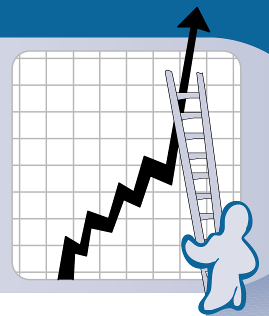

לגופו של עניין

חקירת שברי יחידה

עלי עותמאן, מכללת אלשריעה ומדעי האיסלאם, באקה אלגרבייה

במאמר זה נציג מספר חקירות העוסקות בשברי יחידה. בעקבות החקירות נגיע למספר גילויים המתקשרים להצגת שברי יחידה כסכום של שני שברי יחידה שונים ולמספר המחלקים של מספר. חקירות אלו יכולות להתאים בחלקן לכיתות ה'-ו' העוסקות בנושא השבר הפשוט, או להעמקת הידע המתמטי לאלו המחפשים גילויים חדשים וקשרים בין נושאים מתמטיים שונים.

שברי היחידה

השברים: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ נקראים שברי יחידה. כלומר, שבר יחידה הוא שבר שצורתו הפשוטה $\frac{1}{n}$ כאשר $n > 1$ טבעי. מכאן, שהשברים $\frac{7}{9}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ אינם שברי יחידה.

הגדול ביותר הוא $\frac{1}{2}$, ומהו הקטן ביותר? ברור שאין שבר יחידה קטן ביותר (כי לכל שבר יחידה יש שבר יחידה הקטן ממנו).

שבר יחידה כסכום של שני שברי יחידה

נבקש מהתלמידים למצוא שני שברי יחידה שסכומם $\frac{1}{2}$.
פתרון מיידי הוא :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

אולם אם נבקש שברי יחידה השונים זה מזה, יהיו שליש ושישית מתאימים לפתרון:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

נבקש למצוא שני שברי יחידה שסכומם $\frac{1}{7}$.
פתרון מיידי הוא :

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14}$$

אולם אם נבקש שברי יחידה השונים זה מזה, תלמידים רבים יתקשו לענות על השאלה ולחלק מהם ייקח זמן רב כדי להגיע לפתרון:

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{56}$$

הפתרון המיידי שקיבלנו בשני המקרים:

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14} \qquad \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

מתבסס על חלוקת שבר היחידה לשני חלקים שווים.

נשאלת השאלה כיצד נוכל להשתמש בעובדה זו כדי לשער לאילו שברי יחידה שאינם שווים זה לזה נוכל לחלק שבר יחידה כלשהו? כדי להבין את הסוגייה נציג את הבעיה הבאה:

אם מחלקים עוגה לשני חלקים שונים, מה ניתן לומר על שני החלקים (בהשוואה למחצית העוגה)?

התשובה היא שאחד החלקים גדול ממחצית העוגה והחלק השני קטן ממחציתה.
מכאן, מה ניתן לומר בוודאות על שבר היחידה הגדול מבין שני שברי יחידה שונים אשר סכומם שווה $\frac{1}{3}$?
שבר היחידה הגדול יהיה גדול ממחצית ה- $\frac{1}{3}$. כלומר, הוא גדול מ- $\frac{1}{6}$ וקטן מ- $\frac{1}{3}$.
ולכן הוא חייב להיות אחד השברים $\frac{1}{5}$ או $\frac{1}{4}$.
ומה יהיה שבר היחידה השני שישלים את הסכום ל- $\frac{1}{3}$?
שבר זה יהיה ההפרש בין $\frac{1}{3}$ לבין שבר היחידה הגדול ($\frac{1}{5}$ או $\frac{1}{4}$).
נחשב:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

ולכן:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

ואילו

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

והוא אינו שבר יחידה ולכן הפתרון היחיד הוא:

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

במהלך העיסוק במציאת שברי היחידה השונים שסכומם שבר יחידה, יהיו תלמידים רבים שיגלו שקיים קשר בין המספרים המופיעים במכנים.

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

מכנהו של השבר הגדול מבין שני השברים שהם המחוברים, גדול ב- 1 מהמכנה של השבר הנתון (סכום השברים), ואילו מכנהו של השבר הקטן מבין שני השברים שהם המחוברים, שווה למכפלת המכנים של שני השברים האחרים.

