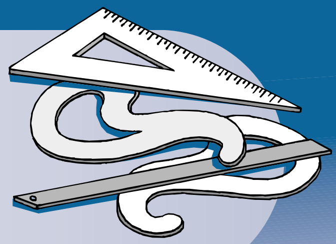


צורה ומרחב - גאומטריה

המתמטיקה שבאוזן המן

תמי גירון, מרכז מורים ארצי, אוניברסיטת חיפה

"אוזן המן שלוש קצוות לה, לומר לך: זכות שלושת האבות עמדה ליהודים להצילם מגזירת אותו רשע." (מתוך "והגדת לבנך...", מיכל גור אריה, ספרית פועלים 1986)

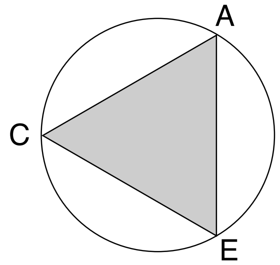
מנהג הוא בחג הפורים לאפות ולאכול אוזני המן. אוזן המן היא עוגייה ממולאת במילוי מתוק, בדרך כלל פרג או אגוזים, שצורתה משולש שווה צלעות. את העוגייה אופים מעיגול בצק. את עיגול הבצק מקפלים בדרך מסוימת ויוצרים את צורת המשולש.
דרך הקיפול היוצרת את המשולש, וחלוקת העיגול הנוצרת כתוצאה מהקיפול מזמנות חקירת תכונות שונות של העיגול ושל מצולעים רבים.
על מנת להבחין בגיאומטריה החבוייה באוזן המן נתחיל בהצגת פעילות חקר המיועדת למורים, אליה נצרף הסברים פורמליים.
לאחר מכן, נציג מספר רעיונות לפעילויות עם תלמידים בגילאים שונים.

פעילות חקר למורים

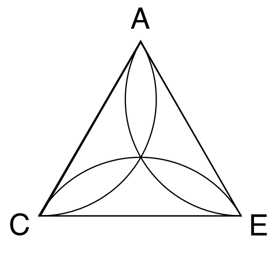
תחילה נכין אוזן המן:
נשרטט מעגל גדול (בעזרת מחוגה או כלי כלשהו עגול).
ננסה לקפל את העיגול שהתקבל לאוזן המן.

כיצד נוכל להגיע לאוזן המן שצורתה משולש שווה צלעות?

כדי להגיע למשולש שווה צלעות עלינו לחלק את היקף המעגל לשלושה חלקים שווים.
לצורך חלוקה זו נוכל להשתמש בעובדה שהיקף המעגל גדול בערך פי 3 מקוטרו. נוכל למדוד בעזרת חוט את קוטר המעגל, להוסיף לו מעט, ולהניח את החוט לאורך היקף המעגל ולסמן.
בדרך זו נקבל 3 נקודות על ההיקף (A,C,E) שאם נחבר כל שתיים סמוכות, נקבל משולש שווה צלעות.
ראו איור 1.

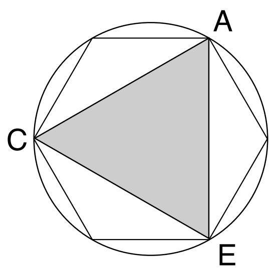


איור 1



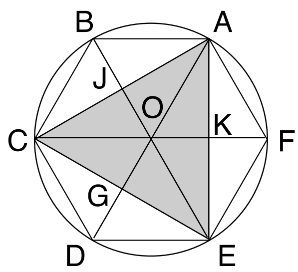
איור 2

נמשיך ונקפל את אוזן ההמן: נרים כלפי מעלה את חלקי הבצק הצמודים לצלעות המשולש, כשאנו משאירים את המשולש שווה הצלעות כבסיס (ראו איור 2).
בשעת הקיפול נקפיד לקפל ולהניח זה מול זה, גם את קצוות המעגל המכסים אחד את השני (אותו חלק של בצק שמדביקים אחד לשני, על מנת שהמילוי "לא יברח").
בדרך זו נקבל מנייר את צורתה של אוזן המן.
לאחר מכן, נפתח את כל הקיפולים ונדגיש את קווי הקיפול בעפרון (איור 3).



