אפשר גם אחרת

מה נעשה עם מספרים ראשוניים בכיתה?

ליאורה הוך, מכללת תלפיות, מכללת אורות

מספר ראשוני הוא מספר אשר לו בדיוק שני גורמים שונים: 1 והמספר עצמו.
מהגדרה זו נובע כי המספר 1 אינו מספר ראשוני.

מספר פריק הוא מספר אשר יש לו יותר משני גורמים שונים.

מהגדרה זו נובע כי המספר 1 הוא גם לא מספר פריק. לפיכך לא ניתן להגדיר מספר פריק כמספר שאיננו ראשוני, שהרי אם נגדיר אותו כך, הרי שגם 1 יכלל בין המספרים הפריקים.

את המספרים הראשוניים מכירים התלמידים בבית הספר היסודי בכיתה ד׳.
התלמידים לומדים את ההגדרות של מספרים ראשוניים ופריקים, ומתנסים בבניית מספרים פריקים ממספרים ראשוניים ובפירוק מספרים פריקים למספרים ראשוניים. במאמר זה יועלו הצעות לפעילויות שונות העוסקות במספרים ראשוניים ופריקים. פעילויות אלו יכולות להוות נדבך נוסף להכרת מספרים אלו, מעבר לתכונות שהוזכרו לעיל. בנוסף לכך, באמצעות פעילויות אלו יוכלו התלמידים לפתח אסטרטגיות פתרון ודרכי חשיבה מתמטיות. את הבעיות ניתן לפתור על-ידי ניסוי וטעייה, דרך שגם תלמידים שאינם חזקים במתמטיקה יכולים להיעזר בה. אך רצוי לעודד דרכי פתרון המבוססות על אסטרטגיות מתקדמות יותר. לצורך פתרון הבעיות רצוי כי בידי התלמיד תימצא טבלת המספרים הראשוניים עד 100. את הטבלה התלמידים יכולים לבנות בעזרת הנפה של ארתוסטנס. (ניתן למצוא הוראות לבניית הטבלה בספר ״אחת שתיים ו...שלוש״ כרך 10, בהוצאת ת״ל ומט״ח, עמ׳ 146, 147, ובספרים נוספים.)

פעילות א׳

מצאו את כל המספרים הדו-ספרתיים הראשוניים שכאשר הופכים את סדר הספרות שלהם, גם המספר החדש הדו-ספרתי המתקבל הוא ראשוני.

אפשר למצוא את המספרים על-ידי ניסוי וטעייה, אולם, בחיפוש מושכל ניווכח כי לא ייתכן שהספרות 0, 2, 4, 6, 8 תופענה במספר שאותו נחפש. אם אחת מהספרות האלו מופיעה כספרת אחדות, הרי שהמספר הוא זוגי ועל כן אינו ראשוני. אם אחת מהספרות האלו מופיעה כספרת עשרות, לאחר שינוי סדר הספרות תופיע הספרה כספרת אחדות ושוב המספר לא יהיה ראשוני.
גם הספרה 5 לא יכולה להופיע במספר הדו-ספרתי שכן אז המספר או המספר לאחר הפיכתו יתחלק ב- 5.
מכאן שהספרות שיכולות להופיע במספר הן: 1, 3, 7, 9.
הספרות 3 ו- 9 לא תוכלנה להופיע יחד במספר, כי אז המספר יתחלק ב- 3 (על-פי סימן התחלקות של 3).
כלומר, האפשרויות הצטמצמו והמספרים האפשריים הם: 13 ולאחר הפיכה 31, 17 ולאחר הפיכה 71, 19 ולאחר הפיכה 91, (בבדיקה ניווכח ש- 91 הוא כפולה של 7, ועל-כן איננו ראשוני), 37 ולאחר הפיכה 73, 79 ולאחר הפיכה 97.
אפשר להרחיב פעילות זו ולמצוא גם מספרים תלת-ספרתיים העונים על אותה דרישה.

פעילות ב׳

מצאו מבין המספרים הדו-ספרתיים הראשוניים את המספרים שכאשר נמחק את ספרת האחדות שלהם נקבל מספר חד-ספרתי שגם הוא ראשוני.

גם כאן אפשר למצוא את המספרים על-ידי ניסוי וטעייה, אולם בחיפוש מושכל נשים לב שמאחר ומדובר במספרים ראשוניים, ברור שספרת האחדות במספרים איננה זוגית. כמו כן ספרת העשרות אינה יכולה להיות אחת מבין

הספרות 4, 6, 8 שכן לאחר השמטת ספרת האחדות נישאר עם מספר זוגי שאינו ראשוני. (הערה: הספרה 2 יכולה להיות ספרת האחדות שכן 2 הוא המספר הזוגי היחידי שהוא ראשוני!).

