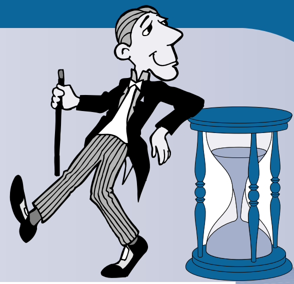


אמי נטר (1935-1882)

מרגרט פרוים, מרכז מורים ארצי, אוניברסיטת חיפה; מכללת תלפיות

"כדי להישאר באותו מקום, עלייך לרוץ מהר ככל האפשר. אם את רוצה להגיע למקום אחר, עלייך לרוץ לפחות פי שניים יותר מהר"

(תרגום חופשי של דברי המלכה האדומה לאליס בספרו של לואיס קרול "אליס בארץ הפלאות").

מילים אלו מתאימות לתיאור נשים שניסו לפלס את דרכן במתמטיקה ונזקקו לאומץ, נחישות וכוח רצון רבים יותר ממתמטיקאים גברים, כדי להצליח באותה המידה.
ברצוני להציג בפניכם את סיפורה של אישה, אמי נטר, שעסקה במחקר מתמטי בתחילת המאה שעברה. תקוותי היא שמאמר זה ימלא לפחות חלק מהמחסור שקיים בהיכרות עם דמויות מפתח של נשים מתמטיקאיות. (פרוים, 1999א).

על משפחתה

אמי נטר (Emmy Noether) נולדה ב- 23 למרץ 1882 למשפחה יהודית, בעיר ארלנגן - גרמניה. מעניין לציין מספר פרטים על תולדות משפחתה:
בתחילת המאה ה- 19 חויבו כל ראשי המשפחות היהודים אשר לא כונו בשם משפחה במשך דורות, להעניק שם משפחה להם ולצאצאיהם (החוק הונהג באזור הריין שבגרמניה).
אליאס סמואל, רב-סבה של אמי, שהתפרנס מעסקי המתכת, בחר את שם המשפחה נטר (יש הגורסים שהשם נגזר מהשם נתן). (Dick, 1981).
אחד מנכדיו של אליאס היה מקס נטר, אביה של אמי ששימש כפרופסור למתמטיקה באוניברסיטת ארלינגן. לאחר שחלה בשיתוק ילדים בגיל 14, נותרה בריאותו רופפת כל חייו.
אמה של אמי נטר, אמליה, הייתה בת למשפחה יהודית עשירה, משפחה של סוחרי בקר ובנקאים. חלק מאבותיהם היו רבנים מלומדים במשך מספר דורות.
שניים מאחיה של אמי היו מדענים: פריץ - פרופסור למתמטיקה ואלפרד - פרופסור לכימיה. האווירה האינטלקטואלית שבביתה והשפעתו של אביה יצרו, ככל הנראה, את התנאים המתאימים להתפתחותה של אמי נטר.

בישול, תפירה וניקיון

כילדה, אמי לא התרכזה בלימודי המתמטיקה. בישול, תפירה וניקיון הבית נחשבו באותה התקופה לכישורים הכרחיים, אותם צריכה ללמוד נערה צעירה, ואמה של אמי הייתה אחראית על הנחלתם לבתה. אולם אמי לא נחלה הצלחה מרובה בתחומים

אלו, וכאשר הוטל עליה לנקות את משרדו של אביה העדיפה לדפדף בספרי המתמטיקה הרבים שלו.
אמי לא ניחנה ביופי והרכיבה משקפי ראייה. האופי החברותי שלה ונדיבותה כבשו את לב חבריה. אחד הבילויים החביבים עליה ביותר היה ריקודים סלוניים, אף על פי שלעיתים הייתה לה בעיה במציאת בני זוג: הנערים לא "עמדו בתור" כדי לרקוד איתה והעדיפו נערות אחרות, אולי נאות יותר מהמתמטיקאית לעתיד שלנו.
בין השנים 1897-1889 אמי למדה בבית הספר לבנות בארלינגן, שם למדה מלבד מקצועות החובה, נושאים מורחבים כמו מתמטיקה, צרפתית ואנגלית, והייתה בין המעטים שהשתתפו בשיעורי יהודות. (Brewers et al, 1981).

באביב 1900, בגיל 18, עברה בהצלחה את הבחינות להסמכת מורים לצרפתית ואנגלית במוסדות חינוכיים לבנות. מעניין לציין שבידיעת השפות קיבלה את הציון "טוב מאד", אבל בעבודה מעשית קיבלה רק את הציון "עונה על הדרישות". רבים מהסטודנטים שהיא תלמד בעתיד, באוניברסיטה, יסכימו כי שיטת הוראתה מצדיקה את הציון ואינה ראויה לציון גבוה יותר. למרות זאת, כפי שנראה בהמשך, אמי נטר ידעה לטפח את הסטודנטים הכשרוניים שלה שהפכו הודות לה למתמטיקאים בעלי שם.

