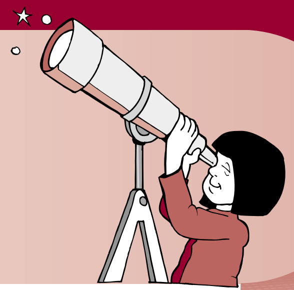


הסברים תוך וחוץ-מתמטיים: המקרה של כפל

אסתר לוינסון, דינה תירוש, פסיה צמיר, אוניברסיטת תל אביב

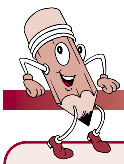
מקובל להשתמש בהוראת חשבון בבתי ספר יסודיים בהמחשות קונקרטיות ובכלל בחפצים (Cramer & Henry, 2002; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989). הצידוק לשימוש זה קשור בכך שתלמידים בבית ספר יסודי מצויים בשלב החשיבה הקונקרטי. גם בתכנית הלימודים של בית הספר היסודי בארץ מובעת תמיכה בגישה זו, "יש להקל על בניית המושגים באמצעות שימוש בהמחשות (...) בניית מושגים בחינוך היסודי נעשית שלא באמצעות הגדרות פורמליות." (תכנית הלימודים, התשמ"ח, עמ' 7-8). לפי המועצה הלאומית של מורי המתמטיקה בארצות הברית (NCTM, 2000), בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה חשוב שההסברים המתמטיים יהיו יותר פורמליים. פישביין (Fischbein, 1987) הוסיף: "חשוב להכין את הלומדים, מוקדם ככל האפשר, להיבטים הפורמליים של המתמטיקה." (עמ' 208, תרגום על- ידי אסתר לוינסון). נשאלות השאלות: האם אפשר להשתמש בהצדקות פורמליות בבית ספר יסודי? האם תלמידים בבית ספר יסודי צעירים מכדי להבין הסברים פורמליים אך יכולים להבין הסברים המסתמכים על מושגים מתמטיים? המחקר המובא כאן מתמקד בהסברים שתלמידים נותנים בבית ספר יסודי. מיקוד זה מאפשר לנו לבחון את ההנחה המקובלת שתלמידים צעירים מבינים רק הסברים מוחשיים או הסברים הקושרים את המתמטיקה לחיי היום-יום. במבט לעתיד, המחקר מאפשר לנו לחקור את האפשרות להציג בבית ספר יסודי הסברים המסתמכים על מושגים מתמטיים.

במשך השנים נחקרו כמה קטגוריות של הסברים. מחקר זה בוחן הסברים תוך-מתמטיים והסברים חוץ-מתמטיים. לפי קורן (2004), "**נימוק חוץ-מתמטי** הוא נימוק המסתמך על ידע לא מתמטי כמו המשמעות של פעולה בשימושיה לפתרון בעיות (איסוף בחיבור, חילוק להכלה וכו'). **נימוק פנים מתמטי** הוא נימוק המסתמך רק על תכונות פורמליות (חוק הפילוג, לאחר שהוכר כתכונה של כפל מעל לחיבור, חוקי חזקות על סמך הגדרת החזקה עם מעריך טבעי ותכונות הכפל, הוכחות על סמך מערכת אכסיומות וכו')". במאמר זה **הסברים תוך-מתמטיים** הם הסברים המסתמכים על הגדרות, משפטים, או תכונות מתמטיות בלבד. הסברים תוך-מתמטיים מסתמכים אך ורק על מושגים מתמטיים אבל הם לא בהכרח הצדקות פורמליות, שהשימוש בהן מתאים בעיקר ללימודי תיכון ומעלה. **הסברים חוץ-מתמטיים** הם הסברים שאינם מסתמכים אך ורק על מושגים מתמטיים. הסברים חוץ-מתמטיים מסתמכים על שימוש באמצעי המחשה ו/או סיפורים מחיי יום-יום המנסים לתת משמעות לביטויים מתמטיים.

