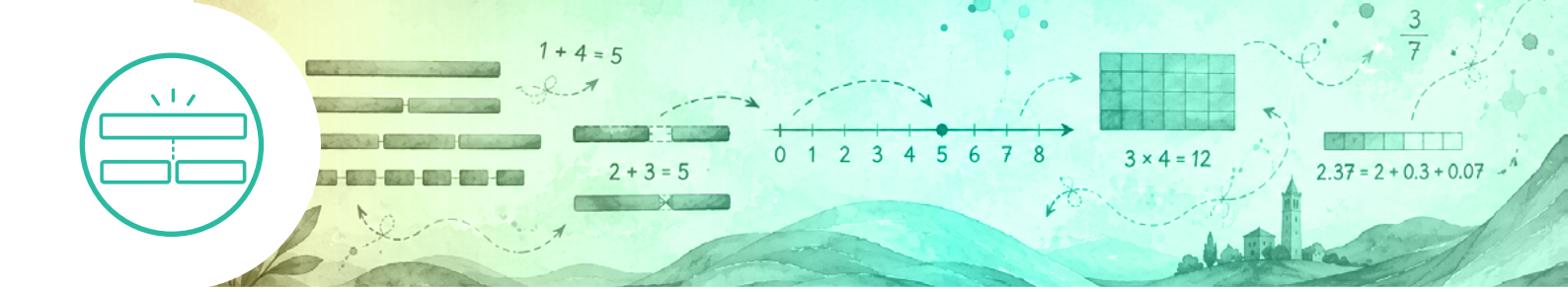


מודלים, גישה תבניתית וחשיבה מבנית

פרופ' איליה סיניצקי

ראש החוג לתואר שני בהוראת המתמטיקה

האקדמית גורדון



מודלים, גישה תבניתית וחשיבה מבנית

איליה סיניצקי

הערה: פרופ׳ פרלה נשר ז"ל הלכה לעולמה בין היציאות לאור של שני גיליונות כתב העת "מספר חזק 2000" שבו מפורסמים שני החלקים של מאמרִי העוסק **בעקרונות ליבה של מתמטיקה בגיל הצעיר**. הסוגיה של רכישת מושגים מתמטיים בקרב ילדים הייתה לב ליבה של העשייה המדעית והמעשית של פרלה, ולא במקרה לחלק מתוכן כתבה זו קשר ישיר עם המאמר המוזכר. מקווה כי הקוראים יקבלו כפילות זו בהבנה.