כדי להרחיב את הדוגמאות, נבקש מהתלמידים למצוא את שני שברי היחידה שסכומם יהיה: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$

בהכללת הדוגמאות נוכל לומר כי: $\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$

וכאן נוכל להעלות את השאלות:

האם כל שבר יחידה יכול להיות סכום של שני שברי יחידה?
האם הכללה זו תתקיים עבור כל n ?

שבר יחידה כהפרש של שני שברי יחידה

נבקש מהתלמידים למצוא שני שברי יחידה שהפרשם $\frac{1}{6}$.

פתרון:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

ננסה למצוא גם שני שברי יחידה שהפרשם יהיה : $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$

גם כאן במהלך העיסוק במציאת זוג שברי יחידה שהפרשם שבר יחידה, יהיו תלמידים רבים שיגלו קשר בין המספרים המופיעים במכנים.

המכנים של השברים שהם המחוסר והמחסר יהיו שני מחלקים של המכנה של השבר שהוא ההפרש. שני מחלקים אלו חייבים להיות מספרים עוקבים על מנת שיתקבל הפרש שהוא שבר יחידה.

נוכל לבקש גם למצוא שני שברי יחידה שהפרשם יהיה : $\frac{1}{10x11}$ או $\frac{1}{99x100}$

וכאן נוכל להעלות את השאלות:

האם יש רק דרך אחת להציג שבר יחידה כהפרש של שני שברי יחידה?
האם כל שבר יחידה יכול להיות הפרש של שני שברי יחידה?

גילויים נוספים על סכומים והפרשים של שברי יחידה

א. נבקש מהתלמידים לחשב את הסכום:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{6x7}+\frac{1}{7x8}+\frac{1}{8x9}+\frac{1}{9x10}=$$

חלק מהתלמידים יבחרו בדרך של מציאת מכנה משותף כפי שהם למדו, וחלק יקשרו את התגליות מהסעיפים הקודמים וישתמשו בהם כדי לייעל את הפתרון:

על פי הסעיפים הקודמים מצאנו כי:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$
$$\frac{1}{30}=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$$

.
.
.

וכן הלאה

כאשר מחברים את השוויונים נראה שכל המחוברים מלבד הראשון והאחרון מבטלים זה את זה והסכום המתקבל הוא:

$$\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\frac{1}{6}\ldots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$$

בדרך זו נחשב את הסכום המבוקש ונמצא שהוא שווה:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

בדרך דומה נוכל למצוא גם את הסכומים של סדרות של שברים שהמכנים שלהם אינם מספרים שיש להם מחלקים שהם מספרים עוקבים.

לדוגמה חשבו:

$$\frac{1}{1x3}+\frac{1}{3x5}+\frac{1}{5x7}+\frac{1}{7x9}\ldots+\frac{1}{99x101}=$$

ב. נבקש מהתלמידים למצוא שני שברי יחידה שונים שסכומם $\frac{1}{4}$.

חלק מהתלמידים יאחזו בעובדה שאחד השברים חייב להיות גדול ממחצית השבר הנתון ויישארו נאמנים לדרך שבה מצאו שני שברי יחידה שונים אשר סכומם שווה $\frac{1}{3}$. תלמידים אלו יפעלו על פי האסטרטגיה הבאה: המחובר הגדול גדול מ- $\frac{1}{8}$ וקטן מ- $\frac{1}{4}$

ולכן ניתן לנסות את השברים הבאים: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$.

כאשר ינסו יגלו שהפתרונות האפשריים הם:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

לעומת זאת כאשר ינסו את $\frac{1}{7}$, הם יגלו ש:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{7}=\frac{3}{28}$$

והוא אינו שבר יחידה.

