חשיבה אינטואיטיבית של ילדים בפתרון בעיות יחס ופרופורציה

אורנה לביא-מאיר בית-ספר צין, מדרשת בן גוריון

ד"ר רות שיין ז"ל האמינה שאם נדע להקשיב לתלמידים שלנו, נוכל ללמוד הרבה על דרכי החשיבה שלהם, ובעזרת הבנה זו לתקן לשפר ולייעל את ההוראה שלנו. היא מצאה שהריאיון האישי הוא הכלי המשקף בצורה הטובה ביותר את הידע ואת ההבנה של התלמיד, ולימדה אותנו כיצד לנצל כלי זה בצורה היעילה ביותר - החל בניסוח זהיר ברור ומדויק של השאלות, המשך באופן בו נערך הריאיון ובתפקיד המורה במהלכו, וכלה בניתוח הריאיון ובהסקת מסקנות מהממצאים. עבודה זו, בנושא יחס ופרופורציה, הוגשה לד"ר רות שיין ז"ל כעבודה סמינריונית לסיכום הקורס 'חשיבה מתמטית של ילדים'.

הייתה לי זכות מיוחדת להיות תלמידתה של רות במשך שנים רבות ובמסגרות לימוד שונות. דלתה הפתוחה תמיד, עצותיה הטובות ודרכה הנעימה והתומכת יחסרו לי מאוד.

חשיבה אינטואיטיבית של ילדים בפתרון בעיות יחס ופרופורציה

תקציר

עבודה זאת בודקת את האופן שבו תלמידים בכיתה ו פותרים בצורה אינטואיטיבית בעיות של יחס ופרופורציה. תלמידים אלו טרם למדו בבית-הספר בצורה פורמלית את נושא היחס. העבודה מתמקדת באסטרטגיות לפתרון שבהן התלמידים משתמשים, בקשיים שלהם, ובשגיאותיהם הנפוצות. הממצאים מראים שיש לתלמידים ידע אינטואיטיבי של חלק מהעקרונות הנמצאים ביסודן של בעיות יחס ופרופורציה ושהם משתמשים בידע זה.

מבדיקת האסטרטגיות עולה כי התלמידים משתמשים בכל האסטרטגיות המוכרות בספרות המדעית, שבחירתם תלויה בסוג הבעיה והנתונים שבה, ולא ניתן להצביע על אסטרטגיות מועדפות שבעזרתן התלמידים פותרים את כל סוגי בעיות היחס.

מבוא

חוקרים המנתחים פתרון בעיות יחס ופרופורציה על ידי תלמידים מציינים את הגישות הבאות:

- **מציאת היחידה** (unit-rate). לדוגמה - מציאת מחיר עבור יחידה אחת או מציאת כמה יחידות ניתן לקנות בשקל אחד.
- **בנייה כלפי מעלה** (building up). לפי שיטה זו התלמיד עורך רשימה או טבלה ובה הוא מגדיל בכל פעם אחד משני האיברים ביחס, ואז מגדיל במידה שווה את האיבר השני.
- **מציאת מקדם ההשתנות או מידת ההשתנות** (factor of change). שיטה זו היא למעשה שימוש בטבלת התאמה, אך לא על-ידי ערך משולש (כפל באלכסון), אלא על-ידי מציאת המידה בה גדל או קטן ערך אחד והגדלת או הקטנת הערך השני בהתאם. קריסטו ופליפו (Christou & Philippou, 2002) מבחינים בין שתי גישות בבדיקת מידת ההשתנות. לאחת הם קוראים אסטרטגיית **ה"בין"** (between strategy) ולשנייה אסטרטגיית ה"**בתוך**" (within strategy). האסטרטגיה הראשונה מתארת השוואת ערכים של יחס שמרכיביו הם מידות או גדלים של שתי קבוצות שונות, והשניה מתארת השוואת גדלים מאותו סוג או בתוך אותה קבוצה. לדוגמה: "פול קנה 3 בלונים ב-2 ש"ח. הלן קנתה באותה חנות 5 בלונים. כמה כסף שילמה?". לפי גישת ה"בין" משווים בין מספר הבלונים למספר השקלים המתאים, ולפי גישת ה"בתוך" משווים בין מספר הבלונים למספר הבלונים ובין שקלים לשקלים.

