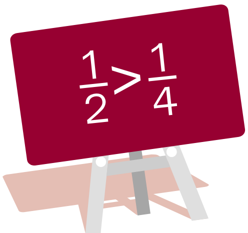
הוראת מושגי שברים כעצמים מוחשיים לעומת הוראתם כפעולות מוחשיות



אילנה ארנון, המרכז לטכנולוגיה חינוכית, תל אביב

המחקר המתואר במאמר זה הוא חלק מעבודת דוקטורט שנעשתה באוניברסיטת חיפה, הפקולטה לחינוך, על-ידי אילנה ארנון, בהנחייתם של פרופ׳ פ. נשר ופרופ׳ א. דובינסקי. (העבודה נכתבה באנגלית.)

תקציר

מחקר זה בא בעקבות שני חוקרים מאסכולת פיאז׳ה: נשר מתארת מערכות למידה הכוללות עצמים ופעולות קונקרטיים. דובינסקי עומד על כך שההתפתחות של כל רעיון מתמטי חדש מתחילה כפעולה.

ילדים בכיתה ד למדו שברים. בקבוצה א הם השתמשו בעצמים מוחשיים מוכנים המייצגים שברים (בעיקר גזרות עיגול). בקבוצה ב השברים הוצגו לראשונה כפעולות מוחשיות (שרטוט שברים כחלקי עיגול בעזרת טבעות חלוקה).

כשלושה חדשים לאחר הלמידה רואיינו התלמידים של שתי הקבוצות. הריאיונות חשפו רצפים התפתחותיים עבור מושגים מסוימים בשברים. במאמר נדון במושג: יחס הסדר בין שברים עם מונה שונה מ-1 (כמו $\frac{2}{5}$ ו- $\frac{4}{6}$). בקבוצה ב, שבה השברים הוצגו קודם כל כפעולה, יותר תלמידים הגיעו לרמות הגבוהות של התפתחות המושג שבר. יתר על כן, רק תלמידים מקבוצה ב הגיעו לרמה הגבוהה ביותר - פעולות מופשטות על שברים.

רקע תיאורטי ושאלת המחקר

השימוש באביזרים מוחשיים להוראת מתמטיקה בבית הספר נפוץ היום מאוד. שימוש כזה לא היה קיים לפני שנות השישים של המאה העשרים. הרקע התיאורטי לדרך הוראה זו מקורו בפיאז׳ה. הוא שהגדיר את התקופה ההתפתחותית, גיל האופרציות המוחשיות. לדעתו כל יצור אנוש עובר בהתפתחותו את התקופה הזו, ואצל מרבית בני האנוש היא מתרחשת, בערך, בין גיל 7-6 לגיל 12. לחשיבתו של הילד בגיל זה יש מאפיינים שניתנים להבחנה לאורך כל התקופה הזו. גיל האופרציות המוחשיות מתואר ברבים מכתביו של פיאז׳ה, למשל בספרו משנת 1976, המפורט ברשימת המקורות של מאמר זה.

המאפיין את התקופה הזו בחיי הילד המתפתח, לדעת פיאז׳ה, זו היכולת לפתח מושגים מתמטיים רק מתוך הרהורים ותהיות אודות פעילות שלו עצמו בעצמים מוחשיים. כשמיישמים את המאפיין הזה בהוראת מתמטיקה, משלבים בהוראה פעילויות בעצמים מוחשיים. העצמים יכולים להיות מהחיים הסובבים את התלמיד באופן טבעי, או מסביבה לימודית שתוכננה במיוחד לשם כך על-ידי המורה. למשל, בגיל הרך הרבה ילדים מפתחים בראשם מושגים מתקדמים אודות מספרים שלמים, מתוך מניית עצמים הנמצאים סביבם. בחדר הכיתה נמצא לעתים קרובות את התלמידים עוסקים בפעילויות מוחשיות היזומות על-ידי המורה: פעילויות במגזרות נייר, קוביות, משקלות, מדידות, ועוד. מטרתן לעזור לתלמידים לפתח מושגים מתמטיים מורכבים יותר: מספרים גדולים, שברים, המבנה העשרוני של המספרים, ועוד. אולם ההתפתחות של המושגים המתמטיים מתוך העיסוק בעצמים איננה מתרחשת מאליה. לעתים, למרות שהפעלנו את תלמידינו בעצמים ופעילויות שנראו מתאימים לנושא המתמטי הנידון, המושגים המתמטיים וההבנה שלהם לא התפתחו כפי שציפינו. חלק המחקר המתואר להלן מטפל בשאלה הזו:

> כיצד לשפר את השימוש בעזרים המוחשיים, כדי שהמושגים המתמטיים יתפתחו יותר טוב?

המחקר התמקד במושגי שברים. לצורך המחקר גייסנו לעזרתנו שתי גישות להוראת מתמטיקה, שהתפתחו מהתיאוריה של פיאז׳ה.

הגישה הראשונה היא הגישה התיאורטית של נשר (1989). בגישה זו ממליצים לתכנן את ההוראה ביחידות הנקראות מערכות למידה. במערכת למידה מתחילים את ההוראה של מושגים חדשים בעזרת אוסף עצמים מוחשיים המייצגים את המספרים החדשים. למשל, גזרות עיגולים יכולות לייצג שברים. כדי ללמד פעולות חשבון ויחסים בין המספרים משתמשים בפעולות בעצמים המוחשיים האלה. למשל, כשלומדים את הפעולה "השוואת שברים" משווים שני שברים על-ידי הנחת הגזרות המתאימות להם אחת על-גבי השנייה. דוגמה:

כדי להשוות בין $\frac{2}{5}$ ל- $\frac{4}{6}$, מניחים גזרת עיגול המייצגת $\frac{2}{5}$, על גזרה אחרת המייצגת $\frac{4}{6}$, קדקוד על קדקוד ורדיוס על רדיוס. על פי הגזרה הגדולה יותר אפשר לדעת איזה שבר גדול יותר, ואף לכתוב זאת בשפה מתמטית: $\frac{4}{6}>\frac{2}{5}$.

על-פי גישה זו, תוך כדי לימוד היחסים והפעולות בעצמים המוחשיים, ותיאורם בשפה המתמטית, מתפתחים אצל התלמיד המושגים המתמטיים המופשטים: בסוף התהליך הוא מצליח לפתור בעיות ותרגילים בעזרת חישובים מספריים בלבד (שפה מתמטית), ללא הזדקקות לעצמים המוחשיים. הוא "משתחרר" מהעצמים המוחשיים.

הגישה השנייה נקראת APOS, והיא פותחה על-ידי דובינסקי ואחרים
(Dubinsky et, al., 1991, Asiala et,al. 1996). זוהי גישה להוראת המתמטיקה הטוענת שההתפתחות של כל רעיון מתמטי מתחילה בפעולה. לכן, כדי ללמד מושג חדש כדאי לחפש פעולה שאותה התלמיד ילמד היטב והיא תייצג עבורו את המושג החדש (לפחות בראשית הלמידה). למשל, כדי ללמד מהו השבר $\frac{5}{8}$ אפשר ללמד את הפעולה הזו:

מציירים יחידה (שלם, למשל עיגול, ריבוע או קבוצת נקודות). מחלקים את היחידה ל- 8 חלקים שווים וצובעים 5 מהחלקים האלה.