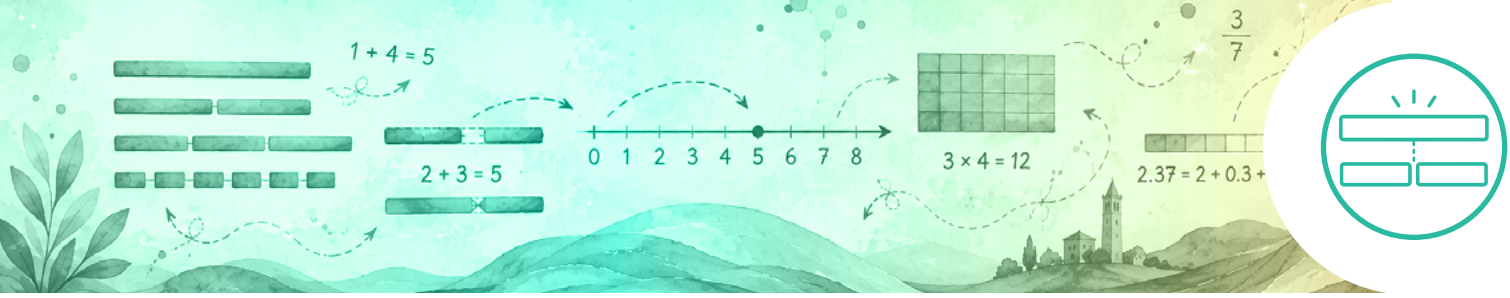
על המודלים המתמטיים והדידקטיים

אין פלא כי קיימים דיונים ואף ויכוחים סביב דרכים וכלים להבניית ידע מתמטי משמעותי של הלומד. מתמטיקה כמקצוע לימוד מהווה אתגר הוראתי מסיבה פשוטה: קיים פער בין **המבנה הדדוקטיבי** של גוף הידע המתמטי לבין **דרכים אינדוקטיביות ואינטואיטיביות** להבניית ידע זה אצל כל לומד (Fishbein, 1983). הידע המתמטי עצמו התפתח (ומתפתח) בהשראה מתמדת, הן מהצרכים המעשיים, והן מהצרכים ה"טרנסצנדנטליים". המענה לשאלות מסוג "כיצד?" מספק, למשל, אלגוריתמים חישוביים, ובד בבד ניסוח השאלות "למה?" מזמן חיפוש אחרי תובנות מעמיקות עבור סיבתיות ומבנה, עד למבנה העולם (כמו התאוריה של ארבעה יסודות העולם של הפילוסופים של יוון הקדומה). גם לצורך תיאור המציאות, וגם ל־"תכנון העולם", מתמטיקאים משתמשים בפירוש **במודלים** מסוגים שונים. מודל, כידוע, הוא ייצוג של אובייקט, תופעה או מערכת שמטרתו לחקות את ההיבטים המהותיים. גיוון המודלים הוא רחב, מקונקרטיים עד למופשטים מאוד, ותמיד קיימת שאלה אילו מאפיינים של האובייקט מבטא המודל, ומאילו הוא ממש מתעלם.

מושג המודל עולה במתמטיקה בשלושה היבטים שונים לכל הפחות:

- מאחר שלמושגי היסוד במתמטיקה מקורות בעולם הממשי, היא מודל המציאות. נציין, כי טענה זו נשמעת מובנת מאליה, אך בתולדות הפילוסופיה קיימות תאוריות הטוענות בעצם את ההפך: המציאות היא המודל של העולם המתמטי האידיאלי; מודלים מתמטיים מתארים תופעות אחדות בעולם הממשי, ולעיתים קרובות אותו מודל מספק תשובה לבעיות הנראות רחוקות זו מזו. כך, למשל, ידוע כי הצגות השבר "חצי" כסכום של שני שברי יחידה (שברים בעלי מונה 1) מתארות את כל אפשרויות הריצוף המישורי בעזרת מצולעים משוכללים (הריצופים הם בעזרת משולשים, ריבועים ומשושים). אגב, פחות ידוע, כי בעיית חיפוש אחרי זוגות שברי יחידה שסכומם גדול מחצי מספקת גילוי של כל חמשת הפאונים המשוכללים. מתמטיקאים נוהגים "לחסוך בחשיבה" ולהשתמש "באותה שפה (אותו מודל) להכול" (Cuoco, Goldenberg & Mark,1996).
- מתמטיקאים משתמשים במודלים שונים לתיאור אותו אובייקט מתמטי או תופעה מתמטית. למשל, אפשר להגדיר אליפסה כאחד מחתכי החרוט, כמקום גאומטרי במישור שבו לכל נקודה סכום מרחקים קבוע עד שתי הנקודות הנתונות, או כעקומה המתוארת על ידי משוואה עם שני משתנים במעלה שנייה, עם תנאי מסוים בין מקדמי המשתנים במשוואה זו. כאילו בניגוד לקודם, מתמטיקאים "מערבבים מספר שפות לתיאור אותה תופעה, ומשתמשים בנקודות מבט מרובות" (שם).
- באופן מפתיע, ההתפתחות הפנימית של המתמטיקה נותנת גם כלים לחקר עולמות מגוונים ואף משונים (לפי ברטראנד ראסל, "מתמטיקאים הם כמו חייטים שתופרים חליפות עבור כל העולמות האפשריים", כלומר הם יוצרים מסגרות לוגיות מוכנות מראש לכל יקום, ללא קשר לשאלה אם יקום זה אכן קיים).

בכל אחד מהמובנים, שימוש במודל אינו תהליך חילול התופעה אלא **כלי הפשטה** שמדגיש - לצורך זה או אחר - היבטים אחדים של התופעה, או האובייקט הנלמד. כך, למרות קיומנו במרחב תלת־ממדי, האובייקטים הגאומטריים סביבנו לא זהים לאובייקטים המושלמים



והמופתיים שבהם עוסקת גאומטריית המרחב. גם המושג הבסיסי ביותר של אריתמטיקה, מושג המספר, הוא בהחלט תוצאה של תהליך ההפשטה: המספר שלוש לא קיים בסביבתנו, אנחנו רואים רק את ייצוגיו השונים והמגוונים (למשל, קבוצות רבות בנות שלושה איברים). המושגים המתמטיים הם מופשטים באופיים, ובמובן זה המודלים **בהוראת מתמטיקה** אמורים "לפעול" בכיוון ההפוך, כלומר לסייע להבנת **אובייקטים מופשטים בעזרת כלים קונקרטיים**. תמיד קיים "מתח" בין מושג ודרך הצגתו, כי סוגיית בחירת הכלי היא מורכבת ולא מאפשרת תשובות חד־משמעיות. במקרים אחדים, מודל דידקטי "מנצל" את המודל המושרש כל כך בתוך המקצוע שאנחנו רואים ומציגים את המודל כחלק מהידע המתמטי ולא רק ככלי.