איור 3

נעביר רדיוסים ממרכז המעגל O אל כל אחד מהקודקודים של המשושה, שהתקבל מהקיפולים, ונקבל את השרטוט הבא: (איור 4).



איור 4

להגדלה לחץ על האיור

ועכשיו: התבוננו וחפשו צורות גיאומטריות, מצאו קשרים בין הצורות השונות, חשבו זוויות, בטאו קטעים בעזרת קטעים ידועים, ונסו לגלות תכונות גיאומטריות מעניינות בשרטוט.

המצולעים החבויים באוזן המן

לצורך החקירה מומלץ להכין שרטוט מדויק שבו נסמן את הנקודות על היקף המעגל על ידי הקצאת הרדיוס בעזרת מחוגה. לחילופין ניתן להשתמש בשרטוט מוכן. (בגרסת העיתון שמופיעה באתר ניתן לקבל הגדלה של שרטוט 4 באמצעות לחיצה עליו).

כתוצאה מהקיפולים הבסיסיים קיבלנו משושה משוכלל ABCDEF, ומשולש שווה צלעות ACE החסומים במעגל.
כתוצאה משרטוט הרדיוסים קיבלנו שישה משולשים שווי צלעות, שכל אחת מצלעותיהם שווה באורכה לרדיוס.
המשולשים: COA, COE, AOE הם משולשים שווי שוקיים חופפים שאורך השוק שלהם הוא כאורך הרדיוס של המעגל.
גם המשולשים: CBA, EDC, AFE הם משולשים שווי שוקיים החופפים למשולשים: COA, COE, AOE.

תלמידים יוכלו להבחין בחפיפת המשולשים ובשוויון הצלעות והזוויות על-ידי השוואה ישירה: הנחת שני משולשים אחד על השני, כשהצלעות המתאימות מונחות זו על זו.
אם נקפל כל משולש שווה שוקיים, כולל שווי הצלעות, לאורך חוצה זווית הראש נוכל לראות שחוצה הזווית מחלק את הצלע שממול לזווית לשני חלקים שווים. בדרך זו, על-ידי קיפולים והשוואה ישירה של אורך קטעים וזוויות נגיע לעובדה שחוצה זוית הראש במשולש שווה השוקיים הוא גם תיכון וגם גובה לצלע.
מקיפולים אלו נקבל 12 משולשים ישרי זווית:
KOA, KOE, GOE
COG, JOC, AOJ
KEF ,GDE, GDC
CJB, AJB, KFA

מחישובי זוויות המסתמכים על העובדה שבמשולש שווה צלעות כל הזוויות הן בנות 60°, נוכל גם להסיק שבמשולשים ישרי זווית אלו שתי הזוויות האחרות הן בנות 30° ו- 60°.
חוצי הזוויות במשולש שווה הצלעות הגדול ACE נפגשים בדיוק במרכז המעגל החוסם את המשולש.

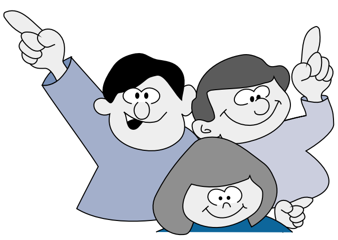
נתבונן במשולשים שווי השוקיים החופפים AFE, AOE ונראה שהם יוצרים מעוין AOEF. בדרך דומה נמצא עוד שני מעוינים דומים COED ו- AOCB - האם המעוינים חופפים?
שלושת המעוינים יוצרים ביחד את המשושה המשוכלל ABCDEF.
האם יש מעוינים נוספים בשרטוט החופפים להם?
כאשר עובדים עם תלמידים מומלץ לאפשר להם לגזור את כל המעוינים ולהניחם זה על זה לצורך השוואה. שימו לב שחלק מהמעויינים "מונחים אחד על השני" ועל מנת להבחין בהם יש צורך במספר שרטוטים שיאפשרו גזירה בצורות שונות.
אפשר לבחון בעזרת השרטוט תכונות שונות של המעוין, לדוגמה: אלכסונים המאונכים זה לזה.