פעולה זו מייצגת משמעות מסוימת של השבר (היחס בין חלק מהשלם, לשלם כולו). אך יש גם פעולות אפשריות אחרות, שלעיתים מייצגות משמעויות אחרות של השבר. באיזה מובן "מייצגת" הפעולה הזו את השבר עבור התלמיד? למשל, אם נשאל את התלמיד "איזה שבר גדול יותר: שביעית או מאית?", והתלמיד יענה: "שביעית גדול יותר. למרות שלא ראיתי אף פעם גזרה של מאית אני חושב שבשביל להכין מאית צריך לחלק את העיגול להרבה יותר חלקים שווים, ואז כל חלק יתקבל הרבה יותר קטן מאשר אם נחלק את העיגול רק ל- 7 חלקים שווים". בדוגמה זו, כדי להשוות בין השברים התלמיד חשב קודם על הפעולות המייצרות כל אחד מהם. לכך אנו מתכוונים כשאנו אומרים שהפעולה שתיארנו למעלה מייצגת עבור התלמיד את השבר. כדי להשוות את השברים הילד הפעיל בדמיונו את פעולת הבנייה של כל אחד מהשברים. שימו לב שגם התלמיד הזה למד להשוות שברים על-ידי הנחת גזרות זו על זו, ולכן הוא מסיק שמכיוון שהגזרה המתקבלת כשבונים מאית קטנה יותר מהגזרה המתקבלת כשבונים שביעית (היא תכוסה על-ידי גזרת השביעית כליל) גם השבר מאית עצמו קטן מהשבר שביעית.

שימו לב להבדל בין שתי הגישות:
בגישת מערכות הלמידה השברים מיוצגים על-ידי עצמים מוחשיים (גזרות מוכנות), ואילו פעולות חשבוניות בשברים (כמו השוואה, חיבור, חיסור) מיוצגות על-ידי פעולות מוחשיות.
לעומת זאת, בגישה APOS, גם השברים עצמם מיוצגים על-ידי פעולה מוחשית (חלוקת היחידה לחלקים שווים וצביעה), וגם פעולות חשבוניות מיוצגות על-ידי פעולות מוחשיות.
את שאלת המחקר אפשר לנסח על-פי הגישה התיאורטית של נשר:

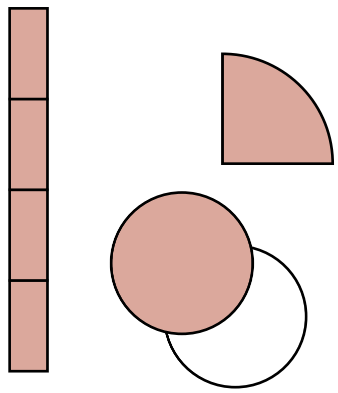
כיצד ניתן לעודד את ההשתחררות מן העצמים המוחשיים, ואת היכולת של התלמידים לפתור בעיות בלעדיהם, בשפה המתמטית בלבד?

הגישה התיאורטית APOS מציעה תשובה אפשרית לשאלה זו: לא רק פעולות חשבוניות, אלא גם העצמים המתמטיים החדשים עצמם (לדוגמה: שברים) צריכים להיות מיוצגים כפעולות מוחשיות.

הניסוי

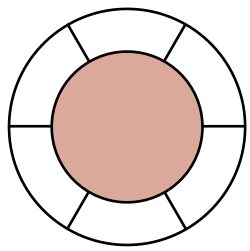
שתי כיתות ד למדו שברים. בכיתה האחת השתמשו, על-פי נשר, בעצמים מוחשיים מוכנים לייצוג שברים:

גזרות עיגולים ורצועות שברים (ראו איור 1). כיתה זו תכונה בהמשך בשם כיתה A.



איור 1: גזרות עיגולים ורצועות שברים

בכיתה השנייה שולבו הרעיונות של APOS בתוך יחידת הלימוד. כאן השברים הוצגו בתחילה כפעולות: התלמידים למדו לחלק עיגול לחלקים שווים ולצבוע אחדים מהם. לשם כך הם נעזרו במכשיר שנקרא טבעת חלוקה (ראו איור 2). כיתה זו תכונה בהמשך בשם כיתה B.