קרת מחלקת את האסטרטגיות הפרופורציונליות לטרום פורמליות ולפורמליות (קרת, 2000). את האסטרטגיה הטרום פורמלית היא מחלקת לשכילה איכותית ולשכילה כמותית. בקטגוריה של שכילה איכותית היא כוללת אסטרטגיות חשיבה כמו בנייה כלפי מעלה, מציאת היחידה,

שימוש בתבניות למציאת החלק על-פי השלם והשלם על-פי חלקו וכו'. היא קובעת ששימוש באסטרטגיות אלה מצביע על מידת שימוש נמוכה בשיקולי דעת של שכילה פרופורציונלית. בקטגוריה של שכילה כמותית היא כוללת שימוש במודלים מתמטיים מובנים, כמו: ערך משולש וטבלת התאמה, אך עדיין לא בנוסחת הפרופורציה. בקטגוריה של האסטרטגיה הפרופורציונלית הפורמלית כוללת קרת את השימוש בנוסחת הפרופורציה. אסטרטגיות פתרון נוספות הן אסטרטגיות אלגבריות, אשר עדיין אינן רלוונטיות לכיתה ו, ואסטרטגיות אותן היא מכנה "אחרות". באסטרטגיות אחרות כוללת קרת שימוש בפעולות חשבון שונות ללא התיחסות לקשר הכיפלי בין הגורמים בבעיה וללא שימוש ב"יחס" שבינם.

שיטת המחקר

כאמור, מטרת המחקר הייתה לבדוק מהן האסטרטגיות של פתרון בעיות בהן משתמשים תלמידי כיתה ו, בטרם למדו את נושא היחס בצורה פורמלית בבית הספר. כדי ללמוד על אסטרטגיות אלו, ראיינתי עשרה תלמידים, 7 בנים ו-3 בנות מכיתה ו, אותה אני מלמדת. כל תלמיד רואיין באופן אישי, וכל ריאיון נמשך כ-30 דקות. הריאיונות נערכו בחודשים מרץ ואפריל 2003, לאחר שהתלמידים למדו כבר פתרון בעיות כפל וחילוק בעזרת טבלות התאמה וערך משולש.

הריאיון ותוצאות המחקר

השתדלתי לבנות ריאיון, שישקף ככל שניתן את דרך החשיבה של התלמידים, ויהיה מהנה ומאתגר עבורם. הריאיון כלל 7 שאלות מתחומים שונים של נושא היחס וקנה-המידה.

שאלה 1 (איור 1) היא בעיה של **השוואה מספרית** (numerical comparison). נתונים שני יחסית (rates) וצריך להשוות ביניהם. במשימה זו לא נדרשת תשובה מספרית. היא פונה בבירור לחשיבה האינטואיטיבית של התלמיד.

בחרתי לפתוח בשאלה זו כדי להכניס את המרואיין בצורה לא מאיימת לאווירה של הריאיון.

כל אחד משלושת התלמידים שנתנו תשובה נכונה הסביר את פתרונו באופן שונה. אחד נעזר בהסבר הפורמלי של יחס. הוא תיאר את היחס שבין מספר כוסות התרכיז שבמיץ לבין מספר הכוסות בקנקן כולו כשבר פשוט, והשווה בין שני השברים המתארים את שני הקנקנים. תלמיד שני בדק פי כמה גדולה כמות התרכיז מכמות המים בכל קנקן והסיק שהקנקן, בו המספר בתוצאה גדול יותר, הוא המתוק יותר. תלמיד זה נעזר באסטרטגית **ה"בין"**- כלומר, הוא בדק את היחס בין התרכיז למים בכל קנקן. התלמיד השלישי, שהגיע לפתרון בעזרת איור, נמצא ברמת חשיבה לא פורמלית.

אחד משני התלמידים שענה שהקנקן השני מתוק יותר טעה מאחר שלא נראה לו הגיוני שבמיץ יש יותר תרכיז מאשר מים ולכן הפך את הכמויות. גם תלמיד זה נעזר באסטרטגית ה"**בין**".

תלמיד נוסף, שענה שהקנקן השני מתוק יותר, צירף הסבר שאינו מתחום המתמטיקה. הוא טען ש"כוס אחת של מים לא משנה הרבה ואילו כוס אחת של תרכיז משנה את המתיקות". חמשת התלמידים שענו שהטעם שווה לא זיהו את הקשר הכיפלי בין מרכיבי היחס והתייחסו רק אל ההפרש שבין הכמויות.

שאלה 1

למסיבה הוכנו שתי תערובות של מיץ.

קנקן ראשון	קנקן שני
4 כוסות תרכיז	5 כוסות תרכיז
ו-2 כוסות מים.	ו-3 כוסות מים.

לאיזו תערובות יהיה טעם מתוק יותר?

איור 1

שאלה 2

יעל הכינה סלט פירות. על כל 2 בננות ששמה בסלט, שמה 3 תפוזים.
לפתע הגיעו אורחים והיא הגדילה את הסלט. ליעל היו עוד 4 בננות שצרפה לסלט.
כמה תפוזים היה עליה להוסיף לסלט כדי שלסלט יהיה אותו טעם?

שאלה זו היא בעיה מהקטגוריה של **חלק-חלק-שלם** בה תת קבוצה של השלם מושווית עם התת- קבוצה המשלימה שלה - במקרה זה שני סוגי פירות המרכיבים סלט. זו בעיה של מציאת ערך חסר (missing value) בה נתונים שלושה ערכים מספריים ועל הפותר למצוא את הערך הרביעי.