גם הספרה 1 אינה יכולה להופיע כספרת עשרות שכן לאחר הורדת ספרת האחדות יישאר המספר 1 שאינו ראשוני.

הספרה 5 אינה יכולה להופיע כספרת אחדות שכן המספר יתחלק ב- 5 (אך כספרת עשרות היא יכולה להופיע). גם 9 לא יכול להופיע כספרת עשרות שכן המספר שייווצר לאחר הורדת ספרת האחדות יתחלק ב- 3.

כלומר, נשארו לנו האפשרויות שבהן ספרת האחדות היא אחת מבין הספרות: 1, 3, 7, 9 וספרת העשרות היא אחת מבין הספרות: 2, 3, 5, 7.

ננסה לבנות את המספרים האפשריים:

המספר הדו-ספרתי	המספר החדש לאחר הורדת ספרת האחדות
23	2
29	2
31	3
37	3
53	5
59	5
71	7
73	7
79	7

המספרים האפשריים הם: 23, 29, 31, 37, 53, 59, 71, 73, 79.

ניתן להרחיב פעילות זו לתלמידים החזקים, ולמצוא גם מספרים תלת-ספרתיים העונים על אותה דרישה.

פעילות ג'

מצאו מספר תלת-ספרתי אשר ספרותיו הם שלושה מספרים ראשוניים שונים, והמספר מתחלק בכל אחת מספרותיו.

כל הספרות של המספר הם מספרים ראשוניים, לכן ארבע הספרות האפשריות הן: 2, 3, 5, 7. קיבלנו אומנם ארבע ספרות אך המספר הוא תלת-ספרתי. לכן יש ספרה אחת מיותרת. כמו כן לא ידוע לנו מהו סדר הספרות במספר התלת-ספרתי.

לא ייתכן ששתי הספרות 2, 5 יופיעו במספר. על-פי סימני התחלקות, כדי שהמספר יתחלק ב- 2, הספרה 2 חייבת להיות ספרת האחדות. כמו כן כדי שהמספר יתחלק ב- 5, הספרה 5 חייבת להיות ספרת האחדות. כלומר, לא ייתכן שגם 5 וגם 2 תופענה במקום של האחדות. לכן נותרנו עם האפשרויות הבאות:

א. הספרות הן 3, 5, 7, ואז נקבל שני סידורים אפשריים: 375 או 735 (הספרה 5 הנה ספרת האחדות, כדי שהמספר יתחלק ב- 5).

ב. הספרות הן 3, 2, 7, ואז נקבל שני סידורים אפשריים: 372 או 732 (הספרה 2 הנה ספרת האחדות, כדי שהמספר יתחלק ב- 2).

נשים לב שכל אחד מבין ארבעת המספרים הנ"ל מתחלק ב- 3. ומכאן שכל מה שעלינו לבדוק הוא איזה מבין המספרים הנ"ל מתחלק ב- 7? התשובה היא 735.

פעילות ד'

כמה זוגות של מספרים ראשוניים עוקבים ניתן למצוא?

ברור כי רק זוג אחד. בכל זוג מספרים עוקבים אחד מהמספרים חייב להיות זוגי. כל מספר זוגי גדול מ- 2 הוא פריק. לכן קיים רק הזוג 2, 3.

פעילות ה'

שני מספרים ראשוניים אשר ההפרש ביניהם הוא 2 נקראים מספרים ראשוניים תאומים.
לדוגמה: 3 ו- 5 או 11 ו- 13.
כמה מספרים ראשוניים תאומים קיימים?

כאשר בונים טבלה של מספרים ראשוניים עד 100,

ומחפשים מספרים תאומים בטבלה, מוצאים בתחילת הטבלה הרבה יותר מספרים תאומים מאשר בהמשך הטבלה. קיימת השערה שככל שהמספרים יגדלו נקבל פחות מספרים ראשוניים תאומים, עד שהם יעלמו.

אפשר לשאול שאלה זו את התלמידים ולשמוע את תגובותיהם.

