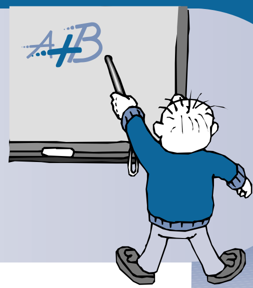


# הנס פרוידנטל (Hans Freudenthal) ו"החינוך המתמטי ריאליסטי בהולנד"

**תרגום: מיכל סוקניק**, מתוך החוברת של "מכון פרוידנטל", שהוצאה לאור ע"י אוניברסיטת אוטרכט, לכבוד הכנס של ICME9 שהתקיים ביפן ביולי 2000.

ומתוך: Mathematics Education in the Netherlands: A Guided Tour M.van den Heuvel-Panhuizen, Freudenthal Institute, Utrecht University, the Netherlands

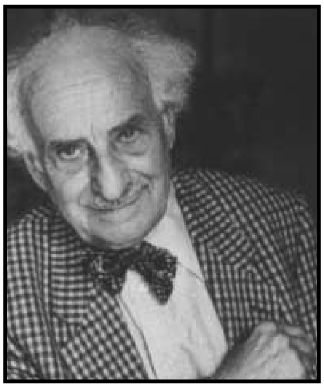
הנס פרוידנטל נולד בשנת 1905 בעיר הגרמנית לוקנוולד (Luckenwalde), כבנו של מורה יהודי. כבר בגיל צעיר הוא התעניין במשוואות דיפרנציאליות ובאינטגרלים, ובנוסף לכך בגיל 13 הוא גם קרא את כל העבודות של גטה ושילר. בשנת 1923 הוא נסע לברלין ולפריס ללמוד מתמטיקה. לאחר שקיבל דוקטורט, הוא עבר לאמסטרדם, בהולנד. שם, בשנת 1930, הפך להיות אסיסטנט של L. E. J. Brouwer, המתמטיקאי המפורסם. זמן קצר לאחר מכן הוא נשא לאישה את Suus Lutter, שהייתה אף היא מתמטיקאית. הודות לנישואיו לאישה הולנדית-ארית ולקצת מזל, פרוידנטל הצליח לשרוד את מלחמת העולם השנייה.

ב- 1946 פרוידנטל נעשה פרופסור באוניברסיטת אוטרכט (Utrecht) ועסק במתמטיקה טהורה ויישומית ובעקרונות המתמטיקה. פרוידנטל היה בתקופתו מתמטיקאי מצטיין ומפורסם, והביא לתרומה משמעותית בטופולוגיה, גיאומטריה, והתיאוריה של חבורות ליי.

כמורה הוא רכש תהילה ומשמעות בינלאומית כמייסד החינוך המתמטי הריאליסטי, (Realistic Mathematics Education) המבוסס על בעיות הנלקחות מההתנסויות היומיומיות, במקום על חוקים מתמטיים מופשטים. פרוידנטל הציל את החינוך ההולנדי משיטת הלימוד של "המתמטיקה החדשה", שהוצגה במדינות רבות משנת 1960 והלאה. שיטה פורמלית זו, המבוססת על לוגיקה, הייתה בלתי מתאימה עבור מרבית התלמידים. פרוידנטל העדיף לשלוח את תלמידיו למסע של גילוי. המוטו שלו היה שאתה לומד מתמטיקה בצורה הטובה ביותר על- ידי המצאתה מחדש. תלמידיו לא קיבלו בעיות מופשטות ומצומצמות, אלא בעיות מעשיות מחיי היומיום שנבחרו היטב, וכשפתרו אותן הם פיתחו בהדרגה הבנה מתמטית. בנוסף, פרוידנטל חשב שההכרה בבעיות אלה תוביל לכך שתלמידים יהיו מעוניינים יותר במתמטיקה.

ב- 1971 פרוידנטל הקים את:
IOWO - (Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs),
המכון להתפתחות החינוך המתמטי, שנקרא כיום מכון פרוידנטל (FI). מכון זה ממשיך להיות אחד הכוחות המניעים בחידוש החינוך המתמטי, הן בהולנד והן בארצות אחרות.

עמוק בליבו, פרוידנטל היה למעשה סופר. הוא כתב אינספור טורים במשך שנים רבות לעיתוני איכות הולנדיים, על נושאים שכללו שפה, הסטוריה, חינוך ופוליטיקה. בנוסף, לאחר מותו, התגלו בביתו עבודות רבות שלא פורסמו - שירים, מחזות וסיפורים.