למשל, מודל של ישר המספרים משמש להצגת המספרים החל מהמספרים הטבעיים ועד למספרים הממשיים, שרק הם למעשה "ממלאים" את האובייקט. בשלבים הראשוניים של הלמידה, כאשר מדברים על המספרים הטבעיים (או רחב יותר, על המספרים השלמים) אין ללומד שום משמעות לגבי הקטעים בין הנקודות המבודדות המציגות את המספרים הידועים לו. יתרה מכך, גם המספרים הרציונליים, עם צפיפותם על ישר המספרים (כלומר קיום מספר רציונלי נוסף בין כל שני מספרים רציונליים שונים), לא מספקים "מילוי" של ישר המספרים. דוגמה זו מדגימה כי אפילו למודלים מקובלים ביותר קיימים לא רק יתרונות, והצגתם דורשת הבנה מעמיקה הרבה מעבר לצרכים המיידיים שבהם משתמשים בכלי זה.

רוב המודלים שבהם משתמשים ספרי לימוד ומורים בפועל הם בעצם "קביים דידקטיים", וכמו לכל **כלי דידקטי** יש להם יתרונות, מגבלות וחסרונות. שימוש בכל כלי דורש הבנה של תפקידיו: גם בכיתה עתירת טכנולוגיה אפשר להשתמש במחשב נייד כפטיש לנעיצת מסמרים... כלומר, במקרים רבים דווקא הדרכים והרגלי השימוש בכלי דידקטי הם הקובעים את גורלו כמסייע, לא מוצלח ואף מזיק ("גם המסמר לא נכנס, וגם המחשב נשבר").

מטרת השימוש במודלים היא ליעל תהליכי למידה. יש לזכור, כי בעת למידה נבנה אצל הלומד דימוי המושג, שכמובן לא זהה להגדרתו הפורמלית. דימוי זה קובע את דרכי הפעולה של הלומד ומשפיע על תובנותיו (Tall & Vinner, 1981). בכך, "הכוונות הטובות" לספק ללומד, במיוחד לתלמיד המתקשה, מודלים "פשוטים מאוד לשימוש" מזמנות טענות ריקות מתוכן ("אסור לחלק ב־0"), מונחים פסוודו־דידקטיים ("כפל במאונך") ו־"הסברים כאילו" ("כלל המשולש" ועוד), שהם בתורם גורמים להבניית דעות קדומות ולא נכונות (החל מ־"כפל תמיד מגדיל" ועד ל־"בשברים הכול הפוך").

על הגישה התבניתית

בשלבים הראשונים של למידה שיטתית של המקצוע תמיד קיימות דילמות של בחירת המודל המוביל. לגבי מושג המספר, ברור כי המאפיין המרכזי שלו הוא ערכו. הגישה הסביבתית מבססת תהליך היכרות עם המספרים הטבעיים ופעולות החשבון בקבוצת מספרים אלה על אנלוגיות ישירות עם עולם הילד: בגישה זו כל מספר טבעי הודגם בעזרת אינספור דוגמאות של קבוצות האובייקטים הבודדים, כולם בעלי אותה עוצמה (קבוצות עם אותו מספר האיברים). אולם אפשר לבצע עוד צעד, ולקשר בין ערך המספר לבין מאפיין מסוים של אובייקט אחר, למשל, לראות מספר טבעי כאורך קטע מסוים.

אפילו לקוראים לא ותיקים למדי בתחום הוראת מתמטיקה ברור כי מדובר על **הגישה התבניתית**, (או במונחים "עממיים", על מודל הבדידים) שעמדה בלב עשייתה של פרלה נשר. במודל זה "הבדיד" (תיבה בעלת בסיס ריבועי) מציג מספר כאורך (גובה של תיבה המונחת על הבסיס). השימוש בכלי הופסק בראש ובראשונה בגלל פרקטיקה של הבלטת התכונות המשניות של האובייקט ("בדיד בצבע אדום") במקום מאפיינו האימננטי - האורך (ספרד ופרל, 1995).