ציפיתי ששאלה זו תיפתר, בדרך-כלל, בדרך של בנייה כלפי מעלה או בעזרת טבלת התאמה.

6 תלמידים ענו תשובה נכונה.

חמישה תלמידים התבססו בדרך הפתרון על מידת ההשתנות (factor of change).

תלמיד אחד התייחס ליחס שבין הבננות לתפוזים בסלט המקורי וקבע שהיחס הזה צריך להישמר גם בסלט המוגדל (between strategy).

ארבעה תלמידים קבעו שאם מספר הבננות גדל פי 2 גם מספר התפוזים צריך לגדול פי 2. אחד מהם נעזר בשרטוט טבלת התאמה(within strategy).

תלמיד אחד השתמש בערך משולש (כפל באלכסון).

תלמיד אחד ענה שיש להוסיף 18 תפוזים. הוא השתמש בשיטה של בנייה כלפי מעלה, אך טעה בזיהוי יחידת היחס (unit-ratio) (Lo & Watanabe, 1997), ולכן הגיע לתשובה שגויה. הוא ערך את הרשימה הבאה:

בננות	1	2	3	4	5	6
תפוזים	3	6	9	12	15	18

שני תלמידים ענו שיש להוסיף 5 תפוזים ונתנו נימוק המתייחס להפרש בין הכמיות.

תלמיד אחד טען שמספר הבננות גדול ב-2 , ולכן גם מספר התפוזים צריך לגדול ב-2.

התלמיד השני התייחס להפרש בין הבננות לתפוזים. הוא מצא שמספר התפוזים בסלט המקורי גדול ב-1 ממספר הבננות ולכן קבע שההפרש צריך להישמר גם בתוספת.

תלמיד אחר ענה שיש להוסיף 4 תפוזים. גם הוא התייחס להפרש בין התפוזים לבננות, אולם בניגוד לתלמיד האחרון שתיארתי הוא התייחס לכמות כולה בסלט המוגדל. מאחר שההפרש בין התפוזים לבננות בסלט המקורי הוא 1, ובסלט המוגדל יש בסך-הכל 6 בננות, יש להוסיף 4 תפוזים כדי שההפרש יישמר (6 בננות-7 תפוזים).

בפתרון בעיה זו באו לידי ביטוי אסטרטגיות הפתרון ודרכי החשיבה השונות של תלמידים.

שישה תלמידים השתמשו במידת ההשתנות או בערך משולש.

תלמיד אחד השתמש בשיטת הבנייה כלפי מעלה.

שלושת התלמידים הנותרים התייחסו להפרש בין הכמויות, כלומר, הם לא זיהו את הקשרים הכיפליים.

שאלה 3 היא דוגמה לשאלה המזמנת פתרון באסטרטגיה נוספת (איור 2)

שאלה 3

עמי ויגאל עבדו בשטיפת מכוניות. עמי עבד 5 שעות ויגאל עבד 6 שעות. הם הרוויחו ביחד 132 ש"ח.
איך יחלקו ביניהם את הכסף בצורה הוגנת?

איור 2

שאלה 3 היא בעיה של **חלוקה לחלקים לא שווים.** היא מנוסחת בצורה סטנדרטית ישירה, אולם יש בה מספרים גדולים יחסית.

5 תלמידים הגיעו לפתרון הנכון. ארבעה מתוכם הגיעו לפתרון בדרך של חלוקה ב-11, ואז כפל ב- 5 וב- 6. תלמיד אחד הבין שעליו למצוא כמה כסף הרוויחו הילדים בשעה. הוא מצא זאת בעזרת ניסוי וטעיה עד שהסכום הסופי התאים למה שהרוויחו השניים ביחד. תלמיד נוסף הגיע לתשובה נכונה, לאחר שהקטנתי את סכום הרווח מ- 132 ל- 22. הוא לא צרף הסבר ולכן לא ברור אם הגיע לתשובה במקרה או מתוך הבנה.

4 תלמידים נתנו תשובות שגויות.

תלמיד אחד קיבל 65 ש"ח ו- 67 ש"ח. הוא חילק תחילה את הסכום ב- 5 ואחר כך ב- 6 מתוך הנחה שכך ימצא את הסכום שקיבל כל אחד מהילדים. הוא ראה שהסכום שקיבל מי שעבד יותר קטן מהסכום שקיבל מי שעבד פחות, וקבע שזה לא הוגן. הוא הבחין גם שסכומי הכסף שקיבל אינם מסתכמים ל- 132 ש"ח. לבסוף חילק את הסכום ל-2 וקיבל 66. הוא גרע שקל אחד מילד אחד והוסיף אותו לילד שעבד יותר.

תלמיד שני חילק גם הוא את הסכום ב- 5 וב- 6. גם הוא הבחין בכך שמי שעבד יותר קיבל פחות, ולכן קבע שצריך להפוך את סכומי הכסף כדי שהחלוקה תהיה הוגנת.