הנס פרוידנטל, שהוביל רפורמה בחינוך, נפטר ב- 13 לאוקטובר 1990.

## חינוך מתמטי ריאליסטי (Realistic Mathematics Education)

מאז היווסדו בשנת 1970, פיתח מכון פרוידנטל גישה תיאורטית ללימוד ולהוראת המתמטיקה, הידועה כ"חינוך מתמטי ריאליסטי" (RME). RME משלב דעות על מהי מתמטיקה, כיצד תלמידים לומדים מתמטיקה, וכיצד יש ללמד מתמטיקה. תיאוריה זאת היא תוצאה של שנים רבות של מחקר התפתחותי, והיא תיאוריה "חיה", המשתנה כל הזמן כשנוספות תובנות חדשות.

העקרונות העומדים מאחורי הגישה של RME הושפעו, במידה רבה, מהרעיון של הנס פרוידנטל של 'מתמטיקה כפעילות אנושית'. פרוידנטל הרגיש שאין להתייחס לתלמידים כאל מקבלים פסיביים של מתמטיקה מוכנה, אלא שחינוך צריך לכוון את התלמידים לנצל הזדמנויות להמציא מחדש את המתמטיקה על-ידי השימוש בה בעצמם. RME דורש אוטונומיה אינטלקטואלית רבה אצל התלמידים. או במילים אחרות, אחד מהעקרונות החשובים ביותר של גישת ה- RME הוא שתלמידים צריכים להשתתף באופן פעיל בתהליך הלימוד. עליהם לקבל הזדמנות לבנות את הידע וההבנה שלהם בסביבה לימודית מדרבנת.

לדעתו, התוכן המתמטי צריך, בכל המקרים, להיות אמיתי באופן התנסותי עבור התלמידים. לכן הגישה נקראת חינוך מתמטי ריאליסטי. כמובן שאין זה אומר ש- RME תמיד משתמש בבעיות מחיי היומיום; מתמטיקה מופשטת יכולה אף היא להיות אמיתית באופן התנסותי עבור התלמידים. עדיף שהתלמידים יתחילו עם בעיות 'עשירות'; אלה הן בעיות אותן ניתן לפתור בדרכים שונות. כך אפשר להשוות בין הפתרונות השונים בסיטואציה כיתתית

אינטראקטיבית, ולעורר רפלקציה ודיון. זה מוביל את התלמידים לפתח באופן הדרגתי כלים והבנה מתמטיים ברמה גבוהה ופורמלית יותר.

### שתי דוגמאות של יישום בכיתה של RME

התשובה לשאלת ה'מה' לגבי תכנית הלימודים ההולנדית בחשבון לבית הספר היסודי, תוגבל למתן התרשמות עליה, המבוססת על שתי הבעיות הבאות:

$$6 + 7 =$$

$$4 \times 1.98 =$$

יש להבהיר שבחירה זו אינה מכסה במלואה את תכנית הלימודים ההולנדית בחשבון. זוהי רק סקירה קצרה בצעדי ענק: בעיה אחת תודגם עבור הכיתות הנמוכות (בעיית "המסעדה" הכוללת את התרגיל 6 + 7 =) ובעיה אחת תודגם עבור הכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי (בעיית "קניית כיכרות לחם", הכוללת את התרגיל 4 x 1.98 =). המשותף לדוגמאות אלה הוא שניתן לפתור אותן ברמות שונות, ולפיכך הן יכולות לשמש קרקע פורייה להתקדמות. הן גם מבהירות שהשאלה 'מה' בתכנית הלימודים ההולנדית בחשבון, לעולם אינה יכולה להיות מנותקת מה'איך'.