אחת משתי הסטודנטיות באוניברסיטה

במקום לעבוד כמורה לשפות, אמי נטר החליטה להמשיך את הלימודים באוניברסיטה. באותה תקופה נשים לא יכלו להתקבל ללימודים אוניברסיטאיים, אלא רק כשומעות חופשיות. אף על פי שמותר היה לה להיות נוכחת, לא יכולה הייתה לקבל אישור רשמי על השתתפות בקורסים.

כמובן, אף האפשרות לשמוע את הקורס הייתה כרוכה בהסכמתו של המרצה, שלא תמיד נענה לתת אותה. בשנת 1900, סמסטר חורף, היו רשומות באוניברסיטת ארלינגן שבגרמניה רק שתי נשים כשומעות חופשיות מתוך כ- 1000 סטודנטים.

בשנת 1904, כאשר אמי הייתה בת 22, אוניברסיטת ארלינגן אפשרה לנשים להפוך לסטודנטיות מן המניין בעלות זכויות שוות לגברים, וכך אמי נרשמה ללימודי המתמטיקה.

חבר טוב של המשפחה, המתמטיקאי פאול גורדן (Paul Gordan), היה אחד מהמרצים שהכיר בכשרונה ועודד אותה רבות בלימודיה (תמונתו הייתה תלויה על קיר משרדה שנים רבות). בשנת 1907 הוענק לה תואר דוקטור במתמטיקה ב"הצטיינות יתרה".

סמינר לפיזיקה מתמטית חינם!

במהלך השנים 1908 - 1915 עבדה אמי ללא תמורה כספית כלשהי במכון למתמטיקה בארלנגן. פרט למחקרים שערכה בעצמה, היא העבירה מדי פעם הרצאות במתמטיקה במקום אביה, הפרופסור מקס נטר, שמחלתו החמירה במרוצת השנים. כמו כן שימשה בתקופה זו כמנחת דוקטורנטים. הודות להצלחותיה במחקר המתמטי החלה אמי להיות מוכרת ומוערכת יותר ויותר בעולם האקדמי, שהורכב ברובו מגברים. (Bell, 1945).

בשנים 1908 - 1915 היא התקבלה כחברה בחוג מתמטי איטלקי יוקרתי וכחברה באגודה למתמטיקה בגרמניה. למרות זאת, החוקים שמנעו מנשים להיות חלק מסגל האוניברסיטה חסמו את דרכה לקבלת משרה רשמית.

כישרונותיה של אמי נטר היו כבר מוכרים ברבים ולכן, דוד הילברט (David Hilbert, 1943-1862), אחד המתמטיקאים הטובים בעולם באותה תקופה, הזמין אותה לעבוד אתו באוניברסיטת גוטינגן (Gottingen) שנחשבה באותה עת כמרכז האירופי במתמטיקה.

אמי, התמחתה בדיוק בנושא בו עסק הילברט: היבטים מתמטיים בתורת היחסות של איינשטיין. בנושא זה היא הוכיחה שני משפטים משמעותיים ביותר המוכרים כ"משפט נטר".

ובכל זאת, המתמטיקאית אמי נטר עדיין עבדה ללא כל תמורה. בחוברת תוכניות הקורסים של סמסטר חורף 1916-1917 כתוב:

> **סמינר לפיזיקה מתמטית**
> **פרופסור הילברט**
> **בסיועה של גב' דר' א. נטר**
> **ימי שני 4-6 אחה"צ**
> **חינם**

"הסנאט של האוניברסיטה אינו בית מרחץ"

המתמטיקאי דוד הילברט, שניסה לסייע לאמי בקבלת משרה, נתקל בהתנגדות נחרצת מצד ההיסטוריונים, הפילוסופים והפילולוגים, שיחד עם המתמטיקאים היו שייכים לאותה פקולטה- הפקולטה לפילוסופיה.

טענתם הייתה: "מה יחשבו החיילים שלנו כאשר יחזרו ללימודים באוניברסיטה ויגלו שמצפים מהם לשבת לרגלי אישה כדי ללמוד?"

ועל כך השיב הילברט: "אדונים נכבדים, איני רואה מדוע מינו של מועמד יהווה טיעון כנגד מועמדותו למשרת פריבטדוצנט (סוג של משרה יוקרתית באוניברסיטה) - אחרי הכול, הסנאט של האוניברסיטה אינו בית מרחץ". (סינג, 2001).