חוקרים שונים בחנו את השימוש בהסברים חוץ-מתמטיים. מחקריהם העידו על קשיים שונים של תלמידים בהבנת הסברים אלה (לדוגמה: Szendrei, 1996; Nyabanyaba, 1999; Koirala, 1999; Wu, 1999). לפי Nyabanyaba (1999) השימוש בסיפור מחיי היום-יום בהסברת מושג יכול להוות מוקש לתלמידים מתרבויות שונות, מכיוון שהמציאות של ילד אחד לאו דווקא דומה למציאות של ילד שני. Wu (1999) ציין שהשימוש באמצעים ויזואליים בהסברת חילוק של שברים פשוטים, כגון $\frac{1}{2} : \frac{1}{6}$, עלול לגרום לתחושה קיצונית של אי-ביטחון אצל תלמידים כאשר הם נפגשים בתרגילי חילוק עם שברים שאינם פשוטים ביותר, כגון $\frac{2}{97} : \frac{31}{17}$. המלצת Wu היא להגביר את השימוש בהפשטה כבר מכיתה ה. במספר זעום, יחסית, של מחקרים (לדוגמה: Ball & Bass, 2000; Lampert, 1990) תוארו דיונים כיתתיים בהם הוצגו הסברים תוך-מתמטיים של תלמידים ושל מורים בבתי ספר יסודיים. בכיתות אלה לימדו חוקרים בחינוך מתמטי. המחקר הנוכחי נעשה בקרב תלמידים הלומדים בבתי

ספר יסודיים. המחקר מתמקד בהסברים שתלמידים נותנים לכפל, מתוך ניסיון לבחון האם תלמידים צעירים נוטים להציג גם הסברים תוך-מתמטיים.

את השאלה המרכזית חילקנו לשתי שאלות משנה. עולם המספרים המוכר לתלמידים הוא עולם הטבעיים. מספר מחקרים (לדוגמה: Inhelder & Piaget, 1969; Blake & Verhille, 1985) מעידים על קשיים של תלמידים, צעירים כגדולים, לגבי מושג האפס. רצינו לבדוק האם יהיה שינוי בסוגי ההסברים הניתנים על-ידי תלמידים לפעולת הכפל ללא אפס ולפעולת הכפל באפס. ברוב בתי הספר מתחילים ללמוד כפל בסוף כיתה ב. רצינו לבדוק האם קיים שוני בהסברים שנותנים תלמידים לפני שהמושג נלמד בכיתה ואחרי שהוא נלמד.



שאלת המחקר

אילו סוגי הסברים, תוך-מתמטיים ו/או חוץ-מתמטיים, תלמידים נותנים לתרגילי כפל ולתרגילי כפל המערבים אפס?

א. האם יש הבדל בין סוגי ההסברים שתלמידים נותנים לכפל ללא אפס לעומת ההסברים שהם נותנים לתרגילי כפל המערבים אפס?

ב. האם יש הבדל בסוגי ההסברים של תלמידים בכיתות הנמוכות, שעדיין לא למדו כפל, לבין ההסברים שניתנים על- ידי תלמידים בכיתות גבוהות יותר שכבר למדו כפל?

מהלך המחקר

עשרים ושניים תלמידי כיתה ב (שטרם למדו כפל בכיתה) משלושה בתי ספר, השתתפו במחקר. כיוון שבכיתה ב התלמידים רק בתחילת הדרך מבחינת הקריאה ומבחינת ההבעה בכתב, החוקרת נפגשה עם כל ילד באופן אישי וראיינה אותו. בנוסף לכך, שאלונים הועברו לתשעים ואחד תלמידי כיתות ג, ה, ו מארבעה בתי ספר. התלמידים מילאו את השאלונים בכיתה בנוכחות החוקרת. הצעירים והבוגרים התבקשו קודם לפתור את התרגיל ולאחר מכן להסביר את הפתרון. לשם כך הם התבקשו לדמות מצב בו הם מתבקשים להסביר לחבר בכיתה שלא ידע את הפתרון. להלן התרגילים שדנו בהם:

