סיפורו של גלעד

נאוה אזהרי, מכללת תלפיות, מכללת סמינר הקיבוצים.

"חנוך לנער על פי דרכו, גם כי יזקין לא יסור ממנה"
(משלי, כ"ב)

הרעיון לכתיבת המאמר עלה לאחר שיעור במתמטיקה בו, בין השאר, צפיתי בתלמיד גלעד שהשתמש באלגוריתם שונה מזה שמשתמשים בו בדרך כלל, לפתרון מטלת כפל של מספר דו ספרתי במספר דו ספרתי.
במאמר זה אציג שימוש באלגוריתמים שונים לפתרון מטלה זו.

האלגוריתמים השונים יוצגו כדרך נוספת, אפשרית, להוראת הנושא, המאפשרת דיון מתמטי בנושא והעמקת ההבנה והידע בתחום, גם מבחינת המרכיב הפורמלי וגם מבחינת המרכיב האלגוריתמי של המטלה. על-ידי הצגת האלגוריתמים השונים, ויצירת דיון בנכונות כל אחד מהם, ניתן להעמיק את הבנת הנושא משמעות הכפל, הבנת המבנה העשורי והעמקת הביצוע האלגוריתמי.
מרקוביץ (2000) טוענת שהלמידה אינה יכולה להיות יעילה אם היא נעשית באמצעות "העברה" של ידע מהמורה לתלמיד. המורה אינו יכול להעביר את הידע הנמצא אצלו בראש לראשו של התלמיד; התלמיד לומד רק כאשר הוא בונה בעצמו את הידע שלו (הגישה הקונסטרוקטיביסטית); תפקיד המורה לעזור לתלמיד לבנות ידע זה. ידוע גם, שלא כל התלמידים לומדים ומבינים באותה דרך. לכן המורים מסבירים או פותרים בעיה לא רק בדרך אחת, אלא בכמה דרכים, כדי להגיע לכמה שיותר תלמידים. ידוע שתלמידים שונים מתמודדים עם משימות במתמטיקה בדרכים שונות, והמורים צריכים "להיכנס לראש של הילד" כדי להבין "איך מסתובבים הגלגלים אצלו בראש".

תירוש (1996) מציגה הסברים לחשיבות הצגת אלגוריתמים שונים לאותה הפעולה. בהוראה בכיתות קורה, שתלמיד המתקשה בהבנת האלגוריתם המוכר ובביצועו, יבין אלגוריתם אחר ויוכל להשתמש בו ביעילות. כמו כן, העיסוק באלגוריתמים חילופיים ובעיקר באלגוריתמים שבהם השתמשו במאות הקודמות, יכול להוות פעילות חקר לתלמידים ולהעשיר את ידיעותיהם לגבי התפתחות המתמטיקה.

האלגוריתמים השונים יוצגו בשלבים. ניתן להשתמש בדרך זו ליצירת דיון בנושא.

שלב א'

1. פתרו את תרגיל הכפל 16 x 35.
2. הסבירו (פרטו) את השלבים לפתרון התרגיל שלכם. בדרך כלל אנו פותרים את התרגיל במאונך בדרך הקצרה:

$$\begin{array}{rr} & {}^{3} \\ & 35 \\ \times & 16 \\ \hline & 210 \\ + & 35 \\ \hline & 560 \end{array}$$

נשאלת השאלה: מדוע פותרים כך? מדוע בכל שלב מזיזים את המספרים מקום אחד שמאלה? (מדוע יש את ה"מדרגות"?)

שלב ב'

1. גלעד פתר את תרגיל הכפל כך:

$$\begin{array}{rr} & {}^{3} \\ & 35 \\ \times & 16 \\ \hline & 80 \\ + & 48 \\ \hline & 560 \end{array}$$

2. האם הפתרון של גלעד נכון? הסבירו את תשובתכם.

שלב ג'

גלעד התבקש להסביר את פתרונו.

גלעד ענה: "אני כופל את המספר העליון עם המספר התחתון, כמו שאני עושה בחיבור וחיסור אז גם בכפל".
גלעד כופל את 35 במספר 16.

- גלעד, כופל את 5 ב-6 וב-1 עשרת (10) ומקבל 80, ולאחר מכן את 3 העשרות (30) ב-6 וב-1 עשרת (10) ומקבל 480. הוא אינו רושם את ספרת היחידות (אפס) מהמספר אך שומר את מיקומה ומחבר את המספרים.

1. האם דרכו של גלעד נכונה מתמטית?
2. מדוע משתמש גלעד בדרך זו?

■ דרכו של גלעד נכונה מתמטית. גלעד כופל את המספר העליון במספר התחתון. אנו נוהגים לכפול את המספר התחתון במספר העליון. כיוון שבכפל קיים חוק החילוף, ניתן להחליף את הגורמים. כלומר,

$$\begin{array}{r}16\\ \times\ \ \\ 35\\ \hline\end{array}\quad \text{שווה לתרגיל}\quad \begin{array}{r}35\\ \times\ \ \\ 16\\ \hline\end{array}$$

לכן אין זה משנה אם כופלים את הגורם האחד בשני או להפך.

