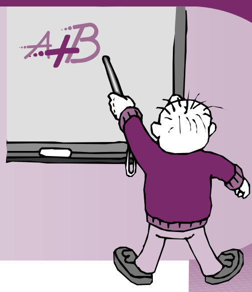


החילוק הארוך כמשל

אורית זסלבסקי, המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים הטכניון, חיפה

מה בעצם השאלה?

אנו נמצאים כיום בעיצומן של התחבטויות קשות בנוגע לצורך ללמוד לבצע אלגוריתמים במתמטיקה בעידן הטכנולוגי בו אנו חיים. אורח החיים והצרכים של האזרח של המאה ה- 21 שונים ממה שהיו בעבר, ורבים תוהים אילו השלכות יש לכך על תכני הלימוד במתמטיקה. באופן מיוחד עולה בימים אלה השאלה אודות מקומם של אלגוריתמים חישוביים בלימוד מתמטיקה בכיתות של ביה״ס היסודי והעל-יסודי. כתוצאה מכך, נערכו לאחרונה במסגרות שונות התדיינויות בין מתמטיקאים לאנשי החינוך המתמטי בארץ על נושאים הקשורים לתכנית הלימודים במתמטיקה[1].

מתמטיקה היא אחד המקצועות הבודדים הנלמדים מראשית ביה״ס היסודי ועד לכיתות הגבוהות של ביה״ס העל-יסודי. מקצוע זה מהווה מחסום עבור תלמידים רבים שמתקשים ואינם מוצאים בו עניין, ויחד עם זאת מקצוע זה משמש בסיס ומנוף ללימודים מתקדמים במדע וטכנולוגיה לבעלי עניין וכישרון. הבעיה חמורה במיוחד מכיוון שמחד, יש מגמה לדחות את הדיפרנציאציה של התלמידים במתמטיקה ככל שניתן, על מנת שלא לחסום בפניהם כיווני לימוד בעתיד. מאידך, יש רצון להפחית מאלה חסרי הנטייה או היכולת להגיע ללימודים מתקדמים במתמטיקה את החובה ללמוד נושאים מתמטיים המהווים עבורם מעמסה וקושי. מפאת חשיבותו, מרכזיותו ובעייתיותו של המקצוע, יש חשיבות מכרעת לתכנים הנכללים בתכניות הלימודים במתמטיקה ולדרכי הוראתם.

אחת השאלות שעולות לעיתים מזומנות קשורה למקומם של אלגוריתמים חישוביים שונים בתכנית הלימודים, ובפרט לצורך ללמוד את האלגוריתם הקלאסי לחילוק ארוך. זו דוגמה לאלגוריתם אשר אין הסכמה לגבי מידת נחיצותו ותרומתו ללימוד המתמטיקה. חלק גדול מהטיעונים הנשמעים במסגרות אלה נשענים על תפיסות עולם וערכים תרבותיים של אנשי המקצוע השונים. יש הגורסים כי כיום, בעידן המחשבונים והמחשבים, חשיבותם של רבים מהאלגוריתמים הקלאסיים, כגון האלגוריתם לחילוק ארוך, ירדה באופן ניכר. לפיכך, הם ממליצים לצמצם את היקף לימוד האלגוריתם הזה או אף להוציאו לגמרי מתכנית הלימודים. לעומתם, יש הטוענים שאין לצמצם את הלימוד של האלגוריתם לחילוק ארוך מכיוון שהוא מהווה חלק בלתי נפרד מתרבות המקצוע, ומשמש בסיס להבנת מושגים ועקרונות מתמטיים עמוקים ויסודיים, כגון, המבנה העשרוני, מושג השארית ומושג המחזור, אמדן, הייצוג העשרוני של מספרים רציונליים ואי-רציונליים, חילוק פולינומים ועוד (Klein & Milgram, 2002). מכאן עולה השאלה אם אמנם לימוד האלגוריתם לחילוק ארוך מסייע להבנת המושגים והעקרונות הללו.