איור 2: טבעת חלוקה, לחלוקת עיגול ל- 6 גזרות שוות

העצמים המוחשיים של כיתה A (גזרות העיגולים) הוכנסו גם לכיתה B, אבל רק לאחר שנראה היה שהפעולות המייצגות שברים הופנמו. ניתן להבין את ההבדל בין שתי הכיתות כהבדל שבין הצגת שבר כעצם, לעומת הצגתו כפעולה. ההבדל בין שתי גישות אלה להוראת מושגים מתמטיים נבדק גם על-ידי חוקרים נוספים (Gray & Tall, 1994; Sfard et, al., 1991).

הלמידה שתוארה למעלה התרחשה בכיתה ד. התלמידים רואיינו בתחילת כיתה ה. במאמר זה נתייחס לאותם חלקים של הריאיונות הנוגעים להתפתחות המושגים הבאים:

- מושג השבר כיחס בין חלק מהיחידה ליחידה כולה (היחס בין גזרה לעיגול השלם).
- יחס הסדר בין שברים שאינם שברי יחידה (המונה שונה מ- 1).

בריאיונות נשאלה השאלה:

"איזה שבר גדול יותר, $\frac{2}{5}$ או $\frac{4}{6}$?"

בשתי הכיתות למדו לפתור שאלה כזו רק באמצעות האביזרים המוחשיים: להניח את הגזרות שמתאימות לשני השברים הללו זו על זו. אולם בזמן הראיונות העצמים המוחשיים לא היו מצויים בכיתה. בכל זאת חלק מהתלמידים נעזרו בציורים ביד חופשית (סקיצות) או שהתייחסו בהסברים שלהם לציורים דמיוניים. התושייה שנדרשה מהתלמידים על-מנת לפתור בעיה כמו זו ללא העצמים המוחשיים, אפשרה לחוקרים לחשוף טוב יותר את ההתפתחות של המושגים האלה אצל כל תלמיד ותלמיד.

ממצאים

בדקנו איזו פעולה מבצע כל תלמיד כדי לפתור בעיה כמו זו שלעיל. את תגובות התלמידים סיווגנו לארבע רמות:

1. אין עדות לפעולות על שברים.
2. יש עדות לפעולות בלתי מתאימות על שברים (שגויות או נכונות בחלקן).
3. יש עדות לפעולות מתאימות על שברים:

3א. יש עדות לפעולות מתאימות מוחשיות.

3ב. יש עדות לפעולות מתאימות מופשטות.

דוגמאות לרמות השונות

1. תשובה של תלמיד שאיננה מספקת עדות לפעולה על שברים.

מראיין: "טוב. שאלה שנייה: שתי חמישיות וארבע שישיות, מי יותר גדול?"

$\frac{2}{5} ? \frac{4}{6}$

אשי: "אני חושב..."

מראיין: "כן"

אשי: "ארבע חלקי שש..."

מראיין: "תסביר...."

אשי: "גם המונה וגם המכנה יותר גדולים."

הפעולה שאשי מתאר לא רק שהיא שגויה, אלא שהיא פועלת על המספרים השלמים 5, 4, 2 ו- 6 ולא על המספרים $\frac{2}{5}$ ו - $\frac{4}{6}$. לכך אנו מתכוונים כשאנו אומרים שאין כאן עדות לפעולה על שברים.

2. עדות לפעולה בלתי מתאימה על שברים.

מראיין: "שתי חמישיות וארבע שישיות, מי מהם
גדול יותר?"
גל: "שתי חמישיות."
מראיין: "למה?"
גל: "כי ... , המכנה... הוא קטן יותר, וזה...,
איך קוראים לזה?"
מראיין: "מונה."
גל: "המונה, כי זה לא חשוב, כי רק צריכים לצבוע."
מראיין: "וזה לא משפיע על גודל השבר, מה שצובעים?"
גל: "לא".