#### המסעדה

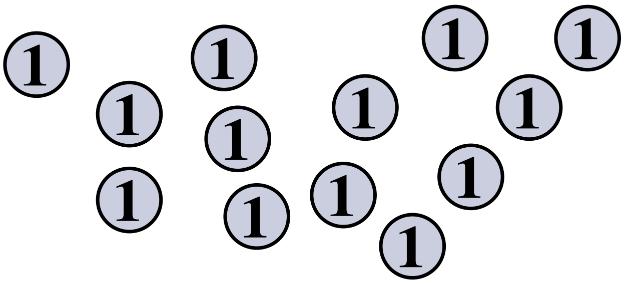
מטרת המורה בשיעור על המסעדה היא לעבוד על בעיית חיבור קשה, העוברת את המספר 10. אולם הדרך בה היא עושה זאת, משקפת עולם של חופש עבור התלמידים. המורה הודיעה שניתן לבחור שני פריטים מהתפריט (ראה איור 1) ושאלה את הילדים אילו פריטים הם יבחרו וכמה זה יעלה. במילים אחרות, נראה היה כאילו לא הייתה הנחייה מצד המורה, אך ההפך היה הנכון. על ידי בחירה של פנקייק וגלידה, שעלו 7 גילדן ו- 6 גילדן בהתאמה, היא ידעה מראש על איזו בעיה הכיתה תעבוד; כלומר, על בעיה של חיבור מעל עשר, שזהו הנושא עליו רצתה שיעבדו.


**איור 1: כרטיס התפריט עבור המסעדה של מורי**

בכיתה היה ארנק עם כסף כדי לשלם עבור מה שהוזמן, והמורה סידרה כך שבארנק יהיו מטבעות של חמישה גילדן ושל גילדן אחד. (שוב, הנחייה מעודנת מצד המורה). ואז התלמידים מתחילים להזמין. נילס מזמין פנקייק וגלידה. ג'ולס רושמת זאת על לוח קטן. שאר הילדים צועקים: "כן.. ..גם אני". הם מסכימים עם בחירתו של נילס. ואז המורה שואלת כמה תעלה הבחירה שלו בסך הכל.

הנה סיכום של מה שהילדים עשו:

■ מורין מנתה 13 מטבעות של גילדן אחד. שישה מטבעות לגלידה, ושבעה מטבעות לפנקייק (היא חישבה על-ידי מנייה). (ראו איור 2).



**איור 2: האסטרטגיה של מורין**

■ טים וניק החליפו חמש מטבעות של גילדן אחד עבור מטבע אחד של חמישה גילדן ושילמו עבור הגלידה עם "5" ו- "1", ועבור הפנקייק עם "5" ו- "1" ו- "1". לאחר מכן הם ראו ששני המטבעות של חמש יוצרים עשר, ויחד עם שלושת המטבעות של אחד זה 13 בסך הכל (חישוב על-ידי הבנייה- structuring) (ראו איור 3).


**איור 3: האסטרטגיה של טים**

■ לוק המציא את האסטרטגיה הבאה: "קודם שימי שלושה גילדנים מתוך השישה יחד עם השבעה גילדנים, שזה נותן עשרה גילדנים, ועוד שלושה זה שלושה עשר (חישוב על-ידי הבנייה ולקראת חישוב פורמלי).

■ חנה לא השתמשה במטבעות. היא חישבה: 6 ועוד 6 זה 12, ועוד 1 זה 13 גילדנים. תלמיד אחר המציא: 7 ועוד 7 זה 14, פחות 1 זה 13 (חישוב פורמלי וגמיש).

שיעור זה על המסעדה מבהיר, שילדים השונים זה מזה במיומנויות וברמת הבנה יכולים לעבוד בכיתה על אותה הבעיה. על מנת לעשות זאת יש צורך להציג בפני הילדים בעיות אותן ניתן לפתור ברמות שונות. היתרון שיש בכך עבור התלמידים הוא, שהשיתוף

והדיון המשותף באסטרטגיות שלהם, יכולים לתפקד כמנוף להגברת ההבנה שלהם. היתרון עבור המורים הוא, שבעיות כאלה יכולות לספק להם חתך רוחב של הבנת הכיתה שלהם בכל רגע נתון, וכן הן נותנות להם מבט כולל אורכי של המסלול שעליהם לעבור. חתך הרוחב של האסטרטגיות בכל רגע מצביע על מה שנמצא בהישג-יד בעתיד הקרוב. בהיותו כזה, משמש חתך הרוחב של האסטרטגיות ככלי עזר עבור המורה בהמשך ההוראה שלו.

## קניית כיכרות לחם

המטרה הסופית הכללית של הוראת חשבון ב - RME היא כישורים מתמטיים (numeracy). ילדים צריכים להיות מסוגלים להבין באופן הגיוני (to make sense of) מספרים ופעולות מספריות. המשמעות של זה, בין השאר, היא שילדים צריכים להיות מסוגלים להחליט בעצמם איזו שיטה חישובית מתאימה עבור פתרון בעיה חשבונית מסוימת. עליהם לדעת מתי מתאים חישוב בראש, מתי להשתמש באומדן, ומתי עדיף לעשות חישוב במאונך עם נייר ועיפרון, או להשתמש במחשבון. היכולת לקבל החלטות כאלה היא אחת מהמטרות ארוכות הטווח של החינוך המתמטי, אליהן רוצים להגיע בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי. הבעיה של קניית כיכרות לחם (ראה איור 4) מתאימה מאוד לעבודה לקראת מטרה זו.