הגישה של העולם האקדמי הייתה כל כך שוביניסטית, שרק בשנת 1919 הצליחה אמי נטר להתקבל למשרת מרצה באוניברסיטת גוטינגן. בתחילה, תנאי המשרה לא אפשרו לה לקבל שכר מהאוניברסיטה אלא הסטודנטים שלימדה שילמו לה ישירות עבור עבודתה. רק לאחר שלוש שנים זכתה במשכורת מסודרת ורשמית, אך מאד צנועה.

נגד כל הסיכויים- המתמטיקאית ששינתה את פני האלגברה

רוב המתמטיקאים בעלי השם חשפו את גילוייהם המשמעותיים ביותר בשלב מוקדם בחייהם. אמי נטר הייתה יוצאת דופן.

ב- 1935 המתמטיקאי וויל הרמן (Weyl, 1935) אומר בנאום שנשא לזכרה את הדברים הבאים:

"תהליך הפיכתה למומחית עצמאית ונהדרת שכולנו מעריכים כיום היה איטי יחסית. התבגרות מאוחרת כזו היא תופעה נדירה במתמטיקה [...] רק ב- 1920, שלוש עשרה שנים אחרי שקיבלה את התואר דוקטור [...] התפרסם מאמרה המסמן את נקודת התפנית המכריעה במחקריה. כאן לראשונה, מופיעה אמי נטר כפי שכולנו מכירים, כמתמטיקאית ששינתה את פני האלגברה באמצעות עבודתה [...]"

המתמטיקאי ג'יורגי בירקהוף (Birkoff,1976) כתב בספרו "התפתחותה של האלגברה המודרנית": "אמי נטר ושותפיה הפכו את האלגברה המודרנית למרכזית במתמטיקה."

במשך שנים רבות המתמטיקאים שעסקו בתחום האלגברה חיפשו פתרונות של משוואות מסוגים שונים. אמי נטר והמתמטיקאים של המאה העשרים לעומת זאת, הקדישו את מאמציהם לחקר תכונות פורמאליות של פעולות אלגבריות. לדוגמה, הם חקרו את

חוק החילוף, חוק הקיבוץ וחוק הפילוג ואת המבנים האלגבריים הנוצרים כאשר אחד מחוקים אלו אינו מתקיים.
המתמטיקאי ההולנדי ואן דר וארדן (Van Der Warden) כתב: "עבור אמי נטר, היחסים בין מספרים, פונקציות ופעולות נעשו ניתנים להכללה רק אחרי שנותקו מכל קשר לעצמים ספציפיים וצומצמו למערכת יחסים רעיונית כללית". (Kimberling, 1972)

על "משפחת נטר" או על "אפרוחים ואימא תרנגולת"

אמי נטר פרסמה כ- 40 מאמרים. החשיבות של עבודתה לא באה לידי ביטוי רק במאמרים אלו, אלא גם בכך ששיתפה אחרים ברעיונותיה החדשים ועודדה אותם להשתמש בהם.
כמתמטיקאית הייתה בעלת השפעה מקצועית ואישית על הסטודנטים הצעירים שהקיפו אותה באוניברסיטת גוטינגן. היא יצרה עימם קשר הדוק, אהבה אותם והתעניינה בחייהם הפרטיים. המתמטיקאי הנודע נורברט וינר (1894-1964) תיאר אותה "כטובת המתמטיקאיות מאז ומעולם [...] המוקפת תמיד על-ידי הסטודנטים הרבים שלה כ"אפרוחים מסביב לאימא תרנגולת" (Wiener,1956).
היא והסטודנטים שלה זכו לכינוי "משפחת נטר".
הסטודנטים שלה הגיעו מכל קצוות תבל: צן (Tsen) מסין, אלכסנדרוב (Alexandroff) מרוסיה, שודה (Shoda) מיפן, לויצקי (Levitski) מארץ ישראל, הרברנד (Herbrand) מצרפת ואחרים.
תלמידה, יעקב לויצקי מתל אביב, עשה את עבודת התיזה שלו ביוזמתה ובטיפוחה. המצב הכלכלי הקשה של הצעיר הכישרוני, שנולד ברוסיה ואחר כך היגר לארץ ישראל, הדאיג את אמי. היא עשתה כל שביכולתה למצוא לו תפקיד כאסיסטנט - מטלה קשה במיוחד כיוון שהיה זר ויהודי.