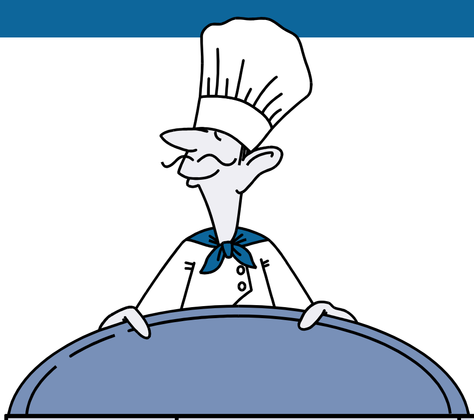
אם נתבונן בשרטוט נוכל למצוא עוד מצולעים רבים המזמנים שיחות ודיונים על מושגים גיאומטריים. לדוגמה: ארבעה משולשים שווי צלעות יוצרים משושה קעור, לדוגמה OBAFED, שכל צלעותיו שוות (שוות לרדיוס). משושה זה אינו משוכלל משום שלא כל זוויותיו שוות. בהקשר זה נוכל גם לבדוק האם המעוינים שנבדקו לעיל הם מצולעים משוכללים.
- שלושה משולשים שווי צלעות יוצרים טרפז שווה שוקיים לדוגמה: CBAF ואילו שלושה משולשים ישרי זווית יוצרים טרפז ישר זווית. לדוגמה OFEG. בחישובי זוויות ניתן להוכיח שלטרפז שתי זוויות ישרות: זווית OGE נוצרה בין הגובה של המשולש COE לצלע, וזווית GEF היא סכום של זווית בת 60° (זווית במשולש שווה צלעות) וזווית בת 30° (חצי זווית במשולש שווה צלעות). לכל אחד מהמצולעים האלו ניתן למצוא מצולעים חופפים רבים, שחלקם "מונחים אחד על השני."
בנוסף למצולעים אלו נוכל לבודד עוד מצולעים שונים מתוך השרטוט ולחקור כל אחד מהם.

מבין המצולעים השונים אפשר לבודד את המשולשים ישרי הזווית, לחקור את אורכי הצלעות שלהם ואת גודלן של הזוויות ולגלות תכונות גיאומטריות שונות. להלן פרוט חקירה זו.

משפחה מיוחדת של משולשים ישרי זווית

א. מצאו בשרטוט משולשים ישרי זווית.
ב. בדקו מי מבין המשולשים חופפים זה לזה, ומצאו משולשים שאינם חופפים (שונים).
המשולשים ישרי הזווית מתחלקים לשלוש קבוצות:
המשולשים החופפים למשולש OAJ
המשולשים החופפים למשולש ACG
המשולשים החופפים למשולש ACD
כל משולש ישר-זווית חופף למשולשים שבקבוצתו, ואינו חופף למשולשים שבשתי הקבוצות האחרות.
ניקח לדוגמה משולש אחד מכל סוג ונסמן בו את הניצבים ואת היתר.
לאחר הסימון נחשב את גודלן של הזוויות בכל אחד מהסוגים. את גודלן של חלק מהזוויות כבר מצאנו בחקירות הקודמות. אולם חשוב לציין שניתן להגיע לגודלן של הזוויות במספר אופנים, כשנקודת המוצא בכל פעם היא עובדה אחרת הידועה מראש. ניתן להשתמש בעובדה שבמעגל 360°, ולהסתמך על העובדה שחוצי הזוויות של המשולש שווה הצלעות AEC מחלקים את המעגל לשישה חלקים שווים.
ניתן גם לצאת מהעובדה שהקוטר הוא זווית שטוחה בת 180°.
על הקוטר מונחות שלוש זוויות שוות של שלושה משולשים חופפים. מכאן שכל אחת מהן היא בת 60°.
לחילופין, ניתן להתבסס על המשפט שבמשולש שווה צלעות כל הזוויות הן בנות 60° מעלות.
מנקודות מוצא אלו ניתן לחשב את כל הזוויות שבשרטוט.