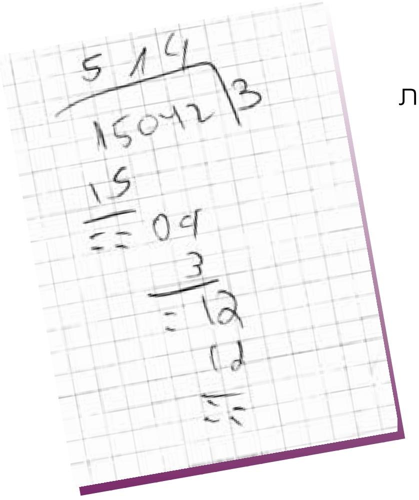
מן הראוי שבדיון באלגוריתם לחילוק הארוך תהיה התייחסות גם למה שידוע על הקשיים וההישגים הנמוכים של תלמידים בביצוע חילוק ארוך (Kilpatrick et al, 2001).
נשאלת השאלה אם הישגים נמוכים אלה הם תולדה של הוראה לא מתאימה, או שמא יש לאלגוריתם זה מאפיינים מיוחדים, כמו חוסר שקיפות ביחס למושגים והעקרונות העומדים בבסיסו, המקשה על הבנתו ועל מתן משמעות לשלבים השונים בביצועו (Lampert, 1992).

כמה אנקדוטות

על מנת להדגים את סוג הקשיים עליהם מדובר, מובאים להלן קטעים מראיון עם איתי - תלמיד מצטיין במתמטיקה בכיתה ח, משכבה סוציו-אקונומית גבוהה מאוד, הלומד

[1] המאמר מבוסס על מושב ביום עיון במכון ויצמן, שאורגן ע״י פרופ׳ אברהם הרכבי בדצמבר 2002, בו נדונו סוגיות השנויות במחלוקת שיש להן נגיעה לחינוך המתמטי בבית הספר היסודי. במושב זה, הציגו את גישותיהם מחברת המאמר ופרופ׳ אודי דה-שליט, מאוניברסיטת ירושלים.

בבית ספר מוביל בארץ. הוא זוכר שלמד בביה"ס היסודי את האלגוריתם לחילוק ארוך ושהוקדש זמן רב לתרגול הנושא. איתי התבקש לחלק את המספר 15,042 ב- 3. הוא טעה בחישוב והגיע לתשובה לא הגיונית. להלן האופן שביצע זאת:



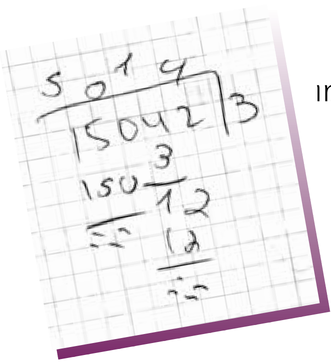
מראיינת: מה המשמעות של התוצאה שקיבלת?

איתי: המשמעות היא שברגע שאני כופל את 514 ב - 3 יצא לי 15,042.

מראיינת: וזה הגיוני?

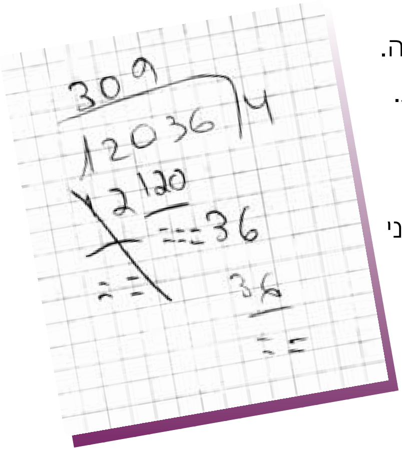
איתי: ממש לא. אבל אין לי, מבחינת המתמטיקה, איך לגלות איפה טעיתי. רק לימדו אותי בתור שיטה, שאם זה פועל אז זה עובד. אבל לא לימדו אותי את המשמעות.

תרגיל זה מצביע על כך שאיתי, כנראה, אינו רואה את הקשר בין שלבי הביצוע של האלגוריתם לחילוק ארוך לבין המבנה העשרוני. הבנה זו לא התפתחה אצלו באופן מלא על-ידי ביצוע האלגוריתם. להלן הניסיון שלו לפתור מחדש את התרגיל וההסבר שנתן:



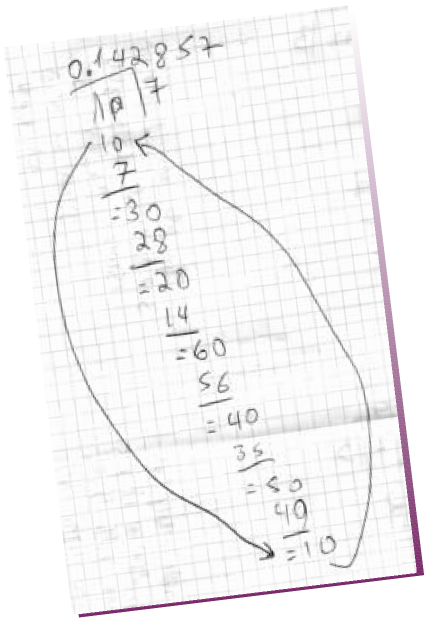
איתי: אם עושים אפס בעצמו אין לו משמעות, צריך לצרף אותו למה שקודם. אם הוא בסוף, יש לו משמעות. רק בהתחלה אפשר להוריד אותו.

ניכר שאיתי למד לבצע את האלגוריתם לחילוק ארוך באופן טכני ולא הבין את המשמעות של השלבים השונים, במיוחד כאשר הספרה "0" מופיעה במחולק. לכן לא היו לו כלים להתמודד עם הבעיה שניצב בפניה. מאחר והוא ילד מוכשר, השכיל להמציא דרך שתפתור את הבעיה, על-ידי חלוקה שונה של המספר הנתון: במקום לשאול "כמה פעמים 3 נכנס ל- 15?", כפי שעשה בהתחלה ושגה בהמשך, הוא שאל את עצמו "כמה פעמים 3 נכנס ב- 150?", רשם 50 והמשיך הלאה. הפעם הגיע לתשובה הנכונה. אך מסתבר ששיטתו המקורית של איתי בלבלה אותו בתרגיל הבא:

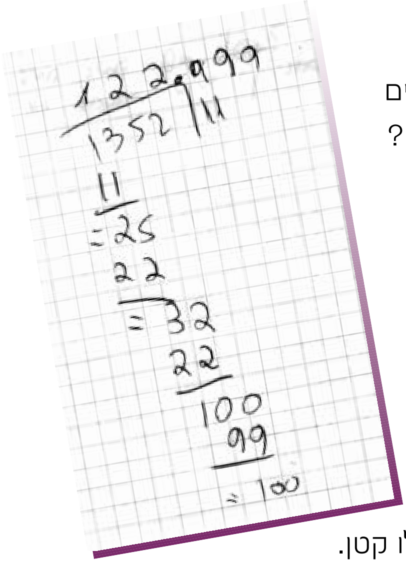


איתי: שוב הבעיה של מקודם. אני שם קו על זה. שוב יוצא לי אותה טעות. יצא לי 30. יצא לי 36 חלקי 4 שזה 9. אני לא יכול לדעת מה אני טועה. אין לי שום דרך למצוא את התשובה. רק בערך. אני יכול לנסות לכפול. אני רואה שזה בסביבות 3000.

לעומת הקשיים שבאו לידי ביטוי בתרגילים הקודמים, התרגיל הבא שאיתי ביצע מצביע על סוג הבנה שכנראה התפתחה אצלו בעקבות ביצוע האלגוריתם לחילוק ארוך ואף נשמרה לאורך זמן. איתי התבקש לחלק 1 ל- 7. אמנם את השלב שבו רשם את הנקודה העשרונית ו"הוריד" אפס לא יכול היה להסביר. לעומת זאת, הרעיון שיש מספר סופי של שאריות ושאם השארית חוזרת על עצמה, הרי שמכאן כל התהליך יחזור על עצמו, הבין יפה, כפי שמשתקף מאופן הרישום שלו:



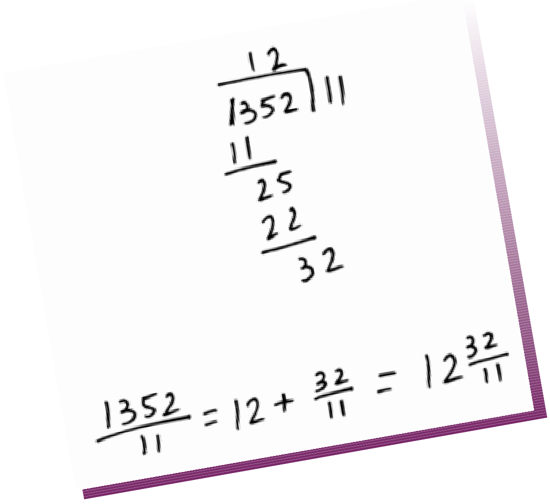
התרגיל הבא של איתי ממחיש כיצד הרעיון של המחזוריות נקלט אצלו יפה, אף כי טעה בחישוב הסופי, כתוצאה מהיעדר הבנה מספקת של השתקפות המבנה העשרוני בשלבי האלגוריתם:



מראיינת: למה "מורידים אפס" כששמים נקודה?