אמי נטר הנהיגה קבוצה של מתמטיקאים שעסקו בדיונים מתמטיים פוריים. דיונים אלו נמשכו גם לאורך טיולים רגליים ואף בבריכת השחייה של האוניברסיטה. בכניסה לבריכה הוצב שלט שהכריז שהרחצה מותרת לגברים בלבד. אולם, שלט כזה לא הרתיע כמובן את אמי שהייתה מורגלת בהגבלות כאלו. הרי ההרשמה לאוניברסיטת ארלינגן הייתה "לגברים בלבד", קבלת משרה באוניברסיטת גוטינגן הייתה "לגברים בלבד", משכורת הוגנת הייתה "לגברים בלבד" וכך גם הרחצה בבריכת האוניברסיטה. אמי רחצה בבריכה מדי יום יחד עם הקולגות שלה במכון למתמטיקה.
יחסה של אמי כלפי "הנאות חומריות" משתקף בסיפור הבא: ביום גשום, טיילה אמי בגוטינגן עם חלק מתלמידיה. למרות שהייתה לה מטרייה, לא השתמשה בה. מלוויה היו נבוכים כשגילו את מצבה העגום של המטרייה. לבסוף, הציע אחד מהם שהפרופסורית תתקן את המטרייה. לזאת היא ענתה: "כן, אך אין זה אפשרי - כשלא יורד גשם אני לא חושבת על המטרייה וכשכן יורד, אני צריכה אותה".

"אני מסיר מעליך כל זכות ללמד באוניברסיטה"

בשנת 1932 עלו הנאצים לשלטון והיטלר הכריז על תחילתו של הרייך השלישי. גרמניה הפכה מרפובליקה דמוקרטית למדינה בעלת שלטון טוטליטארי, כשהיטלר בראשה. הופעלה מדיניות נאצית אנטישמית שבמסגרתה נמנע מיהודים באופן שיטתי ליטול חלק בחייה הלאומיים והתרבותיים של גרמניה.
באוניברסיטת גוטינגן, שלושה מארבעת ראשי המכונים לפיזיקה ומתמטיקה היו יהודים, ושלושתם התפטרו או פוטרו. אמי נטר קיבלה את ההודעה הבאה משר המדע, התרבות והחינוך: "על בסיס פיסקה 3 בחוק [...] אני מסיר מעלייך כל זכות ללמד באוניברסיטת גוטינגן". באותה עת התנהלה בארה"ב פעילות ענפה של מדענים שמטרתה הייתה למצוא או ליצור משרות, עבור הקולגות היהודים שבגרמניה. המשימה הזו להצלת המדענים היהודים הגרמנים הייתה קשה. הוקמו ועדות לתמיכה במהגרים, חלקן למען סלילת דרך להגירה חוקית.
לאמי נטר נמצאה משרה כפרופסור אורח בקולג' לנשים- "Bryn Mawr" , קולג' שהיה בעל מוניטין מצוין. כל מדען שהגיע מהאוניברסיטאות הגרמניות עבר תקופת הסתגלות קשה. אמי התקבלה בברכה ובחמימות ונעזרה בכך וביכולת ההסתגלות שלה כדי להתאים עצמה לנסיבות החדשות בהצלחה.
(Srinivasan, 1983).
אמי נטר נפטרה ב- 15 אפריל 1935, בגיל 52, בעקבות ניתוח שהסתבך.

בדברים לזכרה, אמר עליה אלברט איינשטיין (Einstein,1966):
"מבין כל המתמטיקאים הטובים ביותר החיים כיום, נטר הייתה המתמטיקאית הגאונית היצירתית, החשובה ביותר מאז שהחלו להיות לימודים גבוהים לנשים".
נשות אקדמיה, נשות עסקים, שופטות, כימאיות, פסלות, סופרות, מורות למתמטיקה ועוד שורה ארוכה של נשים מצליחות, שימו לב!

אנו הנשים כאן, גם הודות לאמי נטר.
אני תמהה מתי, לדעתכן, לא נאלץ לרוץ פי שניים מהר יותר מהגברים כדי להשיג שוויוניות?... מה על כל אחד ואחת מאתנו לעשות כדי לשפר את המצב הקיים עדיין של אפליה בין המינים?

בהמשך נסייר בעולמה המתמטי של אמי נטר, נעסוק בטענה המדהימה שלפעמים 3+2=0, נסתחרר במעגל המספרים ונבקר בכוכב בו החיים מתנהלים על פי שעון בעל 5 שעות.

על קצה המזלג -
מושגים מעולמה המתמטי של אמי נטר

כפי שראינו, המתמטיקאית אמי נטר עסקה בחקר מבנים אלגבריים. ביסודו של מבנה אלגברי נמצאת קבוצת איברים בה מוגדרות פעולות אלגבריות (אחת או יותר). נתייחס לדוגמה לקבוצת המספרים השלמים: Z = (... ,3 ,2 ,1 ,0 ,1- ,2- ,3- ...) נגדיר בה את פעולת החיבור, פעולה המתאימה לכל שני מספרים מתוך Z, כלומר לכל שני מספרים שלמים, איבר מתוך Z (מספר שלם שהוא הסכום של שני המספרים). ניתן לומר שקבוצת המספרים השלמים עם פעולת החיבור היא מבנה אלגברי שנסמנו ב- (+, Z). (גינזבורג, 1991).