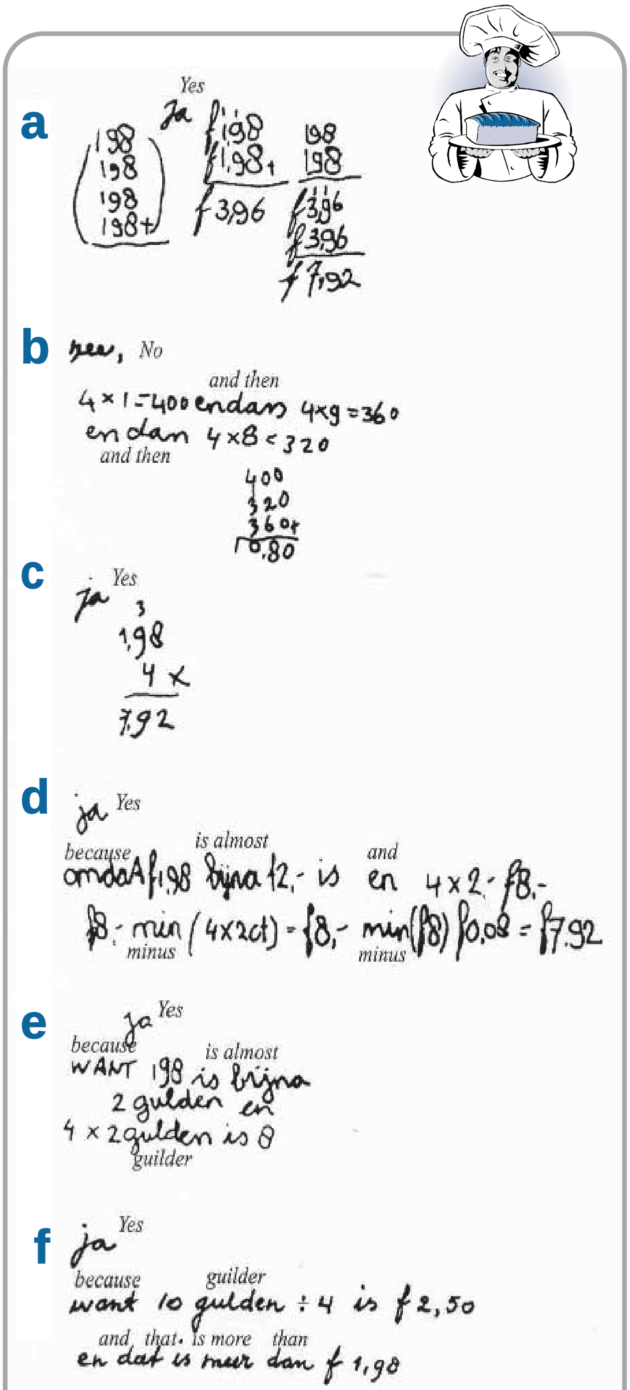
ליקה קונה ארבעה כיכרות לחם;
כל אחד מהם עולה 1.98 גילדן.
האם שטר אחד של עשרה גילדנים יהיה מספיק?

**איור 4: בעיית קניית ככרות לחם**

עבודות התלמידים (באיור 5) מראות מגוון רחב של קטגוריות של שיטות חישוב בהן ניתן להשתמש כדי לפתור בעיה זו. תלמידים a , b ו- c פתרו אותה בדרך כזו או אחרת על-ידי חישוב במאונך. תלמידים d , e ו- f פתרו בשיטה של אומדן. בתוך שתי קטגוריות עיקריות אלה, התלמידים השתמשו במספר אסטרטגיות שונות.