0X3=   3X0=   2X3=   3X2=

שני התרגילים הראשונים אפשרו לנו לבדוק איך התלמידים הסבירו תרגילי כפל ללא אפס, וכמו כן לבדוק את מידת השימוש בחוק החילוף. שני התרגילים האחרונים אפשרו לנו לבדוק איך הנחקרים פתרו והסבירו תרגילי כפל המערבים אפס, ובפרט, האם יש שוני בין ההסברים ל- 3XO ו- OX3. את התרגיל 3XO אפשר להסביר באמצעות התייחסות לכפל כאל חיבור חוזר, כאשר הגורם הראשון הוא מספר טבעי המתאר את מספר הפעמים בהן יש לחבר את הגורם השני לעצמו. כאשר הגורם הראשון הוא אפס, לא ניתן לפעול כך. לכן מעניין לבדוק איך התלמידים יפתרו ויסבירו את שני התרגילים האלו, וכן לבדוק את מידת השימוש בחוק החילוף.

ממצאים

בחלק זה נתייחס קודם לתשובות התלמידים לתרגילי כפל ללא אפס ולאחר מכן נדון בתרגילי כפל המערבים אפס. חשוב לדעת שהסיווג של ההסברים להסברים תוך-מתמטיים ולהסברים חוץ-מתמטיים דומה בתרגילי הכפל ללא אפס ובתרגילי הכפל המערבים אפס. נציג דוגמאות להסברים שנתנו התלמידים ונסכם את התוצאות.

א. תרגילי כפל ללא אפס

הסברים תוך-מתמטיים

בתרגילים אלו, רוב התלמידים, קטנים כגדולים, הסתמכו על התייחסות לכפל כאל חיבור חוזר. להלן כמה ציטוטים של תשובות תלמידים:

" 2 ועוד 2 זה 4 ועוד 2 זה 6." (כיתה ב)

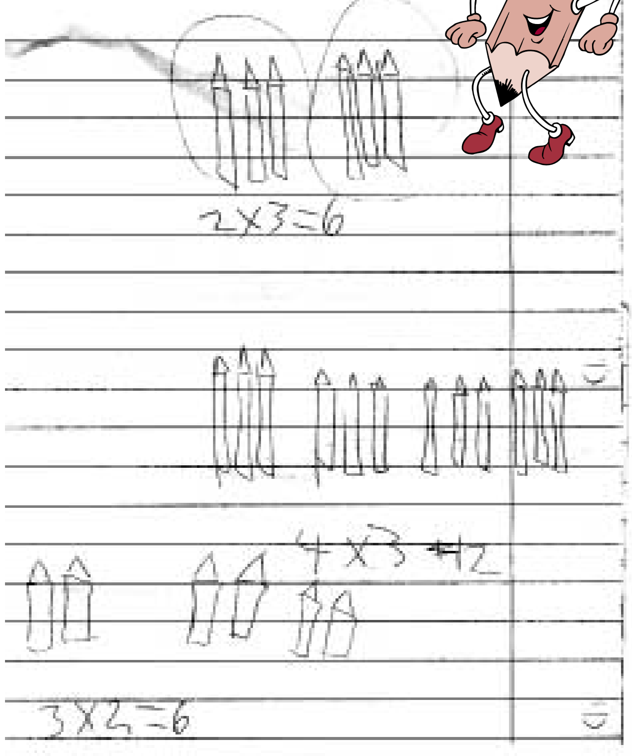
" 2X3=6 בגלל ש- 2+2+2=6." (כיתה ג)