בתולדות המתמטיקה הבנת הערך **כאורך הקטע** מהדהדת את ה־"יסודות" של אוקלידס: בגישה זו, האובייקט קיים אם ורק אם הוא בר בנייה גאומטרית (כלומר, בנייה בעזרת סרגל ללא סימנים עליו ומחוגה). מבחינה זאת, מספר טבעי מתקבל בעזרת "העתקה" ("הכפלה") של אותו קטע יחידה על הקו הישר שבו

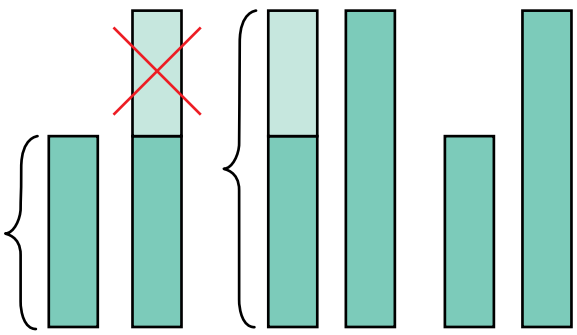


ממוקם קטע זה. בהמשך, בעזרת חלוקת קטע יחידה לחלקים שווים מוגדרים שברי יחידה, ואז גם המספרים הרציונליים. גישה זו לא הייתה ייחודית לארץ: קטע יחידה כבסיס להבניית מושג המספר בבית הספר היסודי שימשה ומשמשת, למשל, באסקולה של דוידוב בברית המועצות ואחר כך ברוסיה (Schmittau, 2005). חשוב לדעת, כי מאחורי גישה זו יש עיקרון מתמטי עמוק: ערך של מספר אפשר להגדיר כמרחקו מנקודה מסוימת - וכך בעצם לבנות את ישר המספרים, בהתחלה כ־"שנתות" במרחקי יחידה זה מזה, ובהמשך "למלא" אותו בהדרגה במספרים רציונליים וממשיים.

במודל זה אותן כמויות מוצגות בעזרת אותו אובייקט, קטע באורך מסוים, ובכך כמויות אלו שוות "לפי הגדרה". השוואת הערכים היא השוואת אורכים: כמות גדולה יותר מוצגת בעזרת קטע ארוך יותר. במילים אחרות, הרעיון של השוואה בא כאן לפני קביעת ערך המספר, ההשוואה היא לפני המדידה, ובכך היא אוניברסלית ולא תלויה בערכים הקונקרטיים שאותם מציגים הקטעים. גם כאשר קטע אחד ארוך יותר מאחר, אפשר להגיע לאורכים שווים. יש מספר אפשרויות לבצע זאת, אך ביניהן שתי דרכים בולטות: להשלים קטע קצר באורך מסוים בחלק "החסר"; לחלופין, אפשר גם להסיר קטע מקטע ארוך יותר, ובכך להגיע לקטע קצר יותר. חשוב כי הקטע "המיותר" או "המשלים" זהה בשני תהליכים אלה, (ראו איור 1).

איור 1

שני קטעים שונים ושתי דרכים להגיע לאורכים שווים מבלי לשנות אחד מהם: הארכת קטע קצר בקטע מסוים או הקטנת קטע ארוך באותו קטע (מסומנת התוצאה אחרי ההשוואה).

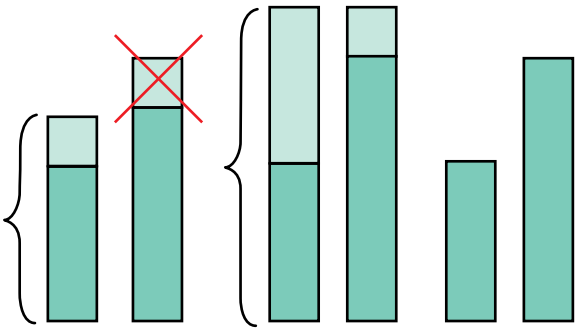


אגב, הצגה זו מזמנת דיון על אודות אפשרויות נוספות, כלומר הקטנה של קטע ארוך יותר עם הארכה של קטע קצר, או הארכה של שניהם (באורכים שונים כמובן) ועוד (ראו איור 2).

בנוסף, **המספר עצמו מורכב מחלקיו**, ואז כל קטע ניתן לחלוקה ("פיצול" ולאו דווקא חילוק) בדרכים רבות ומגוונות. כלומר, אותו מספר 5 אפשר להציג כסכום של חלקיו השונים, בשלב הראשון כסכומים 4+1, 3+2, 2+3, 1+4 (נציין כי חילופיות פעולת החיבור מומחשת כאן באופן טבעי). לאחר מכן נוספות עוד הצגות כשני סכומים שבהם אחד המחוברים הוא 0, וגם הצגות המספר כסכום של יותר משני מחוברים (דוגמת 3+1+1=5). בין חלוקות, "פיצולים" אלה של מספר, קיימות גם הצגות מיוחדות, שבהן כל המרכיבים שווים זה לזה, והצגות אלו מצביעות על חילוקו של מספר לחלקים שווים, וגם עולים כאן המושגים מחלק המספר וההתחלקות (לרבות חילוק ל־2 וזוגיות המספר).