תלמיד שלישי חילק את הסכום ב- 2.5 ולשאלתי ענה ש- 2.5 זה קצת יותר מ- 2 ומאחר שלחלק ב- 2 לא יהיה הוגן בחר לחלק ב- 2.5. גם לתלמיד זה הקטנתי את הסכום ל- 22 ש"ח, אולם הדבר לא הביא אותו לפתרון נכון. כמו השניים האחרים הוא חילק את הסכום ב- 5 וב- 6 והסתפק בתוצאות שקיבל.

תלמיד רביעי נאחז בהפרש שבין שני המספרים 5 ו- 6. גם לתלמיד זה הפחתתי את הסכום ל- 22 ש"ח. מאחר ש- 5 ו- 6 הם מספרים עוקבים הוא חיפש שני מספרים עוקבים שסכומם 22, ומשלא מצא נואש וויתר על מציאת פתרון.

ציפיתי ששאלה זו תיפתר בעזרת השיטה של בנייה כלפי מעלה (או מטה). אך אף לא אחד מהמרואיינים השתמש בשיטה זו. מי שהבינו את הסיטואציה המובאת בבעיה פתרו לפי האלגוריתם המקובל או בניסוי וטעייה. אחד מהפותרים נכונה ציין, לאחר שהגיע לפתרון: "קצת מסובך אבל כיף!". האחרים לא הבינו נכון את הבעיה, ומן הסתם לא פנו לאסטרטגיית הפתרון המצופה.

שאלה 4

פועל בניין קיבל בעד 8 שעות עבודה 24 ש"ח.

כמה יקבל בעד 10 שעות?

איור 3

שאלה 4 היא בעיה של **הספק** (rate) במקרה זה השוואה בין מחיר ושעות עבודה.

זו בעיה של מציאת ערך חסר (missing value).

ציפיתי ששאלה זו תיפתר בדרך של מציאת היחידה, מאחר שנתונים בה מספרים שמתחלקים בקלות.

9 תלמידים ענו על שאלה זו נכון.

כולם השתמשו בשיטה של מציאת יחידה, כלומר כמה כסף הרוויח בשעה אחת.

שני תלמידים מתוכם מצאו בעל-פה כמה שקלים הרוויח לשעה, והתחילו לחפש בשיטה של בניה כלפי מעלה כמה ירוויח ב- 10 שעות. אחרי שהגיעו לשעתיים (6 ש"ח בשעתיים) עצרו וענו מייד כמה ירוויח ב- 10 שעות.

תלמיד אחד התחיל בחישוב התרגיל 24:8=3, וציין שמצא כמה שקלים הרוויח הפועל בשעה, אך לא ידע למצוא כמה ירוויח ב- 10 שעות. הוא ערך חישובים רבים, שחלקם נראו לו נכונים ואת חלקם פסל. הוא השתמש בפעולות כפל וחילוק, במספרים המופיעים בבעיה ובמספרים שקיבל כתוצאה מחישוביו, ולבסוף קבע שאחד מהם הוא הנכון (240 ש"ח).

כל תשעת המרואיינים שהגיעו לפתרון הנכון השתמשו באסטרטגיה של מציאת ערך יחידה (unit rate) ובנייה כלפי מעלה (building up). אף לא אחד מהם השתמש בערך משולש. לפי קריסטו ופיליפו הסיבה לבחירתם באסטרטגיה בסיסית זו היא המספרים שנבחרו בבעיה, שהיו פשוטים לחישוב ונתנו תוצאות במספרים שלמים. קרוב לוודאי שאם הסכום שהרוויח הפועל לשעה לא היה נותן מספר שלם היו התלמידים פונים לחיפוש אחר שיטת פתרון אחרת (Christou & Philippou 2002). התלמיד הנותר השתמש באופן אקראי במספרים ובפעולות.

שאלה 5

18 פועלים יכולים לסיים עבודה ב- 24 ימים.

כמה ימים ידרשו ל- 6 פועלים אם יעבדו באותו קצב?

שאלה 5 היא בעיה של **יחס הפוך**. היא מנוסחת בצורה פשוטה ככל שניתן, ומופיעה בכוונה מיד לאחר שאלה אחרת העוסקת מבחינת התוכן בפועלים, כדי להדגיש את ההבדל בתוכן המתמטי.

ציפיתי שכל המרואיינים יבחינו ביחס ההפוך, ואולי ינסו להשתמש בטבלת התאמה, אולם הנחתי שיתקלו בבעיה במציאת הפתרון.

שבעה תלמידים הגיעו לתשובה נכונה. כולם השתמשו בשיטה של מציאת מידת ההשתנות. 4 מהם מצאו את התשובה מיד. תלמיד אחד, שהתחיל בחישובים שונים שלא הובילו אותו לפתרון, ביקש לחזור לשאלה בסוף הריאיון והגיע לתשובה מיד תוך חישוב מידת ההשתנות בעל-פה ומסירת התשובה בלבד.