תלמידים רבים התייחסו למשמעות של המילה "פעמים". למשל, תלמיד בכיתה ג כתב עבור התרגיל 2X3, "זה 6 כי 3 פעמים 2 שווה 6". תלמידים אחדים הסתמכו על סדרת מספרים. למשל, תלמיד בכיתה ב הסביר: "רק עשיתי קפיצות של 2, ... 2, 4, 6". בנוסף להסברים שנאמרו לעיל, לתרגיל השני, 2X3, היה הסבר נוסף שהסתמך על חוק החילוף. לא כל התלמידים שהשתמשו בהסבר זה ציטטו את שם החוק במפורש. חלק מהתלמידים הסבירו שסדר הגורמים אינו משמעותי בתרגיל. לדוגמה, תלמיד בכיתה ו הסביר: "2X3=6. זה בדיוק כמו הקודם (3X2). בכפל, כמו בחיבור, זה לא משנה באיזה סדר המספרים". לא נמצאו הבדלים משמעותיים בין שתי האוכלוסיות - הצעירים יותר והבוגרים

יותר, למעט השימוש בחוק החילוף שהופעל רק על-ידי הבוגרים.

הסברים חוץ-מתמטיים

כפי שכבר הוסבר, בהסברים חוץ-מתמטיים נעשה שימוש בידע לא מתמטי. בדרך כלל נעשה שימוש באמצעי המחשה ו/או בסיפורים מחיי יום-יום המנסים לתת משמעות לביטויים מתמטיים. רוב התלמידים שנתנו הסבר חוץ-מתמטי סיפרו סיפור מתאים. לדוגמה, ילד בכיתה ו כתב: "יש 3 כלובים ו- 2 חיות בכל כלוב. עכשיו יש לספור את כל החיות שנמצאות בכלובים". תלמידה בכיתה ב ציירה את הציור שבאיור 1 כדי להדגים למה 2x3=6 ו- 3x2=6.



איור 1

בהתחלה, התלמידה חשבה ש- 2x3 הוא 12. כדי להסביר את הפתרון, היא ציירה 2 קבוצות של 3 עפרונות. היא הבינה את הטעות שלה וניסתה לחשוב כמה קבוצות של 3 עפרונות היא צריכה על מנת שיהיו 12 עפרונות. לכן, רואים בציור 4 קבוצות של 3 עפרונות עם כותרת מתחת "4x3=12". בסוף, היא ציירה 3 קבוצות של 2 עפרונות כדי להדגים את התרגיל 3x2=6.

נבהיר כי כל התלמידים בכל רמות הכיתות (ב, ג, ה, ו) פתרו נכון את שני תרגילי הכפל ללא אפס. רוב התלמידים היו עקביים בשימוש בסוג ההסבר שנתנו. כלומר, תלמיד שנתן הסבר תוך-מתמטי לתרגיל 3x2 נתן הסבר תוך-מתמטי גם לתרגיל 2x3. באותו אופן גם השימוש בהסברים חוץ-מתמטיים היה עקבי. בכל זאת, שלושה תלמידים (בערך 3%) נתנו הסברים מסוגים שונים לשני התרגילים. תלמידים בודדים נתנו הסבר תוך-מתמטי והסבר חוץ-מתמטי לאותו תרגיל. (ראו איור 2).

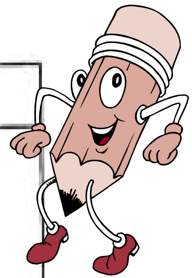
מעניין לציין כי בכל רמת כיתה, יותר תלמידים השתמשו בהסברים תוך-מתמטיים מאשר בהסברים חוץ-מתמטיים. (85%, 86%, 56%, 63% הסברים תוך-מתמטיים לעומת 10%, 0%, 19%, 29% הסברים חוץ-מתמטיים לתרגיל 3x2 בכיתות ב, ג, ה, ו בהתאמה. ו-85%, 89%, 72%, 71% הסברים תוך-מתמטיים לעומת 10%, 19%, 0%, 21% הסברים חוץ-מתמטיים לתרגיל 2x3 בכיתות ב, ג, ה, ו, בהתאמה.) למרות שציפינו שהילדים הצעירים יספרו יותר סיפורים מצאנו שעם העלייה בגיל יש יותר שימוש בהסברים חוץ-מתמטיים. מעניין שדווקא אצל הילדים בכיתות ב רוב ההסברים היו תוך-מתמטיים. אצל התלמידים הבוגרים היה שוני בין שני התרגילים במידת השימוש בהסברים תוך-מתמטיים לבין מידת השימוש בהסברים חוץ-מתמטיים. הבדל זה נובע בעיקר משימוש בחוק החילוף (הסבר תוך-מתמטי). התרגיל 2 כפול 3 הופיע בשאלון אחרי התרגיל 3 כפול 2.