לאחר חישוב הזוויות נבטא בעזרת הרדיוס את אורכי הצלעות - שני הניצבים והיתר, בשלושת המשולשים ישרי הזווית.
את מרבית הקטעים ניתן לבטא בעזרת הרדיוס R וחלקים ממנו.
בקטעים מסוימים יש צורך להשתמש במשפט פיתגורס.
במהלך החקירה יתקבלו הנתונים הבאים:

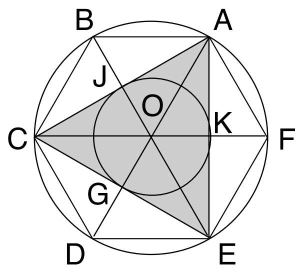
המשולש	גודל הזווית החדה הגדולה מבין השתיים	גודל הזווית החדה הקטנה מבין השתיים	אורך הניצב שממול לזווית הגדולה מבין השתיים החדות	אורך הניצב שממול לזווית הקטנה מבין השתיים החדות.	אורך היתר
המשולש הקטן OAJ	60°	30°	$0.5R\sqrt{3}$	$0.5R$	R
המשולש הבינוני AGC	60°	30°	$1.5R$	$0.5R\sqrt{3}$	$R\sqrt{3}$
המשולש הגדול ACD	60°	30°	$R\sqrt{3}$	R	$2R$

כל אחד מהמשולשים בטבלה מייצג את כל המשולשים החופפים לו.

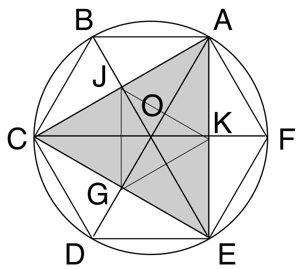
מחישובי הזוויות ניתן לראות שבכל סוגי המשולשים ישרי הזווית, הזוויות החדות הן בנות 30° ו- 60°.
ומה לגבי הצלעות? האם קיים יחס קבוע בין אורכי הצלעות במשולשים?
מהנתונים שהתקבלו ניתן לראות שהיחס בין הניצב הקטן ליתר נשמר בכל המשולשים: אורכו של היתר כפול מאורכו של הניצב הממוקם מול הזווית הקטנה (30°).
כלומר, קיבלנו את המשפט המפורסם: "בכל משולש ישר זווית שזוויותיו הן $90^\circ,60^\circ,30^\circ$ יהיה היתר גדול פי 2 מהניצב שממול הזווית בת ה- 30°. אפשר להוכיח משפט זה על-ידי השלמת המשולש ישר הזווית למשולש שווה צלעות (על-ידי שיקוף המשולש לאורך הניצב שממול לזווית בת ה- 60°).
מאחר והזוויות שוות בהתאמה בכל המשולשים בהם עסקנו, הרי שהמשולשים דומים לפי אחד ממשפטי דמיון משולשים. אם נבדוק את היחסים שבין אורכי הצלעות בכל אחד מהמשולשים, ניווכח שהיחסים הם אותם היחסים בכל המשולשים. כפי שהגדרת דימיון משולשים, אומנם, קובעת.
המכירים את משפטי דימיון משולשים יוכלו להסיק את גודלן של הזוויות באמצעות הנתונים שהתקבלו בדבר אורכן של הצלעות.

אם נרצה להמשיך את האפייה בדיוק מתמטי, הרי שנוכל להמשיך ולחקור היכן כדאי להניח את המילוי לאוזן המן.
אפשרות אחת היא לסמן מעגל שחסום בתוך המשולש שווה הצלעות הגדול (ראו איור 5) להניח את המילוי על מעגל זה.

במקרה זה נוכל לשאול: מה היחס בין שטח העיגול שהוכן מהבצק לשטח העיגול המיועד להנחת המילוי?



איור 5



איור 6

אפשרות אחרת היא לחבר את הנקודות JKG (ראו איור 6) ולהניח את המילוי על המשולש הקטן שקיבלנו. כאן ניתן לשאול: האם המשולש שקיבלנו הוא שווה צלעות? האם ניתן להוכיח זאת?

אם נתעלם מחלקו של הבצק שנועד להדבקה, האם נוכל ליצור אוזן המן סגורה לחלוטין?
שאלה זו תחזיר אותנו מההתנסות בנייר ובחוקי הגיאומטריה אל המטבח ואל הבצק, שאין ספק שהוא הרבה יותר גמיש מעולם המתמטיקה המדויק.

ממגוון החקירות שביצענו ניתן לבחור ולהתאים פעילויות שונות לתלמידים. את הפעילויות חשוב להתאים לגיל ולכשירויות הגיאומטריות של התלמידים. כמו כן, אפשר לשבץ את הפעילויות בהתאם לנושאים הנלמדים בכיתה.
להלן מספר רעיונות לפעילויות לגילאים השונים.

