכך שהראייה החזותית מסייעת לו לבחור את הצעד הפדגוגי הבא.

עם זאת, חשוב להיות זהירים וישרים בנוגע לאתגר שהייצוג מציב. הייצוג הקרטזי אינו ייצוג מוכר ושגרתי עבור רוב המורים, ובוודאי שאינו מובן מאליו בקריאה ראשונה. כמו כל ייצוג מתמטי חדש, גם כאן נדרש זמן כדי ללמוד כיצד לקרוא את המישור, כיצד לזהות דפוסים, וכיצד להבחין בין פרשנות מבוססת לבין השערה ראשונית. במובן זה, הייצוג אינו "קורא מחשבות" ואינו מאפשר לדעת בוודאות מה תלמיד חשב. לעיתים דפוסים שונים עשויים להיראות דומים על המסך, ולעיתים יש צורך בהסבר מילולי של התלמיד, או בשיח כיתתי כדי להבין את דרך הפעולה במלואה. לפיכך, הייצוג אינו מחליף את שיקול הדעת של המורה, אלא משמש כלי המסייע לנסח השערות דיאגנוסטיות המבוססות על דפוסי העבודה שנצפו, ולבדוק כיצד לעצב את ההוראה.

למרות האתגר, הערך של הייצוג טמון בכך שלאחר שמתרגלים לקרוא אותו, הוא יכול לחשוף מידע שקשה לראות בדרכים אחרות. הוא אינו מחליף ייצוגים מוכרים וחשובים של שברים, כמו ישר המספרים, מודלים של חלק־שלם או ייצוגים עשרוניים, אלא מוסיף נקודת מבט אבחונית נוספת. התרומה הייחודית שלו היא ביכולת להפוך מרחב של תשובות תלמידים למפה חזותית של אסטרטגיות, קשיים והזדמנויות להוראה.

לייצוג כזה עשויה להיות תרומה לא רק ברמת המורה הבודד בכיתה, אלא גם ברמה מערכתית רחבה יותר. במבחנים מערכתיים או בהערכות רחבות היקף, כמו מבחני מיצ"ב (תנופה) בישראל, או הערכות מחוזיות בארצות אחרות, בדרך כלל נאסף מידע על שיעורי הצלחה וכישלון. אולם מידע כזה אינו תמיד מסביר מה עומד מאחורי הקושי. ניתוח של דפוסי תשובות באמצעות ייצוג קרטזי יכול לספק למורים, לרכזי מקצוע, למדריכים ולמקבלי החלטות תמונה עשירה יותר: לא רק כמה תלמידים טעו, אלא אילו סוגי פעולה או אסטרטגיות הופיעו בקרב תלמידים וקבוצות שונות.

במובן זה, הייצוג הקרטזי ממשיך את הרעיון של שימוש בייצוגים מתמטיים מופשטים ככלים לחשיפת מבנים וקשרים. כאן ניתן לחזור לרעיונותיה של פרלה נשר, שראתה בייצוגים לא רק אמצעי להצגת תשובות, אלא דרך לאפשר לתלמידים ולמורים לראות יחסים מתמטיים. בדומה למערכת הבדידים, שבה ייצוג מוחשי מסייע לחשוף יחסים בין כמויות, הייצוג הקרטזי מציע דרך להפוך את מרחב התשובות של תלמידים לאובייקט שניתן להתבונן בו, לדון בו וללמוד ממנו. אפשרות זו אינה מוגבלת רק למשימות של מציאת שברים בין שני שברים. גם בנושאים נוספים הקשורים בשברים פשוטים, הייצוג הקרטזי עשוי לסייע בהמחשת קשרים מתמטיים ובחשיפת טעויות שכיחות. למשל, בהוראת חיבור וחיסור שברים ניתן להשתמש בייצוג כדי להראות מדוע חיבור המונים וחיבור המכנים, כגון הטעות הנפוצה של כתיבת $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$, אינו מייצג את פעולת החיבור, אלא יוצר שבר הנמצא בין שני השברים



הנתונים. באופן דומה, בהוראת כפל שברים ופעולות הפוכות, ניתן להראות כי מעבר משבר לשבר ההופכי שלו מתאים להחלפת המונה והמכנה, ולכן מיוצג במישור כהשתקפות של הנקודה ביחס לקו הסימטריה y=x.