תלמידים אחרים יתבססו על העובדה ש:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}x\frac{1}{2}$$

ואם נבטא את $\frac{1}{2}$ כסכום של שברי יחידה הרי שנקבל:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}x\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

נשתמש בדרך זו על מנת למצוא שני שברי יחידה שסכומם $\frac{1}{6}$ ונגלה שיש יותר מפתרון אחד:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$$

ננסה לבדוק באילו מקרים נקבל יותר מפתרון אחד, ונגלה שכאשר המכנה מתפרק לגורמים השונים זה מזה (ואינם 1 או המכנה), נקבל יותר מאפשרות אחת לבטא את השבר כסכום של שני שברי יחידה שונים. אבל האם בדרך זו מצאנו את כל האפשרויות ?

ננסה למצוא עוד אפשרויות לבטא את $\frac{1}{6}$ כסכום של שני שברי יחידה ונמצא גם את הפתרון:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$$

עכשיו נשאלות השאלות:

א. עבור אילו שברים אפשר למצוא **רק** אפשרות אחת שבה אפשר לבטא את השבר כסכום של שני שברי יחידה שונים?

ב. עבור אילו שברים אפשר למצוא **יותר** מאפשרות אחת שבה אפשר לבטא את השבר כסכום של שני שברי יחידה שונים? והאם ניתן למצוא כלל למספר האפשרויות שבהן אפשר לבטא את השבר כסכום של שני שברי יחידה שונים?

כדי לגלות את התשובות לשאלות אלו נבקש מהתלמידים למצוא את כל האפשרויות לבטא את השברים הבאים כסכום של שני שברי יחידה: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{11}$

התלמידים יגלו שאם המכנה הוא מספר ראשוני, אז ישנה רק אפשרות אחת לפתרון.

כלומר, אם n מספר ראשוני אזי:

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

היא הדרך היחידה שבה ניתן לבטא את השבר כסכום של שני שברי יחידה שונים.

אפשר להוכיח מסקנה זו בדרך אלגברית:

נתון $n>1$ טבעי ועלינו למצוא שני מספרים טבעיים a , b כך ש-

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

מכאן נובע שאחד מהשברים $\frac{1}{a}$ או $\frac{1}{b}$ גדול מ- $\frac{1}{2n}$

והשני קטן מ- $\frac{1}{2n}$.

נניח כי $\frac{1}{a}>\frac{1}{2n}$,

וידוע כי $\frac{1}{n}<\frac{1}{a}$, (ולכן $n<a<2n$).

קיים u טבעי כך ש- $a=n+u$,

$1\le u<n$

מכאן ש:

$$ab=n(a+b)\Leftrightarrow\frac{1}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

$$(n+u)b=n(n+u+b)\Leftrightarrow$$

$$nb+ub=n^2+nu+nb\Leftrightarrow$$

$$ub=n^2+un\Leftrightarrow$$

$$b=\frac{n^2}{u}+n$$

מאחר ו- b מספר טבעי אזי $\frac{n^2}{u}$ חייב להיות מספר טבעי. לכן u חייב להיות אחד המחלקים של - n^2.

מאחר ו- $u<n$ אזי u הוא אחד המחלקים של n^2 הקטנים מ- n .

נשאלת השאלה: מה הוא מספר המחלקים של n^2 הקטנים מ- n?

אם n ראשוני אזי המחלקים של n^2 הם: 1, n, n^2.

לכן $u=1$. לכן יש פתרון אחד ויחיד לבעיית ההצגה של $\frac{1}{n}$ כסכום של שני שברי יחידה שונים.

מכאן, נשאלת השאלה האם כאשר המכנה הוא מספר פריק, אפשר למצוא תמיד יותר מאפשרות אחת לבטא את שבר היחידה כסכום של שני שברי יחידה? מסקנה זו איננה ישירה, ומעניין יהיה לחפש חוקיות למספר האפשרויות שבהן ניתן לבטא את השבר כסכום של שני שברי יחידה שונים כאשר המכנה פריק . בשאלה זו נעסוק בהמשך המאמר בעיתון הבא.

אחרי הסברים חוזרים ונשנים והרבה דוגמאות במשך מספר שיעורים, על כך ש:

$$\lim_{x\to 8}\frac{1}{x-8}=\infty$$

ניסיתי לבדוק אם התלמיד אכן הבין, כך שנתתי לו דוגמה אחרת וזו היתה התוצאה:

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{x-5}=$$