### הצורך בדיון כיתתי

כפי שראינו בבעית המסעדה, דיון כיתתי על הדרך שבה התלמידים התמודדו עם הבעיה של "קניית ככרות לחם", יכול לסייע להם לקיים בחירה מתאימה יותר בפעם הבאה. במיוחד אם הנושא הוא אומדן, דיון כזה יכול לעזור לשחרר את התלמידים מהרעיון שלהם, האומר שעבודתם עם מספרים יכולה להיקרא "מתמטיקה" רק אם הם עושים חישובים מדויקים. בבעיות כמו "קניית ככרות לחם" אין צורך בחישובים מדוייקים, מספיק לעשות אומדן. ומצד שני, עשיית אומדן כדי לפתור בעיה זו עשויה לסלול דרך לחישוב מדויק חכם! עבודתו של תלמיד d היא דוגמה טובה לכך.




**איור 5: עבודות התלמידים בבעיית "קניית ככרות לחם"**

### אשכולות של בעיות

על מנת לסלול את הדרך לחישוב חכם ומדויק, מגיעה, לאחר השאלה הכללית של "האם הכסף מספיק?", שאלה מדויקת יותר, כמו: "כמה נשאר או כמה עוד אתה צריך?"

רצף זה של שאלות (ראה איור 6) יכול להיחשב כמסלול קטן, (mini-trajectory) בעל פוטנציאל לתפקד כמנוף להשגת שינויים בהבנתם של התלמידים.

במידה מסוימת, קובצי בעיות אלה הינם תסריטים חינוכיים, המנחים את ההוראה ומעודדים את הלמידה.

| Buying loaves of bread | קניית ככרות לחם |
|---|---|
| - Enough money? | - מספיק כסף? |
| - how much is left or how much do you need?<br>- What is the precise price? | - כמה נשאר או כמה עוד צריך?<br>- מהו המחיר המדויק? |

**איור 6: קובצי בעיות ככלי דידקטי לעורר שינויים בהבנה**

### עקביות בין שיטות חישוב

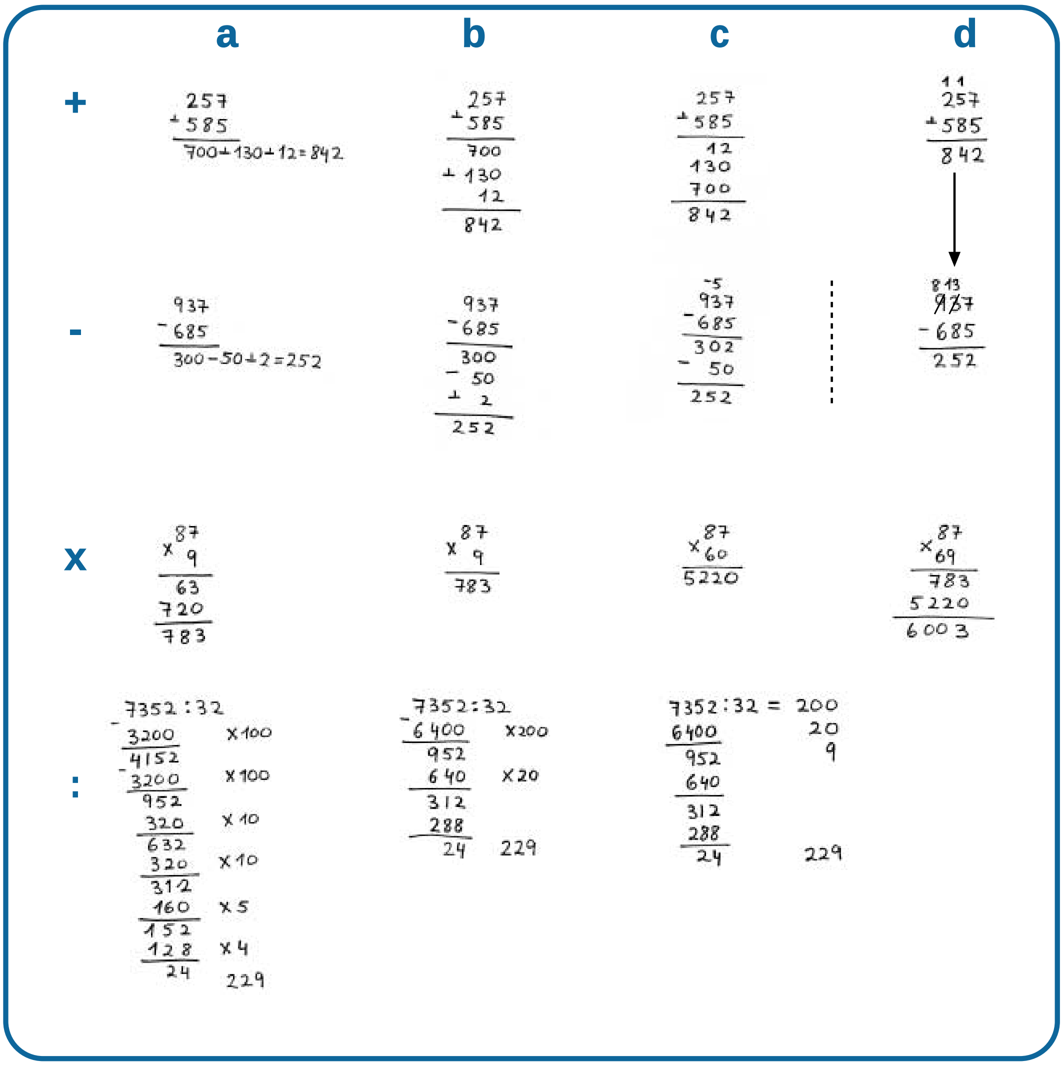
מלבד פקיחת עיני התלמידים לביצוע בחירה מתאימה של שיטת חישוב מסוימת, מגוון העבודות שנעשו על בעית קניית כיכרות הלחם (ראה איור 5) גם מספק למורה כלי רב עוצמה עבור דיון עם התלמידים על האופן שבו השיטות קשורות זו לזו. העבודות של תלמידים a ו- c מראות באופן מושלם, שבמקום כפל במאונך אפשר לעשות חיבור חוזר במאונך. למעשה, השיטה האחרונה היא שלב מוקדם של האלגוריתם הכתוב הסטנדרטי עבור כפל. עבודתו של תלמיד b אף מראה מה בא לפני שלב מקדים זה: סוג של שילוב של חשבון במאוזן עם ערך של מספרים שלמים (במקום העיבוד של המספרים כספרות) וחשבון מאונך.