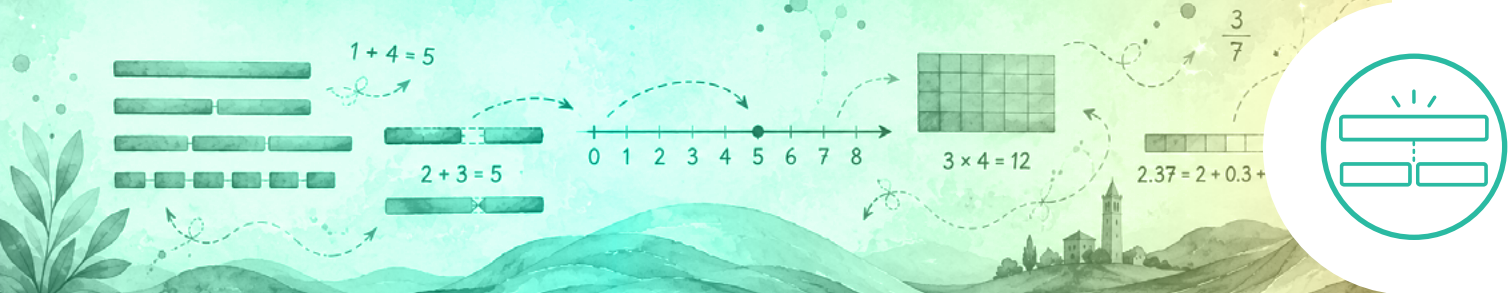
איור 2

דרכים "פחות שגרתיות" להשוות אורכי שני קטעים שונים (מסומנת התוצאה אחרי ההשוואה).



גישה זו, בשימושה המושכל, סוללת את הדרך לאינסוף הצגות של המספר כסכום זוגות מספרים רציונליים ואף ממשיים ה"משלימים" זה את זה. בכך, השלם מוצג בו־זמנית כאובייקט אחיד וכן כתוצר של הרכבת חלקיו השונים. תפיסה זו היא אבן יסוד בהבנת שימור הכמות ושימור הערך, הבסיס לכל העיסוק במתמטיקה.

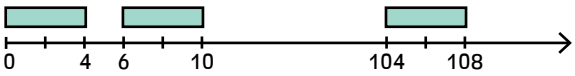
יתרה מכך, אורך הקטע נשמר ולא משתנה במהלך התזוזה. משום כך, המספר 4 אינו רק מייצג את



המרחק שבין 0 ל־4 על ישר המספרים, אלא משקף גם את המרחק הקבוע בין מספר בלתי מוגבל של זוגות מספרים, כגון המרחק בין 1 ל־5, בין 6 ל־10, בין 104 ל־108 ועוד. הבנה זו מעניקה פרשנות עמוקה למושג ההפרש, הנתפס כעת כמרחק שבין שני ערכים (הגדול והקטן) על פני ישר המספרים (ראו איור 3).

איור 3

אותו אורך כשימור הפרש בין הנקודות המציגות את המספרים על ישר המספרים.