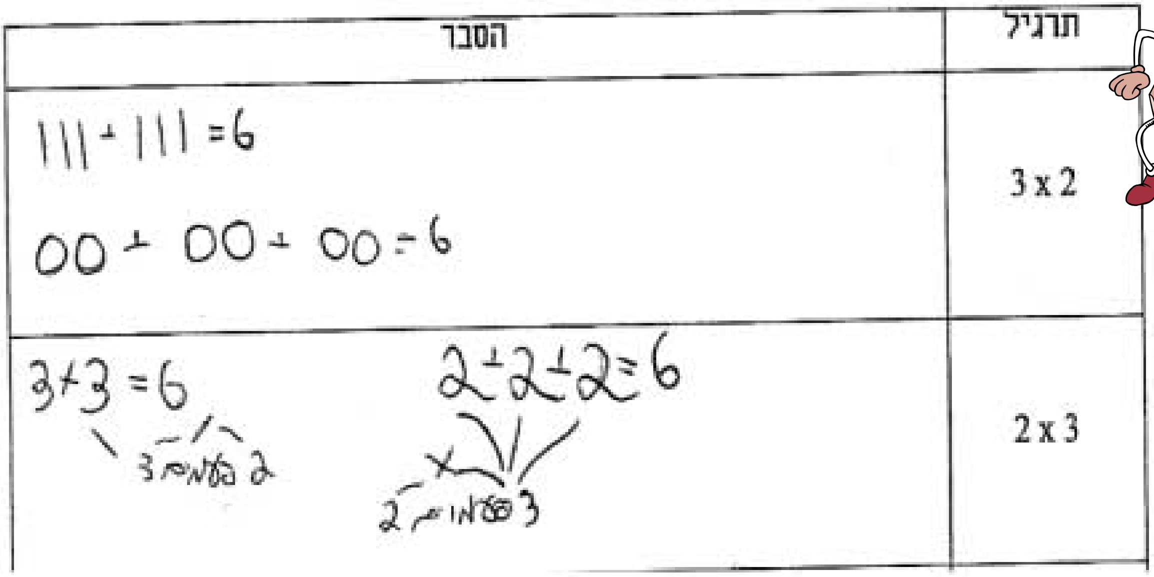
ב. תרגילי כפל המערבים אפס

כפי שכבר צוין, רצינו להתייחס לתרגילי כפל ללא אפס ולתרגילי כפל המערבים אפס. הממצאים מראים כי למרות שכל התלמידים השיבו נכון על תרגילי הכפל שאינם מערבים אפס, תלמידים שעדיין לא למדו את נושא הכפל בכיתה התקשו בפתרון תרגילי כפל המערבים אפס. 15% מתלמידי כיתות ב טעו בתרגיל 3x0 ו- 40% טעו בתרגיל 0x3. כל התלמידים שטעו (פרט לתלמיד אחד), טענו שהפתרון הוא 3. כמעט כל התלמידים בכיתות ג, ה, ו (92% בממוצע.) פתרו נכון את התרגילים 3x0 ו- 0x3.