נפנה כעת למבנה אלגברי המוכר בשם **חבורה**.

בחבורה מוגדרת פעולה שתוצאתה אף היא איבר השייך לקבוצה (תכונת הסגירות). הפעולה היא פעולה בינארית (פעולה בין שני מספרים) שהיא קיבוצית (אסוציאטיבית).

הערה: דוגמה לפעולה שאינה בינארית היא הפעולה המתאימה לכל מספר את המספר העוקב לו.

בחבורה קיים איבר אחד ויחיד ביחס לפעולה הנקרא **איבר נייטרלי** (איבר אשר הפעלתו על כל איבר משאירה את המקור). כמו-כן לכל איבר יש **איבר נגדי** אחד ויחיד ביחס לפעולה (תוצאת הפעולה של איבר באיבר הסימטרי לו היא האיבר הנייטרלי). אבהיר מושגים אלו באמצעות דוגמאות.

דוגמה של **חבורה** היא קבוצת המספרים הרציונליים **בלי האפס**, עם פעולת הכפל. נסמנה ב- (Q, x). נניח ש- x, y, z הם מספרים מתוך Q.

* הפעולה היא **קיבוצית**: עבור כל מספר x, y, z מתקיים
(xy) z = x (yz)

לדוגמה: (2 x 4) x 5 = 2 x (4 x 5)

הערה: סדר המספרים אינו משתנה אלא רק סדר ביצוע הפעולות.

* האיבר ה**נייטרלי** הוא 1.

כפל של מספר ב- 1 אינו משפיע על תוצאת הפעולה.

עבור כל מספר x, $1 * x = x * 1 = x$

* עבור כל מספר x קיים מספר **נגדי** שנסמנו $\frac{1}{x}$

תוצאת הכפל של מספר במספר הנגדי לו היא האיבר **הנייטרלי** 1.

לדוגמה: המספרים 3 ו- $\frac{1}{3}$ הם מספרים נגדיים:

$3 \times \frac{1}{3} = 1$.

בכפל נוהגים לקרוא לאיברים הנגדיים בשם איברים **הופכיים**.

האם קבוצת המספרים הרציונליים כולל האפס עם פעולת הכפל היא חבורה? האם תוכלו להסביר מדוע?

נתבונן שוב בדוגמה הבאה:

קבוצת המספרים השלמים עם פעולת החיבור. נסמנה ב- (+ , Z)

Z = (... ,3 ,2 ,1 ,0 ,1- ,2- ,3- ...)

הקבוצה הזו היא לא רק מבנה אלגברי (כפי שראינו) אלא גם **חבורה**. מדוע?

האם הפעולה היא קיבוצית? האם תוכלו להסביר מדוע?

מהו האיבר הנייטרלי של החבורה הזו? מדוע?

בחיבור מסמנים את האיבר הנגדי לאיבר a ב- a-:

$a + (-a) = 0$.

מה עוד נוכל לומר על פעולת החיבור?

הפעולה מקיימת את חוק החילוף (החוק הקומוטטיבי). כלומר, לכל a, b מתקיים $a + b = b + a$. חבורה כזאת נקראת חבורה **חילופית**.

האם גם החבורה (Q, x) היא חבורה חילופית? מדוע?

החשבון המודולרי

אמי נטר חקרה מבנים אלגבריים מסוימים הקשורים בחשבון מודולרי.

בחלק הבא של המאמר אעסוק בחשבון מודולרי, תחום אותו גילה לראשונה המתמטיקאי קרל פרדריך גאוס (1777-1855) (פרוים, 1998).

הנכם מוזמנים לחשוב כיצד לשבץ את הרעיונות הבאים בשיעוריכם.

החשבון המודולרי עוסק בשארית שמקבלים כאשר מחלקים מספר שלם במספר טבעי. לפניכם מספר דוגמאות:

דוגמה א

17 מחולק ב- 5 נותן מנה 3 ושארית 2.

כותבים כך: 17 : 5 = 3 (2)

בחשבון המודולרי לא מתייחסים למנה אלא רק לשארית החילוק של שני המספרים.

כותבים כך: 17 ≡ 2 (mod 5)

וקוראים כך: 17 קונגרואנטי ל- 2 מודולו 5 (בקיצור: mod 5).

כלומר, שארית החילוק של 17 ב- 5 היא 2.

הסימון לקונגרואנטיות הוא ≡ (שלושה קווים אופקיים).