שני תלמידים מצאו את מידת ההשתנות וענו שידרשו 8 ימים. הם הבחינו מיד שהתשובה אינה הגיונית והבינו שעליהם לכפול ב- 3, ולא לחלק.

תלמיד אחד (שערך את כל חישוביו בעל-פה בלבד) השתמש ביחס שבין מספר הפועלים לבין מספר הימים ומצא שהיחס הוא $1\frac{1}{3}$ ולכן יידרשו 8 ימים כי $6\times1\frac{1}{3}=8$. לשאלתי הבין שמספר ימי העבודה אמור לגדול, כלומר, שזו בעיה של יחס הפוך, אולם לפתע התחיל להתייחס להפרשים בין המספרים. הוא מצא שההפרש בין מספר הפועלים הוא 12 ואז הוסיף 12 למספר ימי העבודה ומצא שידרשו 36 ימים.

תלמיד אחר שרטט טבלת התאמה. הוא ניסה להשתמש בערך משולש, אולם, מאחר ששכח איך עושים זאת, פנה למצוא את מידת ההשתנות. הוא הבין שהתשובה 8 ימים לא הגיונית, אך לא ידע איך להמשיך וויתר מיד. תלמיד נוסף ענה לשאלתי, שיקח ל-6 פועלים יותר זמן מאשר ל-18. הוא ניחש שייקח להם 30 ימים ופסל בעצמו תשובה זאת. הוא לא מצא תשובה אחרת.

במשימה זו הופיעה בעיה של יחס הפוך. על-פי קרת (2000) "כדי שאדם יצליח לפתור בעיית פרופורציה של יחס הפוך, (') הוא לא יכול להסתפק בשימוש טכני בנוסחה, אלא חייב לעשות שימוש מושכל בסכמת הפרופורציה. לכן בעיות אלו יכולות לשמש אינדיקציה לשכילה פרופורציונלית."

רוב התלמידים ניסו לפתור את הבעיה בעזרת טבלת התאמה ומציאת מידת השתנות, או בעזרת ערך משולש. שני תלמידים הראו שהם מזהים את הקשר הכיפלי בין מרכיבי הבעיה. תלמיד אחד הבין, אומנם, שידרשו לפחות פועלים יותר ימי עבודה, אך לא ידע כיצד לקשר בין הנתונים בבעיה.

שאלה 6

שלושה חברים יצאו לטיול. האחד הביא 4 כריכים, השני הביא 5 כריכים, והשלישי שכח להביא אוכל. החברים התחלקו בכריכים שווה בשווה. למחרת הביא החבר השלישי 15 שקלים ושילם לחבריו על האוכל שקיבל מהם.

כיצד יחלקו ביניהם השניים את הכסף?

כמו השאלה השלישית, גם שאלה 6 שייכת לקטגוריה של חלוקה לחלקים לא שווים.

לעומת השאלה השלישית, שאלה זו מהווה אתגר חשיבתי מאחר שלא כל הנתונים להם זקוק הפותר מופיעים בסיפור, ועליו לערוך תחילה חישוב כדי לגלותם.

לאחר מציאת הנתונים החסרים, המספרים קטנים וקלים מאוד לחישוב. הצגתי שאלה זו לקראת סוף הריאיון, בהנחה שהמרואיין חווה מספר הצלחות בשאלות הקודמות ולא ירגיש מתוסכל אם לא יצליח לפותרה. ציפיתי ששאלה זו תיפתר בעזרת השיטה של בנייה כלפי מעלה (או מטה).

רק תלמיד אחד ענה תשובה נכונה, וצירף הסבר נכון. תלמיד אחד זיהה שזו בעיה של חלוקה **לחלקים לא**

שווים, אולם במקום לחלק את הכסף לפי הכריכים שקיבל הילד השלישי (3 כריכים), חילק את הכסף לפי הכריכים שהביאו הילדים לטיול (9 כריכים בסך-הכל), בדומה לפתרון שמצא לבעיה השלישית.

ארבעה תלמידים ענו שיש לתת למי שהביא 4 כריכים 7 ש"ח ומי שהביא 5 כריכים 8 ש"ח.

שני תלמידים הבינו שילד אחד ויתר על כריך אחד והשני ויתר על שניים. אחד מהם הגיע אפילו לתשובה 5 ו- 10, אך חזר בו ושינה את התשובה ל-7 ו- 8. התלמיד השני חילק את הסכום ל- 2 והעלה מעט את הסכום שקיבל הילד שהביא 5 כריכים, והפחית באותה מידה מהסכום שקיבל הילד שהביא 4 כריכים.