הסברים תוך-מתמטיים

הסברים תוך-מתמטיים לתרגילי כפל עם אפס היו די דומים להסברים שנתנו התלמידים לתרגילי כפל ללא אפס. תלמידים רבים הסתמכו על התייחסות לכפל כאל חיבור חוזר. לפעמים, הסבר מסוג זה הוביל לפתרון נכון:





איור 2

"3x0=0+0+0=0" (כיתה ה). במקרים אחרים היו ילדים שמאוד רצו לחבר, כמו שעשו עבור התרגילים 3 כפול 2 ו- 2 כפול 3, אבל כשהתרגילים כללו אפס הם לא ידעו מה לחבר ולכן הם המציאו דרכים אחרות: "3x0=3 כי אני מתחיל עם 3 ואי-אפשר לחבר לזה מספר, אז אני נשאר עם 3." (כיתה ב)

"זה 0 ועוד 0 ועוד 3. כאילו מרימים עוד 3 ל- 0." (כיתה ב)

כמו שראינו בתרגילי כפל ללא אפס, גם בתרגילים המערבים אפס, תלמידים הסתמכו על משמעות המילה "פעמים". ילד בכיתה ב אמר, "0 כפול 3 זה 0 כי לא צריכים לרשום את ה- 3 אפילו פעם אחת". גם כאן תלמידים בוגרים השתמשו בחוק החילוף.

הסברים חוץ-מתמטיים

התלמידים חיברו הסברים מילוליים לתרגילי הכפל. ילד בכיתה ה כתב: "יש לך 3 גלידות אבל אתה לא אוכל אף גלידה אחת. אז כמה גלידות אכלת?". ילדים אחרים ציירו. למשל, ילד בכיתה ה צייר 3 עיגולים גדולים ריקים וכתב מתחת לציור, "3 קבוצות של כלום".

לטענת מספר חוקרים, השימוש במושג "כלום" כתחליף למושג "אפס" גורם לקשיים בהבנת המושג בקרב תלמידים (Reys & Grouws, 1975; Blake & Verhille, 1985). דוגמאות לקשיים אלה אפשר לראות בתשובתו של תלמיד בכיתה ב:

חוקרת: מה זה 3 כפול 0?

תלמיד: זה 3. (תשובה אוטומטית)

חוקרת: תגיד לי, למה אתה חושב שזה 3?

תלמיד: כי זה אפס אז זה כלום.

תלמיד אחר בכיתה ב, שהשתמש בהתייחסות לכפל כאל חיבור חוזר עבור תרגילי כפל ללא אפס, התלבט כאן אם אפס נחשב כמספר:

חוקרת: ומה זה 3 כפול 0?

תלמיד: 0.

חוקרת: למה?

תלמיד: כי... אין לו מספר. אם היה לך 1, אז זה היה שונה. כי אי אפשר לעשות 3 פעמים 0. זה עדיין 0.

חוקרת: למה אפשר לעשות 3 כפול 2 אבל אי-אפשר לעשות 3 כפול 0?

תלמיד: כי אפס זה מספר אבל זה... זה כלום. זה כלום.

אפשר להבחין בהתלבטות של התלמיד כלפי אפס. בהתחלה הוא טוען שהוא לא מספר ("אין לו מספר"). בסוף הוא טוען שאפס הוא כן מספר אבל הוא כלום.

הממצאים מראים שגם בהקשר לתרגילים הכוללים אפס בכל רמת כיתה ולגבי כל תרגיל, יותר תלמידים משתמשים בהסברים תוך-מתמטיים מאשר בהסברים חוץ-מתמטיים. בהתייחסות רק לתלמידים שפתרו נכון את תרגילי הכפל המערבים אפס, 70%, 33%, 31%, 21% נתנו הסברים תוך-מתמטיים לעומת 5%, 0%, 16%, 16% שנתנו הסברים חוץ-מתמטיים לתרגיל 3x0 בכיתות ב, ג, ה, ו בהתאמה. ו- 21%, 35%, 46%, 37%, 21% נתנו הסברים תוך-מתמטיים לעומת 10%, 0%, 13%, 17% שנתנו הסברים חוץ-מתמטיים לתרגיל 0x3 בכיתות ב, ג, ה, ו