ייתכן שגל רומז בתשובתו כי הוא משווה בגודלם שברי יחידה בודדים חמישית ושישית, ומתעלם מהתפקיד שיש לצביעת החלקים במשמעות שבר שהמונה שלו איננו 1.

3א. עדות לפעולה מוחשית מתאימה.

$\frac{3}{4}\ ?\ \frac{4}{10}$

מראיין: "שלושה רבעים וארבע עשיריות, מי יותר גדול?"
בלהה: "שלוש רבעים."
מראיין: "איך את יודעת?"
בלהה: "א... ש, שלושה רבעים
זה יותר מחצי
(מתווה באוויר קשת גדולה מ- 180מעלות)."

התנועה של קשת באוויר היא שמעידה שבלהה רואה בעיני רוחה מחצית של עיגול או מחצית של סיבוב מלא, והיא שמעידה על ההיבט המוחשי של דרך החשיבה שלה.

3ב. עדות לפעולה מופשטת מתאימה.

$\frac{2}{5}\ ?\ \frac{4}{6}$

מראיין: "שתי חמישיות וארבע שישיות, מי פה יותר גדול?"
בינה: "ארבע שישיות."
מראיין: "...למה?"
בינה: "כי שתי חמישיות
זה ארבע עשיריות,
וארבע שישיות יותר גדול מארבע עשיריות."

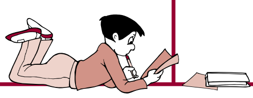
בינה לא דיברה על עיגול, לא על חלקים, ולא על צביעה. גם שום תנועת יד לא רמזה שהיא מתכוונת לאיזשהו ייצוג מוחשי. ההסבר שלה היה בנוי על שלושה שלבים:

- $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$ (הרחבה)
- $\frac{4}{6}>\frac{4}{10}$ (השוואת שברים בעלי מונים שווים),
- הטרנזיטיביות.

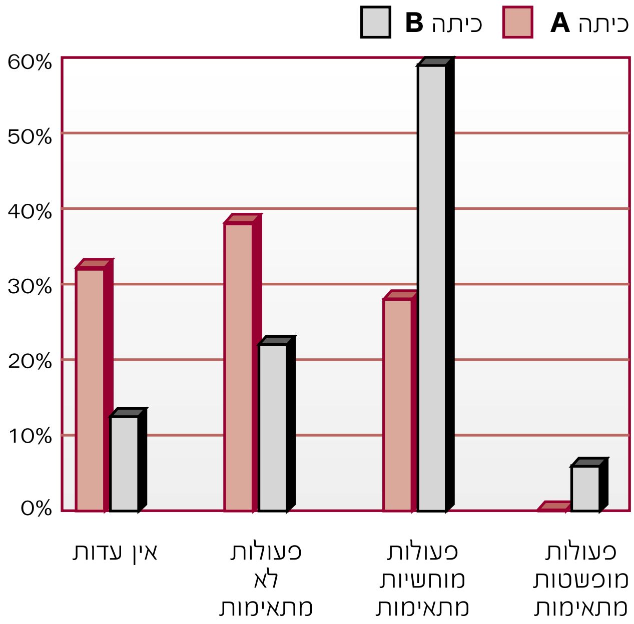
לכן סיווגנו את תשובתה כפעולה מופשטת מתאימה על שברים.

בינה הייתה מהכיתה שבה התחילו ללמוד את השבר כפעולה. עוד תלמיד בכיתתה פתר את הבעיה בעזרת פעולה מופשטת מתאימה על שברים. אף תלמיד מהכיתה השנייה, שבה התחילה הוראת השבר על-ידי ייצוג שברים בעצמים (גזרות מוכנות), לא סיפק בריאיון עדות לפעולה מתאימה מופשטת על שברים.
שימו לב שתלמידים ברמות 1 ו- 2 נחשבים כתלמידים שידיעתם את הנושא איננה מספיקה, ואילו תלמידים ברמות 3א ו- 3ב יכולים בהחלט להיחשב כתלמידים שיודעים את הנושא. במילים אחרות, במבחן, התלמידים שברמות 1 ו- 2 היו נכשלים בשאלה זו, ואילו התלמידים ברמות 3א ו- 3ב היו מצליחים בה, ומהסיבות הנכונות. בטבלה 1 ובאיור 3 רואים את ההבדלים בין שתי הכיתות באחוזי התלמידים בכל אחת מ- 4 הרמות.