שני תלמידים נקטו מיד בשיטה, שבה נקט לבסוף התלמיד האחרון שתיארתי (חלוקה ב- 2 ואז הפחתה והוספה בהתאם).

תלמיד אחד ענה, אחרי חשיבה ממושכת, שהחלוקה צריכה להיות 6 ש"ח ו- 9 ש"ח אך לא הצליח להסביר מדוע.

תלמיד אחד הגיע לתשובות 3.75 ו- 3 ש"ח. הוא פתר בעיה זו בדומה לבעיה 3, על-ידי חלוקת הסכום ב- 4 וב-5.

לא הפריע לו שהתוצאות אינן מסתכמות ל- 15.

שני תלמידים חילקו את הסכום שווה בשווה בין שני הילדים - 7.5 ש"ח לכל ילד (אחד מהם אף ציין שזו שאלה קלה).

כאמור לא כל הנתונים להם זקוק הפותר מופיעים בסיפור, ועליו למצאם תחילה.

שלושה תלמידים אכן גילו מספרים אלה, אך רק אחד מהם ידע כיצד לנצל נתון זה למציאת פתרון לבעיה.

שאלה 7

התלמידים קיבלו תרשים של שולחן והתבקשו למצוא את מידותיו של השולחן במציאות, אם בשרטוט הוא הוקטן פי 7. התלמידים התבקשו להשתמש בסרגל למדידת השולחן שבתרשים.

שאלה 7 עוסקת בקנה מידה, בהגדלה של שתי כמויות רציפות, זו בעיה של **הגדלה** בה יש למצוא את המידות במציאות של חפץ ששורטט בהקטנה.

השארתי שאלה זו לסוף, מאחר שהנחתי שהיא הקלה מכולן ותשאיר את המרואיין עם תחושה נעימה של הצלחה.

תשעה תלמידים הגיעו לתשובות נכונות. חמישה מתוכם ענו תשובות מיידיות וישירות.

ארבעה לא הבינו שעליהם למצוא את מידות האורך והרוחב של השולחן. שלושה חישבו תחילה את שטח השולחן ותלמיד אחד חישב את היקפו. רק לאחר הבהרה שלי הבינו שנתבקשו למצוא את מידות השולחן במציאות.

תלמיד אחד חילק את המידות שבשרטוט ב- 7, ולשאלתי מדוע חילק ענה שצריך לחלק כי כתוב שהשולחן הוקטן. תלמיד זה נאחז במשפט "הוקטן פי 7" מבלי לבדוק את ההיגיון שבתשובתו.

מעניין לציין טעויות נוספות שאינן קשורות ישירות לנושא היחס. שניים מהתלמידים שמצאו את שטח השולחן בשרטוט כפלו את התוצאה ב- 7 ולא ב- 49 כמתבקש. תלמיד אחר התבלבל וחשב שיש לחשב את שטח המלבן כפי שמחשבים שטח של עיגול (נושא אותו למד בתקופה בה נערך הריאיון). הוא התייחס לרוחב השולחן כאל רדיוס, והשתמש בנוסחה לחישוב שטח של עיגול למציאת שטחו של השולחן.

סיכום

מטרת עבודה זו הייתה לבדוק את האופן שבו פותרים תלמידים, שטרם למדו בצורה פורמלית את נושא היחס בבית הספר, בעיות של יחס ופרופורציה; אילו אסטרטגיות יבחרו לפתרון, אילו אסטרטגיות יעדיפו, באילו בעיות יתקלו ומהן השגיאות הנפוצות.

מאחר שלא היה למרואיינים ידע פורמלי מוקדם בנושא, הם מצאו דרכים חלופיות מגוונות כדי לבטא ולהציג את הבנתם את הבעיות. הסתבר שהיה ברשותם ידע בסיסי סביר של חלק מהעקרונות שנמצאים ביסודן של בעיות יחס ופרופורציה, ועליו הם הסתמכו. בן-חיים מציין שחוקרים רבים טוענים, שאסטרטגיות ותהליכים הננקטים על-ידי תלמידים, מתפתחים באופן בלתי תלוי בהוראה, כלומר, תלמידים מפעילים אינטואיציה מתמטית או מערכת ידע בלתי פורמלית (בן-חיים, 2002 מתוך: Post et al.,1988, Streefland, 1985; Treffers & Goffree 1985).

מבדיקת האסטרטגיות, שבחרו המרואיינים לפתרון, עולה שהם השתמשו בכל האסטרטגיות המוכרות בספרות המדעית. בעבודה זו לא נותחו אסטרטגיות הפתרון בהן העדיף להשתמש כל אחד מהתלמידים, אלא נותחו האסטרטגיות השונות בהן נפתרה כל אחת מהשאלות. אולם, מתוך סקירה שטחית של הריאיונות, מסתבר שהתלמידים נקטו באסטרטגיות פתרון שונות בהתאם לסוג הבעיה ולנתונים בה, ולא ניכר שתלמידים בחרו באסטרטגיה אחת או שתיים שבעזרתן פתרו את כל המשימות. הסתבר שהמספרים המופיעים בשאלה מזמנים גם הם את האסטרטגיה המתאימה לפתרון, ומשפיעים על הקשיים שבהם נתקלים התלמידים (בן-חיים, 2002). למשל, בשאלה הרביעית (העוסקת בשכרו של פועל) בלטה העובדה שחילוק השכר במספר השעות יתן את הרווח לשעה אחת וזאת במספר שלם של שקלים.