דוגמה ב

23 מחולק ב- 4 נותן מנה 5 ושארית 3.

ניתן לכתוב כך: 23 : 4 = 5 (3)

או כך: 23 ≡ 3 (mod 4)

דוגמה ג

30 מחולק ב- 10 נותן מנה 3 ללא שארית.

כותבים כך: 30 : 10 = 3

או כך: 30 ≡ 0 (mod 10)

התבוננו בתרגילי החילוק הבאים:

7 : 5 = 1 (2)	7 ≡ 2 (mod 5)
17 : 5 = 3 (2)	17 ≡ 2 (mod 5)
132 : 5 = 26 (2)	132 ≡ 2 (mod 5)
502 : 5 = 100 (2)	502 ≡ 2 (mod 5)

ניתן לראות שאם נחלק את המספרים 7, 17, 132, 502 ב- 5 נקבל אותה שארית 2.

המספרים האלו קונגרואנטים ל 2 -מודולו 5.

ניתן להציע לתלמידים לחפש מספרים אחרים קונגרואנטים מודולו 5, או מספרים קונגרואנטים מודולו 3, או מודולו 8, או כל מספר טבעי אחר שיבחרו.

שאלות לחקירה:

1. מה מאפיין מספר כלשהו קונגרואנטי למספר 0?
2. מה מאפיין את כל המספרים האי-זוגיים? (תשובה: הם קונגרואנטים ל- 1 מודולו 2).
3. נניח ש- $17 \equiv 2 \pmod 5$. מה נוכל לומר על: $17 - 2$?
נניח ש- $a \equiv b \pmod m$ מה נוכל לומר על $a - b$?

חשבון השעון

כולנו מנהלים את חיינו לפי שעון מחולק ל- 12 שעות. שימוש בחלוקה כזו של הזמן נעשה כבר בתקופה הבבלית העתיקה. בכל פעם שאנו מבצעים חישובים הקשורים לזמן בחיי היומיום שלנו, אנו משתמשים בחשבון מודולרי אפילו בלי לשים לב לכך.

דוגמה א

השעה כעת 6. קבעתי פגישה בעוד 7 שעות. באיזה שעה תתקיים הפגישה? (איור 1)

הפגישה תתקיים בשעה 1 כמובן (מתחילים מ- 6 וסופרים 7 רווחים עד 1). השעון מראה, למעשה, כמה שעות עברו מהשעה 12 או במילים אחרות כמה שעות נשארו לאחר החילוק ב- 12, כלומר **השעון מראה את הזמן מודולו 12** (לאחר סיבוב של 12 שעות).

כותבים כך: $7 + 6 = 13$ $\quad 13 \equiv 1 \pmod{12}$

למעשה, כדי לחשב את שעת הפגישה מחברים שני מספרים מודולו 12.

דוגמה נוספת:

עברו 4 שעות מהשעה 11. מה השעה כעת?

כותבים כך: $4 + 11 = 15$ $\quad 15 \equiv 3 \pmod{12}$

אפשר להבחין בכך שלאחר סיבוב של 12 שעות מגיעים לאותו מקום שממנו התחלנו. למעשה, להתקדמות של סיבוב שלם סביב לשעון יש אותה תוצאה כאילו לא זזנו מהמקום. כלומר, החיבור ב- 12 הוא כמו החיבור ב- 0. מסיבה זו , אפשר לשנות את תצוגת השעון כך שנכתוב את המספר 0 במקום המספר 12 שבראש השעון. (איור 2)

לדוגמה אם השעה היא 5, לאחר סיבוב של 12 שעות השעון יראה שוב את השעה 5:

$12 + 5 = 17$ $\quad 17 \equiv 5 \pmod{12}$

דוגמה ב

היום יום ג'. איזה יום יהיה בעוד 50 ימים?

ניתן לבקש מהתלמידים לכתוב את הבעיה הזו בכתיב מתמטי בעזרת מודולו.

באיזה מודולו משתמשים?

תשובה: $50 \equiv 1 \pmod 7$

השארית המתקבלת היא יום אחד. לכן, בעוד 50 יום יהיה יום ד' (יום אחד אחרי יום ג').

נתבונן שוב בדוגמה א

כדי לחשב את שעת הפגישה מחברים שני מספרים מודולו 12. נוכל לדמיין עולמות אחרים בהם הזמן נמדד על פי שעונים בעלי מספר שעות שונה מ- 12.

ניתן לבקש מהתלמידים לחשוב מה היה קורה אילו השעון היה בעל 9 שעות ולא 12 שעות. אפשר לבקש מהתלמידים לכתוב גם את הבעיה הזו בכתיב מתמטי בעזרת מודולו. (כמובן יש לחבר את המספרים מודולו 9, (איור 3)).