איתי: זה לא הסבירו.
אני חושב שהמספר
אחרי הנקודה - הערך
שלו יותר נמוך.
אני לא יכול לחלק
10 ב- 11.
כשמעבירים לאחרי
הנקודה - אז הערך שלו קטן.

דוגמה אחרת המשקפת את הקושי בהבנת ערך המקום בביצוע של האלגוריתם לחילוק ארוך מובאת להלן. זהו תרגיל שבוצע על-ידי סטודנט לתואר ראשון במדעים:



ניכר כי הסטודנט לא הבין שהמספר 12 בתוצאה שקיבל מייצג 12 עשרות. אילו היה ער לכך, היה כנראה רושם:

$$\frac{1352}{11} = 120 + \frac{32}{11} = 120 + 2.0909... = 122.0909...$$

או:

$$\frac{1352}{11} = 120 + \frac{32}{11} = 120 + 2\frac{10}{11} = 122\frac{10}{11}$$

מעניין שאותו סטודנט לא הבחין בכך שהתוצאה איננה הגיונית מבחינת סדר הגודל שלה. אפשר לראות בכך חיזוק לסברה שאנשים נוטים להתייחס לביצוע האלגוריתם כאל מהלך טכני גרידא המנותק מכל היגיון ומשמעות.

דוגמאות נוספות לביצוע טכני ללא כל הבנה, מצאנו כאשר נתנו לאנשים המורגלים בביצוע האלגוריתם בסימון אחד לבצעו כשהוא ניתן בסימון הפוך. בקרב דוברי אנגלית או ערבית, למשל, מקובל לרשום את התרגיל שלעיל כך (כשהמחלק משמאל למחולק): $11\overline{)1352}$ במקום כך (כשהמחלק מימין למחולק): $\overline{1352}|11$. במספר לא מבוטל של מקרים, נחשפה בפנינו אי-היכולת של בוגרי מערכת החינוך הלומדים במוסדות להשכלה גבוהה לבצע את החישוב כשהתרגיל ניתן בסימון שאינם רגילים לו, אף כי הבינו את שעליהם לחשב.

הרהורים ומחשבות נוספות

הדוגמאות המתוארות לעיל לא נדגמו באופן שיטתי ואינן מתיימרות לייצג אוכלוסייה שלמה של תלמידים ובוגרי מערכת החינוך בארץ. אולם די בהן כדי לעורר תמיהות ושאלות, מאחר ומדובר במקרי "קצה" - בעלי כשרון ויכולת שזכו לתנאים אופטימאליים שמערכת החינוך מספקת.

לא ברור מה צריך לדעת ולהבין על מנת שהלימוד והתרגול של ביצוע האלגוריתם לחילוק ארוך יתרמו תרומה חיונית לתלמיד. יתכן ולימוד זה יכול לתרום להבנה של מושגים מסוימים, כמו המחזור בפיתוח עשרוני של מספרים רציונליים, ולעומת זה לא לסייע כלל להבנת מושגים אחרים, כמו המבנה העשרוני. מסתבר שדרוש ידע מתמטי מעמיק על מנת לראות את הקשרים בין האלגוריתם לבין חלק מאותם מושגים ועקרונות מתמטיים שלגביהם קיימת סברה שהבנתם נתמכת על-ידי לימוד האלגוריתם לחילוק ארוך. בעוד שהאלגוריתם לחילוק ארוך מבליט את הרעיון של המחזוריות, וכנראה שגם את מושג השארית, ובנוסף הוא מחייב לעסוק באומדן, הוא איננו שקוף די הצורך כדי לראות דרכו ובאמצעותו את המבנה העשורי, למשל. דרך אגב, בנוגע לטענה בדבר הקשר בין האלגוריתם לחילוק ארוך לבין חילוק פולינומים - הדעה הרווחת היא כי השליטה בחילוק הארוך מסייעת להבנה ולביצוע חילוק פולינומים. אולם ניתוח מתמטי של שני האלגוריתמים מראה כי באורח מפתיע, לכאורה - חילוק פולינומים "קל" יותר, מבחינת

שקיפותו למבנה של הפולינומים. אין ראיות לכך ששליטה בביצוע חילוק ארוך מסייעת לביצוע חילוק של פולינומים.