בהתאמה. כמו בתרגילי כפל ללא אפס, הממצאים מראים שעם העלייה בגיל יש יותר שימוש בהסברים חוץ-מתמטיים. הייינו מצפים שעם העלייה בגיל תלמידים יתנו יותר הסברים תוך-מתמטיים. נשאלות השאלות: האם יש זיקה בין הנורמות הנוצרות בשיעורי מתמטיקה הקשורות להסברים, והעלייה בשימוש בהסברים חוץ-מתמטיים? האם הכיוון הזה רצוי?

בנוסף להסברים תוך-מתמטיים וחוץ-מתמטיים, הממצאים מראים סוג חדש של הסבר לתרגילים הכוללים אפס, שקראנו לו "כללי". הכוונה כאן היא לכלל שכל מספר כפול אפס שווה אפס. 0%, 29%, 34%, 46% השתמשו בכלל זה להסביר את התרגיל 3x0 בכיתות ב, ג, ה, ו בהתאמה. ו- 0%, 23%, 31%, 37% השתמשו בכלל זה להסביר את התרגיל 0x3 בכיתות ב, ג, ה, ו בהתאמה. ממצא זה מובן, כי תלמידים שעדיין לא למדו את נושא הכפל בכיתה לא הכירו את הכלל. כאשר יש שימוש בכלל יש ירידה בשימוש בהסברים אחרים.

סיכום

מחקר זה מראה שגם תלמידים צעירים משתמשים בהסברים תוך-מתמטיים להצדקות תרגילי כפל ללא אפס ולתרגילי כפל המערבים אפס. יש לחקור את השימוש בהסברים תוך-מתמטיים גם בהקשרים אחרים. כמחנכים, חשוב לנווט את ההוראה להתקדמות מהקונקרטי לפורמלי. צעד ראשון אפשרי בכיוון זה הוא להשתמש בהסברים תוך-מתמטיים בבית ספר יסודי.

פסלי ילדים בפתח חנות ספרים בתאילנד

מקורות

קורן, מ'. (2004). הקניית המושג מספרים מכוונים: שילוב נימוקים חוץ מתמטיים ופנים מתמטיים, **עלה 32**, עמודים 18-24.
תכנית הלימודים במתמטיקה (התשמ"ח), משרד החינוך והתרבות, ירושלים.

Ball, D., & Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. Phillips (Ed.), *Yearbook of the National Society for the Study of Education, Constructivism in Education.* Chicago, IL: University of Chicago Press.
Blake, R., & Verhille, C. (1985). The story of 0. *For the Learning of Mathematics, 5(*3), 35-47.
Cramer, K., & Henry, A. (2002). Using manipulative models to build number sense for addition and fractions. In B. Litwiller (Ed.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 41-48). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics.* Dordrecht, the Netherlands: Reidel Publishing Company.
Inhelder, B., & Piaget, J. (1969). *The Psychology of the Child.* New York: Basic Books.
Koirala, H. (1999). Teaching mathematics using everyday contexts: What if academic mathematics is lost? In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* III, (pp. 161-168). Haifa, Israel.
Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer. *American Educational Research Journal,* 27(1), 29-63.
National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.
National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.
Nyabanyaba, T. (1999). Whither relevance? Mathematics teachers' real-life-discussion of the use of context in school mathematics. *For the Learning of Mathematics,* 19(3), 10-14.
Reys, R., & Grouws, D. (1975). Division involving zero: Some revealing thoughts from interviewing children. *School Science and Mathematics, 78*, 593-605.
Szendrei, J. (1996). Concrete materials in the classroom. In A. J. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education,* (pp. 411-434). the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
Wu, H. (1999). Basic skills versus conceptual understanding: A bogus dichotomy. *American Educator,* 23 (3), 14-19, 50-52.