כותבים כך: $7 + 6 = 13$ $\quad 13 \equiv 4 \pmod 9$

בשעון בעל 9 שעות שעת הפגישה היא השעה 4.

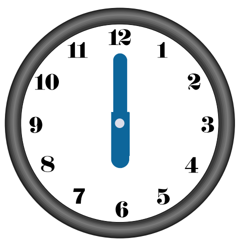
ניתן להציע לתלמידים לצייר או לבנות שעון בעל 9 שעות ולבדוק בעזרתו את נכונות החישובים. גם בשעון בעל 9 שעות, כמו בשעון בעל 12 שעות, אפשר לכתוב את המספר 0 בראש השעון, במקום המספר 9 (ראו איור 3).

דוגמה ג

בכוכב "נילי" החיים מתנהלים על-פי שעון בעל 20 שעות.
אם השעה היא 8 בעולם זה, מה תהיה השעה בעולם שבו השעון הוא בעל 5 שעות?

(תשובה: השעה 3).

התלמידים יכולים לבחור שעון בעל מספר מסוים של שעות, ולכתוב סיפור הקשור בניהול יום מחייהם על פי שעון זה.



איור 1

איור 2

איור 3

איור 4

לוח החיבור

ניתן לנסות לבנות לוח חיבור הקשור בשעון בעל 5 שעות (איור 4) - לוח החיבור של מודולו 5. לחפש ולחקור תכונות של הפעולה הזו. מספרי הקבוצה הם 4, 3, 2, 1, 0. מדוע? (איור 5)

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

איור 5

כיצד בונים לוח חיבור זה?

נתבונן, לדוגמה, במספר 1 הנמצא בחיתוך השורה של 2 עם הטור של 4 (איור 5).

$4 + 2 = 6 \qquad 6 \equiv 1 \pmod 5$

אפשר להציג לתלמידים לוח חלקי בלבד ולבקש מהם להשלימו. כדאי להדגיש את העובדה שלוח החיבור מודולו 5 הוא סופי. לוח החיבור הרגיל לעומת זאת, של המספרים השלמים למשל, הוא לוח אין סופי. איך נוכל להסביר זאת?

אפשר להציע לתלמידים להתבונן בלוח החיבור מודולו 5 המלא, לחפש ולחקור תכונות של הפעולה הזו. להפתעתם, יגלו התלמידים עובדה מסקרנת במיוחד:
למרות שפעולת החיבור מודולו 5 שונה מפעולת החיבור הרגיל קיימות בכל זאת תכונות דומות לשתי הפעולות. ננסה לגלות אותן.

אפשר לשאול את השאלות הבאות:

1. האם פעולת החיבור מודולו 5 היא **קיבוצית**? לדוגמה, בשני התרגילים הבאים הסכום הוא 3:

$1 + (4 + 3)$

$(1 + 4) + 3$

(אפשר לבקש מהתלמידים לבדוק מקרים נוספים, אך אם רוצים לוודא את נכונותו של החוק עלינו לבדוק את כל המקרים האפשריים).

2. האם קיים **מספר נייטרלי**? אם כן, מהו?
(תשובה: האיבר הנייטרלי הוא 0).
איך נוכל להסיק זאת מלוח החיבור? רמז: נבקש מהתלמידים לבדוק את השורה ואת הטור של המספר 0. האם יש עוד מספר כזה?

3. האם לכל מספר קיים **מספר נגדי** ביחס לפעולת החיבור מודולו 5?
לדוגמה: מהו המספר הנגדי ל- 2?
המספר הנגדי ל- 2 הוא 3 כיוון ש: $3 + 2 \equiv 0 \pmod 5$
והמספר הנגדי ל- 3 הוא 2.
מהם המספרים הנגדיים ל- 1 ו- 4?
(תשובה: 4 ו- 1 בהתאמה).
האם האיבר הנגדי לאיבר מסוים הוא אחד ויחיד?

שאלת חקר מסקרנת היא:
האם כדי לוודא את נכונותה של התכונה הזאת עלינו לחשב את כל המספרים הנגדיים?
רמז: חקר לוח החיבור מגלה שבכל שורה, (וגם בכל טור), מופיע המספר 0.
התכונה הזו, האומרת שבקבוצה המורכבת סך-הכול מ- 5 מספרים, קיים מספר נגדי לכל מספר, היא תכונה מעניינת. קיימות קבוצות, בעלת אינסוף מספרים, בהן לא לכל מספר יש מספר נגדי ביחס לחיבור הרגיל. האם תוכלו לתת דוגמאות של קבוצות כאלה? כיצד ניתן להסביר את סיבת השוני?