בשאלה השנייה לעומת זאת, (העוסקת בסלט הפירות), ניסיון למצוא את היחידה נתן מספר לא שלם, דבר שהוביל את רוב התלמידים להשתמש בשיטה של מציאת מידת ההשתנות (factor of change), כפי שמצאו קריסטו ופיליפו שקרה לתלמידים שהם ריאיינו. בבעיות שבהן נבחרו יחסים בעלי הפרשים זהים בין הכמויות (כמו בבעיה העוסקת במתיקות המיץ), נכשלו המרואיינים במציאת הקשר הכיפלי ופנו לקשר החיבורי. מצאתי שזו לא הייתה הסיבה היחידה לפניה לאסטרטגיה זו של פתרון, מאחר שתלמידים השתמשו בה גם בשאלות אחרות, שבהן לא היה קשר כזה בין המספרים.

מקובל להניח, שבכך שנותנים לתלמידים מספרים קטנים יחסית מקלים עליהם. נהוג להניח שמבטלים בכך, או מקטינים, את הקושי שבחישובים מסובכים ומשאירים מקום רק לחשיבה העקרונית. בשאלה השלישית (שעסקה בחלוקה לחלקים לא שווים) הנחתי שגודל סכום הרווח (132 ש"ח) מקשה על תלמידים מסוימים, והקטנתי אותו למענם, אך גיליתי שהדבר לא עזר.

אסטרטגיות נוספות שזוהו: ניחוש, איורים לצורך המחשה, בנייה כלפי מעלה וערך משולש.

עלי לציין שציפיתי שתלמידים ישתמשו יותר בשיטה של בנייה כלפי מעלה מכפי שהשתמשו, משום ששיטה זו נראתה לי הבסיסית והפשוטה ביותר. גם קריסטו ופיליפו מצאו שהתלמידים אותם הם ריאיינו השתמשו בצורה אינטואיטיבית בשיטה של מציאת היחידה, ופנו לבנייה כלפי מעלה רק כאשר לא היה פשוט למצוא את ערך היחידה ישירות מן ההקשר של הבעיה או כאשר התוצאה הייתה מספר לא שלם. הם מסבירים זאת בניסיון של התלמידים להשתמש בידע שצברו מתוך ניסיונם הרב בפתרון בעיות כפל פשוטות בשנים קודמות.

הטעויות האופייניות שנמצאו בפתרונות של המרואיינים (מבוסס על טעויות שמצאה קרת בתשובות המרואיינים שלה):

-פעולות חשבון שונות שאינן מובילות לפתרון נכון,

-טעויות הקשורות לאוריינטציה חיבורית - אי-זיהוי הקשר הכיפלי בין מרכיבי הבעיה,

-שימוש בפרוצדורות המתאימות ליחס ישר בפתרון בעיה של יחס הפוך,

-מספר החלקים שיש לחלק את הכמות השלמה שגוי. לדוגמה בשאלה השלישית - חלוקת סכום הכסף ב-5 וב-6 במקום ב-11,

-בחלוקה לחלקים לא שווים - חילוק הסכום שווה בשווה, ואז הוספת סכום מסוים עבור הערך הגדול והפחתת אותו סכום עבור הערך הנמוך,

-טעות של הבנת מילה כמרמזת על פעולה - במשימה כתוב שהשרטוט הוקטן ולכן מקטינים את מידות האובייקט המשורטט כדי למצוא את מידותיו במציאות.

מסקנות

אחת מהמסקנות, שהגעתי אליהן בעקבות עבודה זו, ומצאתי לה סימוכין גם בספרות המחקרית, היא שחשיבה פרופורציונלית חייבת להתפתח במהלך תקופת זמן ארוכה ולא ביחידת לימוד בודדת או בפרק אחד. היא חייבת להיות נושא מאחד במהלך שנות הלימוד של כיתות היסוד הגבוהות. (Langrall & Swafford, 2000).מאחר שהתפתחות מושג היחס והפרופורציה מבוססת ומשולבת בתוך התפתחות מושג הכפל (Lo & Wanatabe, 1997) ניתן לשלב שאלות פשוטות העוסקות ביחס כבר בכיתות ד ו- ה ולפתח בכך את החשיבה המתמטית של התלמידים.