■ דרכו של גלעד הגיונית מאוד. בכפל, בגלל קיום חוק החילוף, אין זה משנה אם מבצעים את הכפל של הגורם התחתון בגורם העליון או להפך – הגורם העליון בגורם התחתון. התלמידים לומדים תחילה את אלגוריתם החיבור והחיסור במאונך, ושני אלגוריתמים אלו נלמדים באופן בו מתחילים מהמספר העליון תמיד. לכן, הגיוני להמשיך באותה הדרך של ביצוע הפעולה מהמספר העליון למספר התחתון.

יש להדגיש, כי גם בחיבור קיים חוק החילוף וגם אז אין זה משנה אם מחברים את המספר העליון במספר התחתון או להפך, אך בחיסור הדבר שונה.

שלב ד'

כיצד ניתן להבין את הכפל?

כלומר, משמעות פעולת הכפל במספרים והבנת המבנה העשורי.

35 x 16 =

המבנה העשורי של המספר: =(30+5) x (10+6)=

חוק הפילוג המורחב: =30x10 + 30x6 + 5x10 + 5x6=

=300 + 180 + 50 + 30 = 560

כלומר, בכפל אנו כופלים את כל אחד מהאיברים במספר האחד עם כל אחד מהאיברים במספר השני (חוק הפילוג המורחב).

באותו האופן ניתן לפתור את התרגיל במאונך:

$$\begin{array}{rl}35 & \\ \times\ \ & \\ 16 & \\ \hline 30 & =6 \times 5\\ 180 & =6 \times 30\\ 50 & =10 \times 5\\ 300 & =10 \times 30\\ \hline 560 & \end{array}$$

ניתן להעמיק את ידע התלמידים לגבי משמעות והבנת המבנה העשורי של המספרים, לדון בחוק הפילוג המורחב, במשמעות הכפל, ולהראות את הקשר לכפל במאונך.

שלב ה'

כיצד אנו מחשבים בעל פה תרגיל זה?

$$35 \times 16 \begin{cases} 35 \times 10 = 350 \\ + \\ 35 \times 6 = 210 \\ \overline{\ 560} \end{cases}$$

במילים אחרות:

35 x 16=

המבנה העשורי של המספר: = 35 x (10 + 6) =

חוק הפילוג = 35 x 10 + 35 x 6 =

350 + 210 =560

כלומר, כשאנו פותרים תרגיל כפל בעל פה אנו, למעשה, מפלגים את אחד הגורמים (המספרים) למבנה העשורי המפורש שלו וכופלים כל אחד מאיבריו עם הגורם השני (משתמשים בחוק הפילוג).

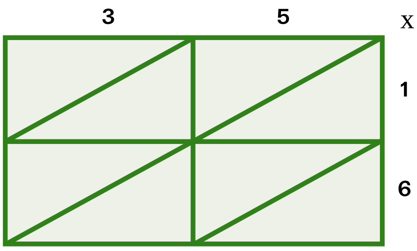
הכפל במאונך של אלגוריתם זה יראה כך:

$$\begin{array}{rl}35 & \\ \times\ \ & \\ 16 & \\ \hline 210 & = 6 \times 35\\ 350 & = 10 \times 35\\ \hline 560 & \end{array}$$

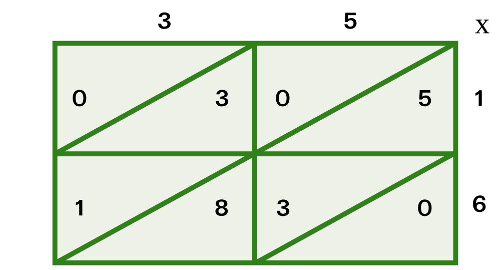
אלגוריתם זה הוא האלגוריתם שהשתמשנו בשלב א', למעט שינוי אחד של רישום כל המספרים בחישוב (למשל, רישום המספר 350) ולא רישום מקוצר (ללא ספרת ה-0 ביחידות המספר 350).

שלב ו'

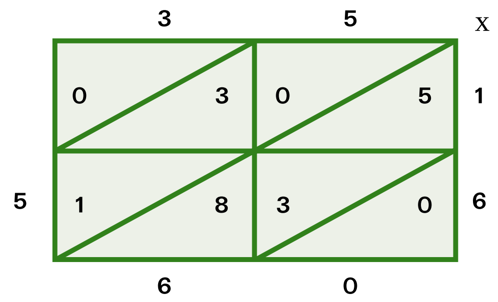
נציג שיטה נוספת לכפל מספרים, כפי שהיתה נהוגה בימי הביניים. מקור השיטה, כנראה, בהודו, שכן היא נמצאת בחיבור Lilavati של מתמטיקאי, Bhaskara (1114–1185), ובחיבורים הודים אחרים. משם נדדה דרך חישוב זו לסין, לחיבורים פרסיים, ולמתמטיקאים ערביים, שהעבירוה למערב אירופה. מבצע פעולת הכפל השתמש בטבלה שהזכירה בצורתה סורג או שבכה, וכונתה באותה התקופה "gelosia". טבלאות אלה מוצאים גם באיטליה במאה ה-15 (קופיץ, 1998).