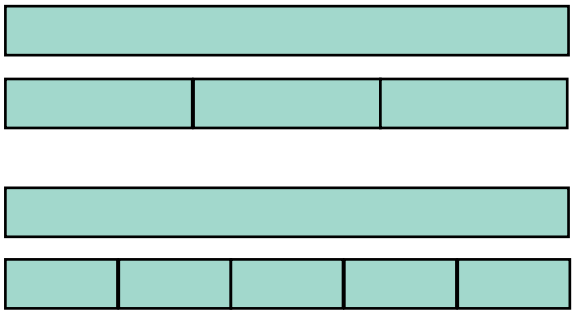


לאן זה מוביל? המשך לימודי אריתמטיקה

1. במודל הנדון, עשרה קטעי יחידה זהים ("המקלות הקצרים ביותר") מרכיבים את ה־"מקל הארוך ביותר" המייצג את 10, עשרת שלמה. אם נתייחס לקטע זה כעת כאל היחידה (נעשה ZOOM-OUT פי עשרה) הבניית שיטת ספירה פוזיציונית, שבה ערך הספרה תלוי במיקומה בכתיבת המספר הרב־ספרתי, מייד גוררת קביעת עשרה קטעים אלה כיחידה הבאה, גדולה עוד יותר (עשר עשרות, מאה) - וכך עוד ועוד, בעצם ללא הגבלה. זהו כמובן תהליך (שמתואר כאן באופן סכמתי ביותר) של הבניית המבנה העשרוני של המספר[1].
2. אולם אפשר גם "להפוך" תהליך זה: לראות לא רק את היחידה הגדולה מורכבת מהיחידות הקטנות הזהות באורך, אלא גם להביט על כל אחת מיחידות אלו כעל אוסף של קטעים זהים. גם לרעיון של חלוקת היחידה מקורות היסטוריים במתמטיקה יוונית. חלקים שווי אורך בחלוקת יחידה זו מציגים, כמובן, את שברי היחידה: שליש במקרה חלוקת היחידה לשלושה חלקים שווים באורכם, חמישית במקרה חלוקת היחידה לחמישה קטעים שווים וכדומה (ראו איור 4, שימו לב להשוואה הטבעית בין שליש וחמישית).

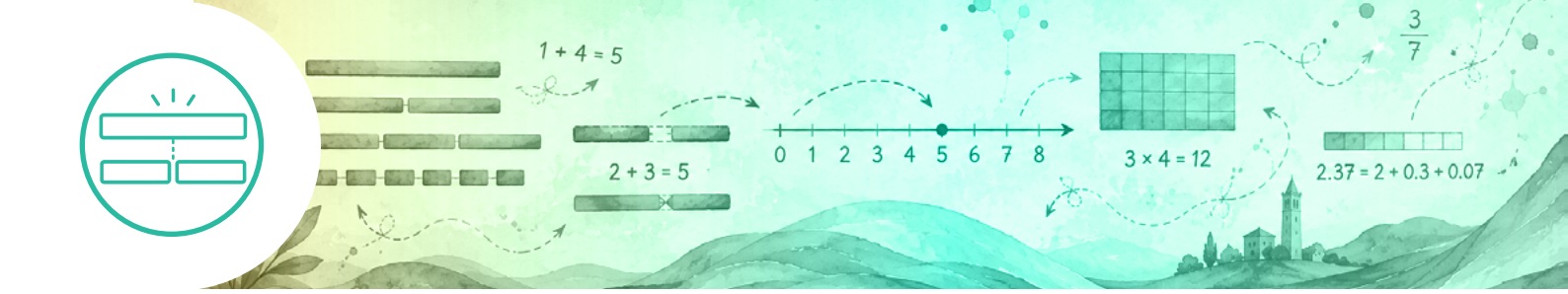
איור 4

הרכבת יחידה משלושה שברי יחידה זהים (למעלה) ומחמישה שברי יחידה זהים (למטה).



3. בנוסף, נציין כי "ZOOM-IN" באנלוגיה מלאה עם העברה מיחידות לעשרות ובהמשך למאות ובכלל לחזקות של 10 מזמן חלוקת יחידה בדיוק לעשרה חלקים שווים, וכל חלק הוא עשירית היחידה. בהמשך, חלוקה זו חוזרת שוב ושוב ליחידות קטנות וקטנות יותר. בכך, היא מספקת את הרחבת המבנה העשרוני לחלקי היחידה, כלומר למספרים רציונליים קטנים מאחד כמספרים עשרוניים עם הצגתם טבעית על ישר המספרים. אגב, רעיון ההיכרות עם מספרים עשרוניים והלמידה שלהם לפני שברים פשוטים אפשרי ומוצדק מבחינה מתמטית-דידקטית (מובשוביץ-הדר וסיניצקי, 2013).
4. "המקלות הצבעוניים" ממחישים לא רק אורכים שונים, אלא גם שטחים ואף נפחים: "מקל היחידה" הוא קובייה, ומקלות אחרים הם תיבות בעלות בסיס ריבועי בעל צלע באורך יחידה אחת. נציין כאן יישום דו־ממדי של המודל. כפל בקבוצת המספרים הטבעיים הוגדר כחיבור חוזר של מחוברים זהים, והמודל התבניתי מספק תובנה זו: שני "מקלות" באורך 3 "ממלאים" את הקטע באורך 6, אך אפשר לסדרם גם בצורה אחרת, אחד מעל השני (ראו איור

[1] נציין, אגב, כי הבחירה של "המקל הגדול" בדיוק פי עשרה ארוך ממקלות היחידה היא בעצם שרירותית מבחינה מתמטית, ומותאמת "רק" לבסיס 10 של מערכת הספירה שלנו (שמקורה כמובן אינו מתמטי אלא פיזיולוגי - עשר אצבעות על ידיו של בן אדם). מבחינה מתמטית, המודל מאפשר להציג את המערכות עם בסיס אחר.