יש כיום ניסיון לסייע לתלמידים ללמוד לבצע אלגוריתמים שונים בצורה קליטה יותר ומתוך הבנה, בין היתר, על-ידי הפיכתם לשקופים ונגישים יותר. כך, למשל, Wu (1999) מציע דרכים להפוך את האלגוריתם לחיבור לנגיש ושקוף יותר ומתוכו לבנות את האלגוריתם הכללי. לדוגמה, את התרגיל הבא: 59+34 הוא מציע לבצע בשלבים שיבהירו את הרעיון הבסיסי ויהוו משענת לילדים שמתקשים לבצע את האלגוריתם הקלאסי:

$$\begin{array}{l} 50 + 9 \\ 30 + 4 \\ \hline 80 + 13 \end{array}$$

באופן דומה, מקובל להציע דרך שקופה יותר שתהווה משענת לתלמידים הלומדים את החילוק הארוך, למשל, בדרך הבאה:

לחישוב התרגיל: 1352 :11

בשלב ראשון, מבצעים סדרה של תרגילי חיסור, לפי יכולת האומדן המתאימה לרמת התלמיד, למשל, כך:

$$\begin{array}{l} 1352 - 11\cdot\boxed{100} = 252 \\ 252 - 11\cdot\boxed{10} = 142 \\ 142 - 11\cdot\boxed{10} = 32 \\ 32 - 11\cdot\boxed{2} = 10 \\ \hline 1352 : 11 = \boxed{100} + \boxed{10} + \boxed{10} + \boxed{10} + \boxed{2} + \frac{10}{11} = 122\frac{10}{11} \end{array}$$

בשלב מתקדם יותר, מוצע לבצע סדרה של תרגילי חיסור, התואמת יותר את האלגוריתם הקלאסי, ולהדגיש את ההתאמה בין כל שלב באלגוריתם לבין הסדרה ה"שקופה" יותר:

$$\begin{array}{l} 1352 - 11\cdot\boxed{100} = 252 \\ 252 - 11\cdot\boxed{20} = 32 \\ 32 - 11\cdot\boxed{2} = 10 \\ \hline 1352 : 11 = \boxed{1}\cdot 100 + \boxed{2}\cdot 10 + \boxed{2}\cdot 1 + \frac{10}{11} = 122\frac{10}{11} \end{array}$$

אמנם ככל שתרגילי החילוק מורכבים יותר, ובמיוחד כשיש המשך מעבר לנקודה העשרונית, הדגמת השקיפות יותר קשה, אך היא בכל זאת אפשרית.

אחת השאלות שעולה לעיתים קרובות קשורה לפער בין הידע המבוסס שדור ההורים ו/או הסבים מפגין ללא קושי, בדרך כלל, בביצוע חילוק ארוך מסובך, לבין היעדר השליטה של "דור ההמשך". אינני סבורה שיש לכך קשר לשיטות ההוראה. הרי יש שונות גדולה כל כך בין מורים ובין גישות להוראת הנושא. הסבר יותר משכנע, לטעמי, נעוץ בנחיצות השימוש באלגוריתם מחוץ לכותלי הכיתה. בעבר, השליטה בביצוע האלגוריתם לחילוק ארוך הייתה צורך כמעט קיומי, וגם אם נלמד באופן טכני בלבד, ההזדמנויות הרבות ליישם אותו בהקשר רלבנטי סייעו בהפיכתו לאוטומטי. כיום, בעידן המחשבים והמחשבונים, אין שום סיכוי שתלמידים ובוגרים יזדקקו לביצוע יומיומי של חישובים כאלה. כנראה שהסיכון שמא מדי פעם המחשבון לא יהיה זמין לצורך חישוב זה או אחר, איננו גורם מספיק מדרבן כדי להשקיע את הזמן והמאמץ הדרושים על מנת להגיע לשליטה מלאה בביצועו. מצב זה חייב להילקח בחשבון בקביעת מקומם של אלגוריתמים חישוביים בתכניות הלימודים במתמטיקה.

איך להחליט?