השערה זו לא הוכחה והבעיה היא בעיה פתוחה שעדיין לא נמצא לה פתרון. רצוי להציג בפני התלמידים גם בעיות פתוחות על מנת שהתלמידים יחושו שהמתמטיקה היא מקצוע דינמי, אשר מתפתח בהתמדה, או כפי שהיא מכונה במקרים רבים "המתמטיקה כפעילות אנושית". בטקס הפתיחה של האוניברסיטה העברית שנערך ב- 1 באפריל 1925 על הר הצופים, נשא המתמטיקאי אדמונד לנדאו מאוניברסיטת גטינגן (מהמרכזים המתמטיים החשובים ביותר בעולם באותה עת) הרצאה שנושאה "שאלות פתורות וסתומות בתורת המספרים האלמנטרית". השאלה השישית שהציג עסקה בבעיה זו, ותשובתו לה הייתה: "זאת ידע השטן, רצוני לומר חוץ מריבונו של עולם אין מי שיודע זאת, אפילו לא ידידי הרדי (Hardy) באוקספורד, אשר בין כל העובדים אתי הנו החוקר המעמיק ביותר בשדה חקירה זה".

(www.workjoke.com/puzzles/puzzle1u.htm)

דוגמא למורה שהתנסתה בכיתה בפעילויות עם בעיות פתוחות ועל חוויותיה ניתן לקרוא אצל קוצר (2003).

פעילות ו'

שלשה של מספרים ראשוניים תאומים היא שלשה של מספרים שההפרש בין כל שניים מהם הוא 2.
דוגמה לשלשה כזו היא: 3, 5, 7.
בעיה: מצאו שלשה נוספת של מספרים ראשוניים תאומים.

נסמן את שלשת המספרים על ידי x, $x+2$, $x+4$ (כיוון שנתון שהם ראשוניים תאומים).

מאחר ושלושת המספרים הם מספרים ראשוניים ברור כי כל אחד משלושת המספרים חייב להיות מספר אי-זוגי (האפשרות היחידה לקבל מספר ראשוני זוגי הוא 2, אך המספר הבא הוא 4 שאינו ראשוני, ועל כן אפשרות זו נפסלת).

מכיוון שנתונים שלושה מספרים שההפרש בין כל שניים מהם הוא 2, הרי שאחד המספרים הוא כפולה של 3. נוכיח זאת על סמך תכונת החילוק ב- 3. אם המספר x מתחלק ב- 3 והוא אינו 3, הרי שהוא אינו מספר ראשוני. אם הוא 3 כבר מצאנו את השלשה.

אם המספר x משאיר שארית 1 לאחר חלוקה ב- 3, הרי שהמספר הגדול ממנו ב- 2 יתחלק ב- 3. ואם המספר x משאיר שארית 2 בחלוקה ל- 3, הרי שהמספר הגדול ממנו ב- 4, יתחלק ב- 3.

מכאן שאין שלשה נוספת של מספרים ראשוניים תאומים.

אפשר להרחיב את הבעיה ולחפש סדרה של שלושה מספרים ראשוניים אשר ההפרש בין שני מספרים סמוכים הוא מספר זוגי כלשהו. ניתן להוכיח על-פי העיקרון הנ"ל כי לא נוכל לקבל שלשה של מספרים ראשוניים העונה לתנאי.

פעילות ז'

הראו שסכום שני מספרים ראשוניים תאומים מתחלק ב- 4.

כאמור, מספר תאום למספר ראשוני הוא מספר ראשוני הגדול מהמספר הראשוני הקטן ב- 2. מאחר וכל מספר ראשוני הגדול מ- 2 הוא אי-זוגי, הסכום המבוקש יהיה סכום של שני מספרים אי-זוגיים. נסמן את המספר הראשון ב- a לכן המספר השני הוא $a+2$, נחבר ונקבל:

$a+ (a+2)= 2a+2 = 2(a+1)$.

מכאן ברור כי הסכום מתחלק ב- 2.

כמו כן $a+1$ הוא מספר זוגי (כי a מספר ראשוני אי-זוגי) ומכאן כי הסכום מתחלק ב- 4.

אפשר להציג זאת גם בדרך אחרת:

המספר הראשוני הקטן יהיה $2a-1$ (כאשר $a>1$). בחרנו בייצוג של מספר אי-זוגי משום שלמספר הראשוני 2, שהוא הראשוני הזוגי היחיד, אין מספר ראשוני תאום.

המספר הראשוני התאום ל- $2a-1$ יהיה $2a+1$ ואז:

$(2a-1)+(2a+1)=4a$

כלומר, קיבלנו מספר המתחלק ב- 4.