5), ובכך מורכב מהם מלבן עם ממדים 3 על 2 (נזכיר "עובי" של יחידה אחת לכל מקל). גישה זו **מגדירה** את שטח המלבן ככמות היחידות המרכיבות אותו, והולכת יד ביד עם הצגת לוח הכפל של פיתגורס. מנקודת מבט פיתגוריאנית, כפל אינו רק פעולה - אלא יש לו משמעות גאומטרית, ולוח הכפל מדגיש זאת (לרבות חילופיות הכפל כ"הפיכת" המלבן, מקרים מיוחדים של ריבועים כמלבנים שווי צלעות ועוד).

איור 5

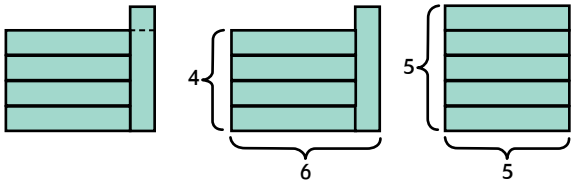
ממחוברים זהים למכפלת המספרים.



5. נדגים עוד, כי המודל המוחשי המוזכר מספק כלֵי **חקר של תכונות כפל** די מתקדמות. למשל, חמישה מקלות בגודל 5 המונחים זה מעל זה מרכיבים ריבוע ששטחו כמובן שווה ל־5×5=25 יחידות שטח. אם תלמיד "סתם משחק" ומעמיד את המקל ה־"עליון" של קונסטרוקציה זו ליד ארבעה אחרים, מתקבל כאן מבנה מורכב יותר - ומהו? הוא מורכב ממלבן שממדיו הם 4 (הורד גובהו ב־1) על 6 (נוספה לאורכו המקורי יחידה אחת), וגם מ־"צ'ופצ'יק", ריבוע יחידה (ראו איור 6). האם מדובר רק במשחק מצחיק? כלל לא: שטח הצורה כולה כמובן נשמר בהזזת המקל, ובכך שטח המלבן המתקבל קטן ב־1 משטח הריבוע המקורי. חשוב גם כן לציין כי למלבן זה, 6 על 4, היקף זהה להיקף הריבוע: הארכת צלע אחת מתלווה לקיצור צלע סמוכה באותו אורך. בשפת המספרים, ערך המכפלה 5×5 גדול ב־1 מערך המכפלה 4×6 בעלת אותו סכום הגורמים. כיווני החקר ברורים מכך: מה יקרה אם "נעמיד" רצועה נוספת (ובכך מעבר למלבן 3×7), והאם התוצאות המתקבלות תלויות בכלל בממדי הריבוע המקורי?

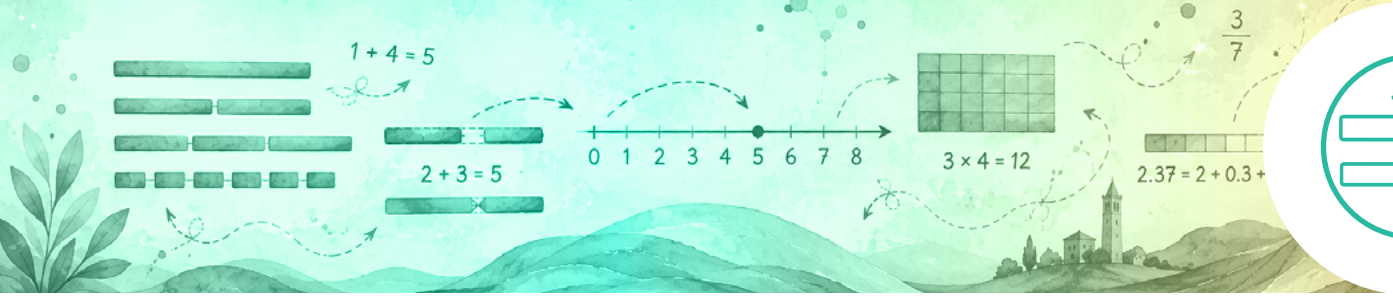
איור 6

יישום מודל הבדידים לחקר: השוואת שטחים בין מלבנים שווי היקף (פרטים בתוך המלל).