דרך מעורבת זו מהווה אלמנט קריטי במסלול ההוראה / למידה עליו אנו חושבים בהקשר של חשבון בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי. חשבון מנטלי נחשב כענף העיקרי, שממנו נובע מאוחר יותר ענף החשבון במאונך. כשאנו אומרים "מאוחר יותר", הכוונה היא, לדוגמה, שהאלגוריתמים הסטנדרטיים לחיבור וחיסור (ראו איור 7 ו- d+ ו- d-) אינם עומדים על הפרק לפני כיתה ד'. באלגוריתמים עבור כפל וחילוק לא עוסקים לפני כיתה ה'. בשנים שלפני כיתות אלה, התלמידים מיישמים, פחות או יותר, שיטות מקוצרות ומעורבות, המבוססות על שיטת חישוב 'במאוזן' עם ערכים שלמים. איור 7 מראה כיצד דרך חישוב זו, הקשורה לחשבון מנטלי, מתפתחת בהדרגה לקראת האלגוריתמים הסטנדרטיים. זה נכון לפחות עבור חיבור וכפל. לגבי חיסור, עוקבים אחר מסלול אחר. האלגוריתם של החיסור אינו נובע באופן טבעי מגישה של ערכים שלמים. לפיכך, האלגוריתם של החיבור יכול לאפשר גישה לאלגוריתם החיסור (ראה את החץ שבאיור 7). האלגוריתם הסטנדרטי הקצר ביותר עבור חילוק נותר מחוץ לתמונה. אלגוריתם זה לא שייך יותר לתכנית הלימודים המרכזית.

### עבודת התלמידים כראי של החינוך

הדרך בה פותרים בעיה זו תלויה בדרך שבה לימדו את התלמידים. בצורה כזו, הבעיה יכולה להיחשב כראי של ההוראה. אתה מקבל בחזרה את מה שנתת לתלמידים. במחקר שבו נאספו עבודות התלמידים המוצגות באיור 5, כמעט מחצית מתלמידי כיתות ד' ו- ו' השתמשו בשיטה של חשבון במאונך, ופחות משליש מהתלמידים בחרו באומדן גלובלי.

מחקרים אחרים של בעיות כאלה גילו קשר הדוק עם סוג החינוך. סדרות שונות של ספרי לימוד הביאו לתוצאות שונות. עבודות התלמידים מבהירות שיש עדיין עבודה לעשות בהולנד, למרות התוצאות הטובות שנמצאו במחקר ה- TIMSS.




**איור 7: מסלול הוראה/למידה מוצע עבור חשבון של מספרים שלמים בכיתות הגבוהות יותר של בית הספר היסודי: מחישוב במאוזן לחישוב במאונך**