4. האם חוק החילוף מתקיים ביחס לפעולת החיבור מודולו 5?
כיצד נוכל לוודא את קיום החוק מבלי לבדוק את כל המקרים?
כיצד ניתן להסיק זאת מהתבוננות בלוח?
רמז: מעבירים את האלכסון הראשי - האלכסון העובר מהפינה השמאלית למעלה לפינה הימנית למטה. קיום חוק החילוף מתבטא בסימטריה של הלוח לגביו - מספרים הנמצאים במרחקים שווים מהאלכסון הראשי זהים זה לזה.

ועוד נושא לחקירה:
בלוח החיבור מודולו 5 מסתתרות עוד תכונות מעניינות. מומלץ להציג לתלמידים לגלות אותן. מעניין יהיה לבנות לוחות חיבור אחרים, למשל מודולו 7, מודולו 2 ועוד, ולבדוק את קיום התכונות של פעולת החיבור.

נחזור לתחילת הנושא "מושגים מעולמה המתמטי של אמי נטר" ונזכר בתכונות המבנה האלגברי ששמו חבורה חילופית.

נשאל:

האם הקבוצה שאיבריה הם המספרים, המייצגים את השעות בשעון בעל 5 שעות, בה מוגדרת פעולת החיבור, היא חבורה חילופית?

אם כן, מדוע?

נוכל להמשיך ולחקור את העולם המפתיע והמסקרן של החשבון המודולרי. למשל, לבנות את לוח הכפל ולחקור את התכונות של פעולה זו.

הנושאים שהוצגו כאן, פותחים לתלמידים צוהר לעולם חדש ומרתק של מספרים, עולם הבנוי מפעולות החשבון: חיבור, חיסור, כפל וחילוק, כפי שלא היכירו עד עתה.

יופייה של המתמטיקה בא לידי ביטוי בכך שבעולם החדש קיימים אותם מבנים אלגבריים כמו בעולם הרגיל של המספרים, למרות שהמספרים והפעולות של החשבון המודולרי שונים מהמספרים והפעולות המוכרות לנו.

הכרת המבנה האלגברי ותכונותיו משחררת את התלמידים מעולם העצמים הספציפיים (מספרים ופעולות) וגורמת להם להתמקד במערכת כללית יותר.

התלמיד החוקר מפתח גמישות בטיפול במספרים ובפעולות ותכונותיהן ומפתח חשיבה מופשטת ורפלקטיבית.

ההפתעה בגילוי העולם הלא סטנדרטי של החשבון המודולרי, יכולה להלהיב את הלומדים, להגביר את אהבתם למקצוע שאינו חייב להיות משעמם וצפוי, וליצור גם אצל התלמידים הפחות מתעניינים במקצוע, רצון ללמוד מתמטיקה.

אמי נטר וחבריה (1932)

מקורות

גינזבורג, א' (1991). **מתמטיקה דיסקרטית, מבנים אלגבריים.** האוניברסיטה הפתוחה.

סינג, ס' (2001). **המשפט האחרון של פרמה.** ידיעות אחרונות, ספרי חמד, ספרי עליית הגג.

פרוים, מ' (1998). גאוס קרל פרדריך. **עממי, עלון למורי המתמטיקה בישראל**, 6.

פרוים, מ' (1999)א. שלוש נשים: שלוש מתמטיקאיות. **עממי, עלון למורי המתמטיקה בישראל**, 8.

פרוים, מ' (1999)ב. סופי ז'רמן. **עממי, עלון למורי המתמטיקה בישראל**, 10.

פרוים, מ' (1999)ג. ניקולו טרטליה. **עממי, עלון למורי המתמטיקה בישראל**, 12.

Bell,E. (1945). *Development of Mathematics*. New York: The Macmillan Company

Birkhoff,G. (1976). *The Rise of Modern Algebra , Men and Institution in American Mathematics* ,Texas University ,13.

Brewers J,Smith & M.(eds).(1981) *Emmy Noether A tribute to her life and work* ,NY.

Dick A.(1981). *Emmy Noether ,1882-1935.* Boston ,Basel: Birkhauser.

Einstein, A .(1966). *The Quotable Einstein* .collected and edited by Calaprice. Princeton N .J, University Press.

Kimberling, C.(1972).Emmy Noether. *American Mathematics Monthly* ,7

Srinivasan, B. & Sally J.(1983). *Emmy Noether in Bryn Mawr* . New York: Springer -Verlag.

Wiener,N. (1956). I *Am a Mathematiction*. Boston, M.I.T.

Weyl,H. (1935). *Emmy Noether. Scripta Mathematica*, 3

תודה לד"ר בנו ארבל מאוניברסיטת תל אביב ומכללת בית ברל על הערותיו והארותיו