רמות הפנמה	כיתה A (N=28) השבר הוצג כעצם	כיתה B (N=32) השבר הוצג קודם כל כפעולה
1. אין עדות לפעולות על שברים	32%	12.5%
2. פעולות לא מתאימות על שברים	39%	22%
3. פעולות מתאימות על שברים	29%	66%
3א. פעולות מתאימות מוחשיות	29%	60%
3ב. פעולות מתאימות מופשטות	0%	6%



טבלה 1



איור 3

הבדלים אלה בין שתי הכיתות נמצאו מובהקים סטטיסטית (Mann-Whitney P=0.0018).

הנתונים מצביעים על כמה יתרונות של הכיתה שבה למדו את השבר קודם כל כפעולה, על-פני הכיתה שבה למדו את השבר כעצם:

א. ברמות אי-הידיעה (1 ו- 2) יש יותר תלמידים בכיתה שלמדה את השבר כעצם (כיתה A) מאשר בכיתה שלמדה את השבר כפעולה (כיתה B).

ב. ברמות הידיעה (3א ו- 3ב) יש יותר תלמידים בכיתה שלמדה את השבר כפעולה (כיתה B) מאשר בכיתה שלמדה את השבר כעצם (כיתה A).

ג. ברמה 3ב (רמת הפעולות המופשטות) יש שני תלמידים מהכיתה שבה למדו את השבר קודם כל כפעולה (6% מהכיתה), אבל אין אף תלמיד מהכיתה שבה למדו את השבר כעצם.

בניתוח של הריאיונות עלו גם ממצאים נוספים. למשל, נמצא מגוון של תגובות תלמידים, שניתנו לסיווג בארבעה-עשר סוגים שונים. את סוגי התגובות הצלחנו לסדר בסדר עולה מבחינת התפתחות המושג. תיאור כל 14 הסוגים הללו מצריך מאמר נפרד.

סיכום

על-סמך הממצאים שתיארנו כאן אנו מציעים את הקריטריון הבא עבור שימוש בעצמים מוחשיים בהוראת שברים (ואולי גם בהוראת מושגים מתמטיים אחרים) בבית הספר היסודי: מוטב להתחיל את ההוראה של מושגים חדשים על-ידי הצגתם כפעולות מוחשיות, מאשר על-ידי הצגתם כעצמים מוחשיים.

מקורות

Arnon, I. ,& Dubinsky, E. (1997). Teaching fraction-concepts as concrete objects versus teaching them as concrete actions. In M. Hejny, & J. Novotna (Eds.), *Proceedings of ERCME 97 European Research Conference on Mathematical Education* (pp. 46-49). Prague: Prometheus Publishing House.

Asiala, M., Brown, A., DeVreis, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematical education. *Research in Collegiate Mathematical Education II, CBMS 6,* 1-32.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking, in D. Tall (ed.), *Advanced mathematical thinking,* (pp 95-123) London/Dordrecht/Boston: Clair Academic Publishers.

Gray, E., & D. Tall, (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (2), 116-140.

Nesher, P. (1989). Microworlds in Mathematical Education: A Pedagogical Realism. In L.B. Resnick (ed.) *Knowing, Learning & Instruction.* (pp. 187-216.) Hillsdale, NJ: Lawrence Eabbarm

Piaget, J. (1976). *The grasp of consciousness* (S. Wedgwood, trans.), Cambridge: Harvard University Press

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36.