נראה לי ששאלה כמו: "האם צריך ללמד את האלגוריתם הקלאסי לחילוק ארוך?" היא שאלה שלא ניתן לתת עליה תשובה ברורה. הצעתי היא, במקום לשאול שאלה מעין זו, להתייחס לאוסף של שאלות מקושרות, שמכלול התשובות עליהן יוכל לסייע למקבלי ההחלטות וקובעי מדיניות החינוך המתמטי בארץ. להלן חלק מהשאלות שיש מקום לדון בהן.

- מדוע ולאיזו מטרה כדאי ללמד את האלגוריתם לחילוק ארוך?

לפני קבלת החלטות לגבי מקומו של החילוק הארוך בתכנית הלימודים, חשוב לקבוע מה מטרת הלימוד שלו: האם המטרה היא לבסס ידע והבנה של נושאים אחרים? לטעום מתרבות המקצוע? להידמות למדינות אחרות? להבין את הרעיון המרכזי שעליו מושתת האלגוריתם? להגיע לשליטה חלקית או מלאה בביצועו? מה רוצים שתלמידים "ידעו" או "יבינו" בהקשר לחילוק ארוך? מה רוצים שיישאר גם לאחר פרק זמן נכבד מסיום הלימוד של הנושא? כל מטרה מכתיבה אפיק אחר שיוביל להשגתה. קביעת המטרות קשורה, כאמור, לתפיסות עולם מתמטיות ופדגוגיות.

- מתי רצוי ללמוד את האלגוריתם לחילוק ארוך? בבית הספר היסודי? בבית הספר העל-יסודי? באופן ספירלי לאורך שנים אחדות?

העיתוי המתאים ללימוד האלגוריתם אינו חד-משמעי. לגמרי לא ברור מה הגיל המתאים ביותר לכך ואיזו בשלות מתמטית צריך כדי להפיק מביצועו את המרב.

- מי אמור ללמוד את האלגוריתם לחילוק ארוך?

לאור הקשיים שתוארו לעיל, ואלה המתועדים בספרות המחקרית, נשאלת השאלה אם כל התלמידים חייבים ללמוד זאת או אולי רק תלמידים מתאימים - בעלי עניין או יכולת? איך לעורר מוטיבציה ללמוד את הנושא? אם לימוד הנושא יחייב רק חלק מהתלמידים - איך לקבוע מי המתאימים לכך? באיזה שלב לעשות דיפרנציאציה? מכאן מתעוררות שאלות חברתיות סבוכות.

- עד כמה ללמד את הנושא?

האם מספיק לעסוק בחילוק של מספרים פשוטים? חילוק רק במספרים חד ספרתיים? עד לדו-ספרתיים? יותר? יש הטוענים שהבנת האלגוריתם לחילוק ארוך מתאפשרת באופן מעמיק גם במספרים קטנים יותר, ואין צורך לסבך את האלגוריתם על-ידי עיסוק בחילוק במספר תלת-ספרתי. זאת, בניגוד לאלגוריתמים של החיבור או הכפל הארוך, בהם המעבר לעיסוק במספרים גדולים יותר מקדם את ההבנה שלהם. ובהקשר לשאלה זו, חשוב לקבוע את הדגשים, עד כמה להתייחס לכל היבט, עד כמה לתרגל, עד כמה להבליט את המשמעויות השונות, ועד כמה לקשר למושגים אחרים.

- על חשבון מה ללמד אותו?

גם אם יסכימו כל הנוגעים בדבר כי חיוני ללמוד את האלגוריתם לחילוק ארוך - הרי ההיקף הכולל של תכנית הלימודים במתמטיקה מוגבל, והקצאת הזמן הדרוש לשם כך, מטבע הדברים חייבת לבוא על חשבון נושאים אחרים. תשובה לשאלה זו מחייבת התבוננות כוללת על מטרות הוראת המתמטיקה והתכנים המתמטיים המתאימים וקביעת סדרי עדיפויות, תוך ניתוח מה מרוויחים ומה מפסידים מהעיסוק בחילוק הארוך.

- מה המורים צריכים לדעת כדי ללמד את האלגוריתם לחילוק ארוך?

שאלה זו קשורה לספרה של Ma (1999), העוסק, בין היתר, בסוגיה של הידע המתמטי הדרוש למורים. חשוב לקבוע מה צריך מורה לדעת על מנת ללמד מתמטיקה, ובפרט את האלגוריתם לחילוק ארוך, כך שיתרום להבנה ולא ייעשה באופן טכני בלבד ללא הבנת המשמעות שלו. כל החלטה חייבת להיות מלווה בהתאמת ההכשרה של המורים הרלבנטיים ללמד באופן המצופה מהם מבחינת ההעמקה המתמטית והקישור לנושאים מתקדמים יותר.