פעילות ח'

מצאו שלשה של מספרים ראשוניים אשר ההפרש בין כל שני מספרים סמוכים הוא 3.

אם המספר הראשון הוא זוגי, האפשרות היחידה היא 2, על כן המספר הבא אחריו הוא 5 והבא אחריו הוא 8 אשר אינו ראשוני.

לכן המספר הראשון הוא אי-זוגי המספר הבא אחריו הוא זוגי גדול מ- 2. (שכן מספר אי-זוגי ועוד מספר אי-זוגי ייתן מספר זוגי). אם המספר השני הוא זוגי, הרי שהוא מספר פריק. ומכאן ברור כי לא נוכל למצוא שלשת מספרים

ראשוניים שההפרש בין כל שני מספרים סמוכים הוא 3.
בעיה זו ניתנת להרחבה עבור כל שלשה בה ההפרש בין כל שני מספרים סמוכים הוא מספר אי-זוגי.

הפעילויות הבאות, גם הן עוסקות בנושא הראשוניים והפריקים. בפעילויות אלה התלמידים צריכים להחליט עבור טענות מסוימות, אם הן שקריות או אמיתיות.
סוג זה של פעילות חשוב, בכל נושא, שכן דרכו נפגש הלומד עם אחת הדרכים להוכחה מתמטית. רצוי להרגיל את התלמיד לחשיבה מתמטית נכונה ולקרבו לנושא ההוכחות כהכנה להמשך לימודי המתמטיקה.
בסוג זה של פעילות חשוב לזכור שכאשר אומרים שהטענה נכונה מתכוונים לכך שהטענה נכונה תמיד, כלומר, עבור כל מקרה בו ההנחות מתקיימות גם התוצאה מתקיימת. במקרה זה צריך להוכיח באופן כללי את נכונות הטענה. כאשר נאמר כי הטענה אינה נכונה, איננו מתכוונים כי אף פעם לא ייתכן מצב בו הטענה תתקיים. כוונתנו לומר כי נמצא לפחות מקרה אחד בו הטענה לא תתקיים. אבל יכולים להיות מצבים אחרים בהם הטענה כן תתקיים. ייתכן כי תהיינה טענות עבורן לא נוכל למצוא אפילו מקרה אחד בו הטענה תתקיים.

פעילות ט׳

דני טוען כי סכום שני מספרים ראשוניים הוא מספר ראשוני. האם אתה מסכים לאמירתו של דני?

אמירה זו אינה נכונה וקל למצוא דוגמאות רבות לשני מספרים ראשוניים שסכומם איננו מספר ראשוני.
יש מספרים ראשוניים שאם מחברים אליהם את המספר הראשוני 2, מקבלים מספר ראשוני. לדוגמה: 2+3=5, 2+11=13, ויש גם מספרים ראשוניים שמחברים אליהם את המספר הראשוני 2 ומקבלים מספר פריק. לדוגמא: 2+37=39, 2+73=75.

פעילות י׳

רועי טוען כי סכום שני מספרים פריקים הוא מספר פריק. האם אתה מסכים לאמירתו של רועי?

טענה זו שקרית. לדוגמה: אם נחבר את 9 ל- 4 נקבל 13. ברור כי 9 ו- 4 הם מספרים פריקים אך התוצאה הנה מספר ראשוני.
בהתאם לנאמר בתחילת סעיף זה, קיימים מקרים רבים בהם סכום שני מספרים פריקים יהיה מספר פריק. לדוגמה: כאשר נחבר שני מספרים פריקים זוגיים, התוצאה תהיה מספר זוגי שהוא פריק.

נסו לרשום את המספרים מ- 1 עד 9, מספר אחד בכל ריבוע, כך שסכום כל שני מספרים שכנים (שיש להם צלע משותפת) יהיה מספר ראשוני.

מתוך: אביטל, מתמטיקה בהנאה

פתרון בעמוד 62.

{מקורות}

אחת שתיים ו...שלוש. תל-אביב: הוצאת ת"ל ומט"ח.
האוניברסיטה הפתוחה (1976). **אשנב למתמטיקה**, יחידות 11-12, הוצאת האוניברסיטה הפתוחה, תל-אביב.
קוצר, נ'(2003). בעיות מתמטיות שנשארו פתוחות, לתלמידים. **מספר חזק 2000**, גיליון 5, עמ' 56.
http://www.workjoke.com/puzzles/puzzle1u.htm
http://alefefes.macam.ac.il/riddles/home.asp?subject=11&miun=2