למון מצא שבגיל צעיר מאוד בשלב שלפני האופרציות הקונקרטיות, הילד עושה שימוש בחשיבה יחסית כלשהי. בשלב הקונקרטי הילד נמצא במעבר מחשיבה חיבורית לחשיבה כיפלית. ראוי לנצל יכולות חשיבה, המתפתחות בגילאים אלה, ללימוד אסטרטגיות המכוונות לפיתוח שכילה פרופורציונלית.

תהליך למידה אשר יחשוף את התלמידים לטבעו של היחס במצבים כיפליים בבעיות מתחומי דעת מגוונים, ויעודד אותם להשתמש באסטרטגיות פרופורציונליות טרום-פורמליות, כגון, שימוש ביחס כיחידה, יוביל לפיתוח חשיבה יחסית ויוכל לסייע לפיתוח שכילה פרופורציונלית (קרת, 1994).

לנגרול וסוופורד טוענות שהוראה בחשיבה פרופורציונלית צריכה להתחיל עם מצבים שניתן לדמיין או לייצג בעצמים או איורים. כדי לעזור לתלמידים לחשוב על מצבים שבהם שתי מידות משתנות אחת ביחס לשנייה, יש להציג השוואות איכותיות לפני שעושים השוואות מספריות או מוצאים נעלם. השוואות כאלו יכולות להופיע בצורת היגדים כמו "אם המהירות גבוהה יותר, אז עוברים אותו מרחק בפחות זמן". לאחר שתלמידים מסוגלים לפתור בעיות פרופורציה תוך שימוש בחשיבה לא פורמלית, ניתן לפתח את האסטרטגיות של חשיבה כמותית. הצבה פורמלית של פרופורציות תוך שימוש במשתנים ובחוק הערך המשולש, יש לדחות עד אחרי שניתנה לתלמידים הזדמנות להסתמך על הידע הלא פורמלי שלהם ולפתח הבנה של המרכיבים ההכרחיים של חשיבה פרופורציונלית (Langrall & Swafford, 2000).

לסיום ברצוני לציין את ההנאה הרבה שהפקתי מהכנת עבודה זו. אין זו הפעם הראשונה בה אני נתקלת בשיטה של ריאיונות אישיים ושוב, כמו גם בפעם הקודמת, נהניתי מאוד מעריכת הריאיונות עם התלמידים ומניתוחם. שוב גיליתי מה רב הוא המידע, שמורה יכול להפיק מריאיון אישי על הידע וההבנה של תלמידיו. בן-חיים כותב במאמרו כי "אחוז ניכר מהתלמידים יכול לקבל ניקוד על ידע המבוסס על חשיבה שגויה, בעוד אחרים חושבים נכון אבל אינם מסוגלים להגיע לתשובה הסופית. לפיכך נחוץ לבדוק גם את ההסברים ודרך העבודה, מעבר לתשובות הסופיות" (בן-חיים, 2002). אין ספק שהריאיון האישי הוא אחת השיטות המתאימות ביותר לבדיקת הסברי התלמידים ולבדיקת דרך עבודתם ומהלך החשיבה שלהם, ויכול לכן לשמש גם כאמצעי להערכת תלמידים בנוסף על המבחן הסטנדרטי.

מקורות

אלברט, ג' ותעיזי, נ' (2002). **אוגדן פעילויות בנושא יחס – למורה**, רחובות: מכון וייצמן למדע.

בן-חיים, ד' (2002). יחס ופרופורציה, **מספר חזק 2000** גיליון 4.

מאונטוויטן, מ' (מרכזת) (1998). **אחת שתיים ושלוש, מדריך למורה חלק שישה-עשר.** משרד החינוך והתרבות - המרכז לתכניות לימודים והמרכז לטכנולוגיה חינוכית. (פרק ה', עמ' 111-132)

קרת, י' (2000). שכילה פרופורציונלית של מבוגרים - פרחי הוראה ומורים למתמטיקה בבית בספר היסודי ותהליכי השינוי בעקבות הוראת יחידת לימוד בנושא "יחס ופרופורציה", **דפים**, גיליון, 30, 81-100.

Billings, E. M. H. (2001) Problems that encourage proportion sense, *Mathematics Teaching in the Middle School*, 7, (1).

תרגום: ברכה סגליס, מרכז מורים ארצי, אוניברסיטת חיפה.

Langrall, C.W. & Swafford, J. (2000). Three ballons for two dollars: Developing proportional reasoning, *Mathematics Teaching in the Middle School*, *6*, (4).

תרגום: ברכה סגליס, מרכז מורים ארצי, אוניברסיטת חיפה.

Christou, C, & Philippou, G. (2002). Mapping and development of intuitive proportional thinking, *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 321 - 336.

Lo, j.j. & Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: a story of a fifth grader. *Jurnal for Reseatch in Mathematics Education*, 28, 216-236

*תודה לנלי וולף על עזרתה בעריכת המאמר.

*האיורים במאמר זה הם פרי עטו של יצחק מאיר.