ובמבט כללי יותר

בסופם של דבריי לזכרה של פרלה נשר ברצוני לציין כי היא התמידה להציג את התמחותה דווקא בתחום השלבים הראשוניים של בניית ידע מתמטי. אך מעבר להשפעה "המיידית" על הלומד הצעיר, לגישה התבניתית שבה התמקדנו כאן קיימת גם תרומה לטווח הארוך בהמשך למידת המתמטיקה. לשיטה זו הדגשים אלגבריים ברורים: היא מבוססת על (ומפתחת את) יכולת **ההפשטה**, מזמנת ודוגלת ב**הכללות**. אך נראה כי ייחודיות הגישה בפיתוח יכולת לראות את הביטוי המתמטי כמשהו מובנה ושלם: 2+3 זאת אחת מההצגות של מספר, והוא גם סכום של שני מספרים, וגם אובייקט אחד. יכולת זאת, **חשיבה מבנית** (structure sense), היא מרכיב חשוב מאוד של חשיבה אלגברית מתקדמת (Hoch & Dreyfus, 2006). עם יכולת ראייה של מבנים סמויים, תלמידים, לדוגמה, מזהים סכום של מספרים זהים כמכפלה - ובהמשך אמורים להיעזר ביכולת זאת בכינוס איברים דומים ברב־איבר. הם אמורים לזהות את הביטויים $\frac{a+3}{a-1}$ ו־$\frac{a-1}{a+3}$ כזוג מספרים הופכיים, ולגלות מייד כי למשוואה $1-\frac{1}{n+2}=(1-\frac{1}{n+2})$ אין פתרונות (כאשר אפילו לא מוסיפים סוגריים להפרש בין שני האיברים הראשונים באגף שמאל של המשוואה). בהמשך, ראייה זאת מאפשרת לקבוע כי לאי־שוויון "מורכב מאוד" $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}<1$ בכלל אין מה לחפש פתרונות: סכום של שני מספרים אי־שליליים לא יכול להיות שלילי. נדמה, כי יכולות אלו "לפתור מבלי לבצע שום פעולה ו־"רק" לחשוב ולשקול" משמעותיות יותר מאשר שימוש בטכניקות פורמליות למיניהן.



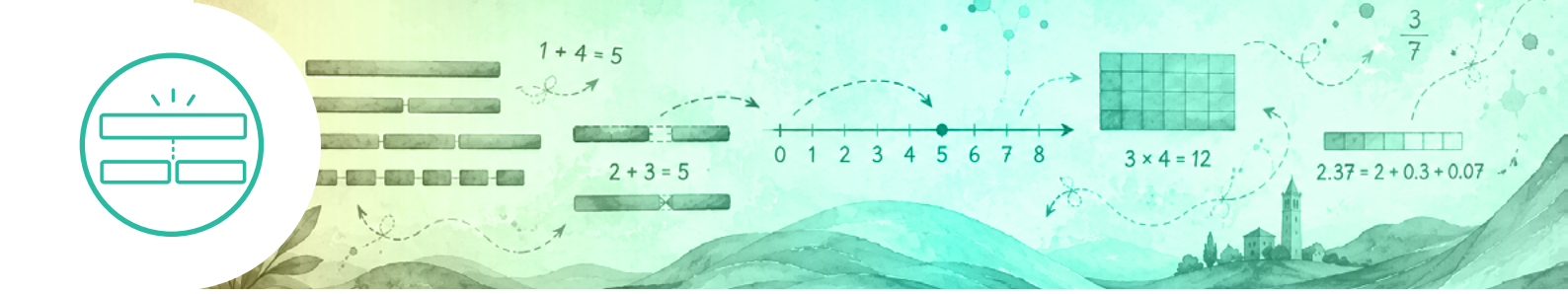
פעילותה של פרופ' פרלה נשר, עמיתיה ותלמידיה השפיעה ועוד תשפיע רבות על חקר בחינוך מתמטי, ועל עשייה הוראתית בארץ וגם בעולם.

יהי זכרה של פרלה ברוך.

ביבליוגרפיה

- מובשוביץ-הדר, נ' וסיניצקי, א' (2013). האם אפשר בלי שברים פשוטים? - לא, אבל... חלק א: העשרוניים כנתיב להבנת השבר הפשוט. *מספר חזק 2000, 24*, 21-28.
- ספרד, א' ופרל, ח' (1995). שיחה עם פרופ' פרלה נשר - המדענית הראשית של משרד החינוך. *על"ה - עלון למורי המתמטיקה, 16*, 1-9.
- Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375-402.
- Fishbein, E. (1983). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics, 3*(2), 9-18.
- Hoch, M., and Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Prague, Czech Republic: PME.
- Schmittau, J. (2005). The development of algebraic thinking: A Vygotskian perspective. *ZDM - Mathematics Education, 37*(1), 16-22.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151–169.




1 + 4 = 5
2 + 3 = 5
0 1 2 3 4 5 6 7 8
3 × 4 = 12
3/7
2.37 = 2 + 0.3 + 0.07


3×4=12
0 1 2 3 4 5
5=2+3
5=1+4