תרומתו של הייצוג במאמר זה היא בכך, שהוא מאפשר למורה לראות מעבר לתשובה, ולזהות בתוך אוסף התשובות סימנים לפעולה מתמטית, לקושי מושגי ולהזדמנות להוראה. במובן זה, המאמר ממשיך את דרכה של נשר לא באמצעות חזרה על הייצוג הקרטזי כפי שהופיע בעבודתה, אלא באמצעות הרחבת תפקידו: מן הייצוג ככלי להבניית מושגים מתמטיים אצל תלמידים, אל הייצוג ככלי פרשני ודיאגנוסטי בעבודת המורה.

אחת האפשרויות העולות מממצאי מחקר זה היא שילובו של הייצוג הקרטזי במערכות הערכה ממוחשבות, כדוגמת STEP. בעוד שהמאמר הנוכחי התמקד ביכולתו של הייצוג לשמש כלי דיאגנוסטי למורה, שילובו במערכת הערכה ממוחשבת עשוי להרחיב את השימוש בו. בסביבה כזו כל תלמיד יכול לקבל משוב מיידי על תשובותיו, ובה בעת יכולה המערכת להציג למורה תמונה מצטברת ומתעדכנת של אסטרטגיות ודרכי העבודה של כלל תלמידי הכיתה. תמונה זו עשויה לאפשר למורה לזהות בזמן אמת דפוסים חוזרים, קשיים משותפים או דרכי פעולה בלתי צפויות, ולהתאים בהתאם את השיח הכיתתי, את משימות ההמשך ואת ההתערבות הפדגוגית. בכך ניתן להרחיב את השימוש בייצוג הקרטזי מתהליך של ניתוח בדיעבד לכלי התומך בהערכה מעצבת במהלך ההוראה עצמה.

ביבליוגרפיה

- הרשות הארצית למדידה והערכה בחינוך. *מבחנים וסקרים*. ראמ"ה. https://rama.gov.il/assessments
- משרד החינוך (2025). *תוכנית הלימודים במתמטיקה ליסודי*. פורטל עובדי הוראה - המרחב הפדגוגי. https://pop.education.gov.il/tchumey_daat/matmatika/yesodi/oraat-math/tohnit-limudim
- המרכז לטכנולוגיה חינוכית (2018). *שבילים פלוס לכיתה ה': מארז חוברות*. המרכז לטכנולוגיה חינוכית.
- Arnon, I., Nesher, P., & Nirenburg, R. (2001). Where do Fractions Encounter their Equivalents? Can this Encounter Take Place in Elementary-School?. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(2), 167–214. https://doi.org/10.1023/A:1017998922475
- Leung, A., & Lee, A. M. S. (2013). Students' geometrical perception on a task-based dynamic geometry platform. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 361–377. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9433-7
- Nesher, P. (1989). Microworlds in mathematical education: A pedagogical realism. In L. B. Resnick (Ed.), *Knowing, learning, and instruction: Essays in honor of Robert Glaser* (pp. 187–215). Lawrence Erlbaum Associates.
- Olsher, S., Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2016). *How Might the Use of Technology in Formative Assessment Support Changes in Mathematics Teaching?* For the Learning of Mathematics, *36*(3), 11–18.
- Schwartz, J. L. (2018, December 1). *A physicist's lament*. AMS Blogs: On Teaching and Learning Mathematics.
- Schwartz, J. L. (1996). *Semantic aspects of quantity* [Unfinished draft]. https://www.researchgate.net/publication/242313499_Semantic_Aspects_of_Quantity
- Yerushalmy, M. & Olsher, S. (2020). Online assessment of students' reasoning when solving example-eliciting tasks: Using conjunction and disjunction to increase the power of examples. *ZDM - Mathematics Education, 52*, 1033–1049. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01134-0
- Yerushalmy, M., Olsher, S., Harel, R., & Chazan, D. (2023). Supporting inquiry learning: An intellectual mirror that describes what it "sees." *Digital Experiences in Mathematics Education, 9*, 315–342.