פעילויות לתלמידים

מחלקים לתלמידים שרטוטים של אוזן המן (איור 4)
מומלץ להכין מלאי גדול של שרטוטים לצורך גזירה והשוואה ישירה.

פעילויות לגילאים הצעירים

▲ לקפל לאוזן המן.
▲ למיין את המצולעים.
▲ ליצור מצולעים שאינם נמצאים בשרטוט על-ידי צירופים שונים של מצולעים שנגזרו מהשרטוט.
▲ לחקור את הקשר בין המצולעים השונים.
לשוחח על מצולעים "שווים" - המונחים בכיוונים שונים בשרטוט, אבל לאחר גזירה הם מכסים אחד את השני - מצולעים חופפים (בדיקת חפיפה על-ידי השוואה ישירה).
▲ זיהוי מצולעים קעורים וקמורים. זיהוי מצולעים שאינם אב-טיפוס מוכר (לדוגמה המשושה הקעור).
▲ זיהוי מצולעים משוכללים - מהו מצולע משוכלל?
▲ מציאת קשרים בין שטחי המצולעים השונים. לדוגמה: שני משולשים מכסים את המעוין.

ועוד פעילויות לכיתות הביניים

בנוסף על הפעילויות שלעיל, מומלץ להוסיף לכיתות הביניים את הפעילויות הבאות:
▲ לזהות זוויות: ישרות, חדות, קהות.
▲ לגזור משולשים שונים ולמיין אותם (על פי קריטריונים שונים).
מיון אפשרי לשתי קבוצות:
1. ישרי זווית (שיש להם זווית ישרה אחת)
2. שווי שוקיים
- כמה משולשים ישרי זווית שונים יש בשרטוט?
- האם המשולשים שווי הצלעות נכללים בקבוצת שווי השוקיים, או שהם קבוצה נפרדת?
▲ לחקור את הקשר בין המשולשים השונים ישרי הזווית (משולשים דומים), במה הם שונים זה מזה ובמה הם שווים?
▲ לראות (על ידי קיפול אחד על השני) שבמשולשים שווי הצלעות כל הזוויות שוות, במשולשים שווי שוקיים שתי זוויות שוות. לראות שיש למשולשים אלו ציר סימטריה שהוא: הגובה שמחלק את הזווית לשני חלקים שווים ומחלק את הצלע לשני חלקים שווים.
▲ לקחת אחד מהמשולשים. לשקף אותו, כך שבכל פעם צלע אחרת שלו משמשת ציר שיקוף. אילו מצולעים מבין המצולעים המצויים בשרטוט מתקבלים?

ועוד פעילויות לכיתות גבוהות:

לכיתות גבוהות אפשר להתחיל את החקירה בפעילויות הבאות ללא השרטוט המוכן, (איור 5):
א. שרטוט מעגלים שונים.
ב. מציאת מרכז המעגל על-ידי קיפול.
ג. על-ידי שימוש בחוט (או במחוגה), שאורכו כאורך קוטר המעגל, מודדים את היקף העיגול ומוצאים את היחס הקבוע בין הקוטר להיקף המעגל. ממשיכים וחוקרים איך ניתן ליצור משולש שווה צלעות מדויק החסום במעגל? (ששלושת קודקודיו נוגעים בהיקף המעגל).
לאחר חקירה זו ניתן להמשיך ולחקור בעזרת השרטוט המצורף והפעילויות המוצעות. אל הפעילויות המוצעות לכיתות הנמוכות וכתות הביניים אפשר להוסיף את הפעילויות הבאות.
▲ לחשב את כל הזוויות שבשרטוט. (שימו לב לאפשרויות השונות לנקודת המוצא: 360° במעגל, 180° על קו ישר, משולש שווה צלעות וכ"ו).
▲ לחקור את הקשרים בין אורכי שלושת הצלעות במשולשים ישרי הזווית:
לשרטט משולשים ישרי זווית נוספים ולבדוק האם הקשרים שנמצאו מתקיימים גם בהם.
להסיק מסקנות.
ולסיומה של החקירה אפשר לאפות אוזני המן בכיתה ולקנח באכילתם.

בתיאבון!

תלמידה בשעת פעילות "אוזן המן", בבית ספר "ימית", קרית-ים.