המשל והנמשל

החילוק הארוך נבחר כאן כדוגמה לאלגוריתם חישובי הנלמד במשך שנים רבות כחלק אינטגרלי של תכנית הלימודים בביה"ס היסודי. אף כי יש בו מאפיינים ספציפיים, כמו העובדה שמתחילים לבצע אותו משמאל (לעומת חיסור וחיבור רב ספרתיים המתבצעים מימין), הוא מהווה אלגוריתם בסיסי ואוניברסלי של אחת מבין ארבע פעולות החשבון היסודיות. חלק גדול מהשאלות המתעוררות סביב נחיצותו מתאימות גם לאלגוריתמים אחרים.

מן הראוי להדגיש שאין מדובר בדיכוטומיה. יש לקחת בחשבון את יחסי הגומלין בין הבנה מושגית לביצוע אלגוריתם. רבות נכתב על יחסי גומלין אלה. בין הטענות הנשמעות: ביצוע פרוצדורות מתמטיות תומך גם בהתפתחות של הבנה, הבנה של פרוצדורות משפרת את ביצוען, חשוב לבסס את ההבנה של אלגוריתם כדי להניע תלמידים להשתמש בו ולהביאם להבין את אשר הם מבצעים (Slesnick, 1982; Nesher, 1986; Hiebert, 1988; Hiebert & Carpenter, 1992; Wu, 1999; Schoenfeld, 2002; Siebert, 2002).

בדיון בקהילייה הבינלאומית בשאלת יחסי הגומלין בין הבנה לביצוע, נטען כי יש היבטים כלליים החלים על ביצוע אלגוריתמים כלשהם, ויש היבטים ספציפיים הקשורים לאלגוריתם המסוים בו דנים.

ניסיתי להתייחס אל התרומה האפשרית של לימוד האלגוריתם לחילוק ארוך להבנת נושאים מתמטיים הקשורים אליו ואל מגבלותיו, תוך העלאת קריטריונים שיש לשקול בעת קבלת החלטות לגבי מקומו של האלגוריתם הזה בתכנית הלימודים במתמטיקה. חלקם ספציפיים לאלגוריתם זה וחלקם כלליים יותר. אפשר לשאול שאלות דומות בקשר לאלגוריתמים אחרים - כאלה שנכללים בתכנית הלימודים, כגון האלגוריתם לכפל ארוך, או כאלה שאינם נכללים כיום בתכנית הלימודים, כגון האלגוריתם להוצאת שורש ריבועי, או האלגוריתם של אוקלידס.

{מקורות}

Hiebert, J. (Ed.) (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). NY: Macmillan.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics.* Washington, DC: National Academy Press.

Klein, D., & Milgram, R. J. (2002). The role of long division in K-12 curriculum. ftp://math.stanford.edu/pub/papers/milgramlong-division/longdivsiondone.htm

Lampert, M. (1992). Teaching and learning long division for understanding in school. In G. Leinhardt, R. T. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), *The Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching* (pp. 221-282). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Ma, L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Nesher, P. (1986). Are mathematical understanding and algorithmic performance related? *For the Learning of Mathematics*, 6(3), 2-8.

Schoenfeld, A. H. (2002). Making mathematics work for all children: Issues of standards, testing, and equity. *Educational Researcher*, 31(1), 13-25.

Siebert, D. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: The case of division and fractions. In L. J. Morrow, & M. J. Kenney (Eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: NCTM 2002 Yearbook* (pp. 247-256). Reston, VA: NCTM.

Slesnick, T. (1982). Algorithmic skill vs. conceptual understanding. *Educational Studies in Mathematics*, 13, 143-154.

Wu, H., (1999, Fall). Basic versus conceptual understanding. *American Educator*, 1-7.

תודות - תודה לאירית פלד, שמאז יום העיון בו הצגתי דברים אלה, גילתה עניין בנושא והפכה לשותפה למחשבה ולתכנון מחקר אמפירי בתחום זה. תודה גם לאירה רווה, שהביעה רצון להתעמק בסוגיות אלה ולהפוך אותן למוקד המחקר שלה במסגרת לימודיה לקראת תואר שני בטכניון.