בשיטה זו מחשבים את כל המכפלות שבתרגיל: 6x5, 6x3, 1x5, 1x3. כותבים את התוצאות במשבצות המתאימות (בכל מלבן, במשולש התחתון רושמים את היחידות של התוצאה, ובמשולש העליון את העשרות של התוצאה).



עתה מחברים את המספרים לפי השטחים הנוצרים על-ידי האלכסונים. המשולש הראשון שיוצר האלכסון בפינה הימנית התחתונה מייצג את היחידות, השטח שבין האלכסון הראשון והשני מייצג את העשרות, השטח שבין האלכסון השלישי והרביעי מייצג את המאות וכך הלאה. במקרה ותוצאת החיבור באחד השטחים גדולה מ-9 מעבירים את העשרת לשטח הבא.



לכן תוצאת הכפל היא 560.

ניתן לראות את הקשר בין שיטת הסריג לזו שהוצגה בשלב ד'. כל שורה בתוצאה של התרגיל הבא מתאימה למלבן בסריג.

35		
x 16		
30	6x5	נמצא במלבן הימני התחתון בסריג.
180	6x30	נמצא במלבן השמאלי התחתון בסריג.
50	10x5	נמצא במלבן הימני העליון בסריג.
300	10x30	נמצא במלבן השמאלי העליון בסריג.
560		

(על שיטת הסריג ניתן לקרוא במאמר של קופיץ (1998), ובספרה של תירוש (1996), עמודים 39-41).

שלב ז'

שיטה זו לפתרון תרגיל כפל נקראת "שיטת האיכר הרוסי" (The Russian Peasant Algorithm). אלגוריתם זה מבוסס על הבסיס הבינארי, ושימוש בחוק הקיבוץ והפילוג. בכל שלב כופלים גורם אחד ב-2 ובמקביל מחלקים את הגורם השני ב-2. עד לשלב האחרון שבו מגיעים לכפל ב-1.

בדוגמה שלנו:

```
35 x 16 =
70 x 8 =
140 x 4 =
280 x 2 =
560 x 1 = 560
```

נסביר את האלגוריתם על-ידי השימוש בחוק הקיבוץ וחוק הפילוג:

$35 \times 16 = 35 \times (2 \times 8) = (35 \times 2) \times 8 = 70 \times 8 = 70 \times (2 \times 4) = (70 \times 2) \times 4 = 140 \times 4 = 140 \times (2 \times 2) = (140 \times 2) \times 2 = 280 \times 2 = 280 \times (2 \times 1) = (280 \times 2) \times 1 = 560 \times 1 = 560.$

בדוגמה נוספת:

```
  35 x 18 =
  70 x 9 =
* 140 x 4 +70 x 1 =
  280 x 2 +70 x 1 =
  560 x 1 +70 x 1 =
  560 + 70 = 630
```

* יש לשים לב, כאשר מחלקים מספר אי-זוגי ב-2 מקבלים מנה ושארית 1. לכן, בשורה זו נקבל את המנה (4 בדוגמה), כלומר 140 x 4 = 70 x 8 והשארית (1 בדוגמה), כלומר 70 x 1.

סיכום:

ראינו דרכים שונות לפתרון תרגיל כפל של מספרים דו-ספרתיים. באופן דומה ניתן להציג פעולות אחרות במתמטיקה על-ידי השימוש בסוגי אלגוריתמים שונים. חשוב שמורים למתמטיקה יהיו מודעים לאלגוריתמים השונים באמצעותם ניתן לפתור תרגילים, ולאפשר לכל תלמיד לפתור בדרך הברורה לו. משל לכך ניתן למצוא בספרה של יעל בירן (1999) "גדר, כבשה ואיש עם בעיה" המתאר יפה את הדרכים השונות לפתרון בעיה. הספר מספר על חלום של ילד בו כבשים עוברות גדר בדרכים שונות, וכיצד הן מתמודדות עם בעיה זו.

ביבליוגרפיה

בירן, י' (1999). **גדר, כבשה ואיש עם בעיה. תל-אביב:** סער.

מרקוביץ, צ' (2001). מה קורה כאשר מה שרואים ושומעים משם, זה לא מה שרואים ושומעים מכאן. **מספר חזק 2000, 1**, 5-8.

קופיץ, י' ע' (1998). מעשה שבכבה כפל עתיק. **אלף אפס, 11**, 12-14.

תירוש, ד' (1996). **מתמטיקה מחקר והוראה.** תל-אביב: מכון מופ"ת-מחקר ופיתוח תכניות בהכשרת עובדי הוראה.