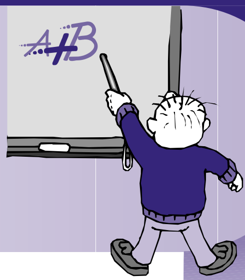


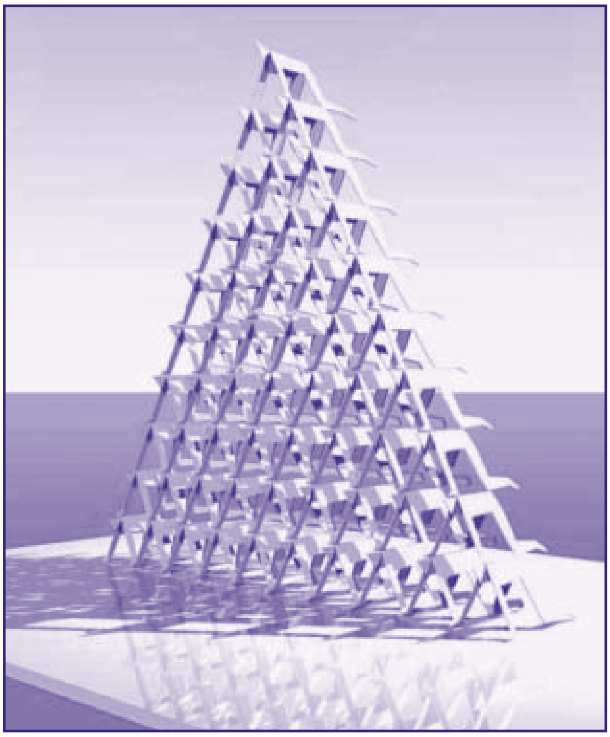
"פירמידת" מספרים - בעיה מתמטית טובה

רונית בסן-צינצינטוס, רונית קליין ומלכה שפט, מכללת סמינר הקיבוצים

"פתרון בעיות צריך להיות אחת מהנקודות המרכזיות של תכנית הלימודים במתמטיקה, וככזה הוא צריך להיות המטרה הראשונית של הוראת המתמטיקה, וחלק אינטגרלי בכל הפעילויות המתמטיות". (NCTM, 1989)
כאשר פתרון בעיות הופך להיות חלק אינטגרלי של ההוראה בכיתה והילדים חווים הצלחה, הם רוכשים ביטחון בעשייה המתמטית. יכולת התקשורת המתמטית שלהם עולה, הם מפתחים חשיבה חוקרת ומציגים תהליכי חשיבה גבוהים יותר (NCTM, 1991)

כאשר מציגים את נושא פתרון הבעיות בסטנדרטים האמריקאים לא מתכוונים בהכרח לבעיות המילוליות המוכרות, המתייחסות לתוכן מתמטי מוגדר. הכוונה היא לסיטואציות או טקסטים מילוליים שיש לעבדם למודלים מתמטיים. עיסוק בבעיות אלו יעזור בבניית ידע מתמטי, ידגיש הבנה, יעודד ויתמוך בעבודה שיתופית, ובהצעת פתרונות מגוונים תוך שימוש באסטרטגיות שונות ומתן דגש לתהליך על-פני הפתרון עצמו. כמו כן, העיסוק בבעיות מהסוג הנ"ל יעודד עבודה לאורך זמן, דיונים מתמטיים, ושיח מתמטי ביו התלמידים עצמם ובין התלמידים והמורים.
מחקרים רבים בדקו את השפעת פתרון בעיות אתגר על ידע התלמידים. נזכיר את מחקרם של פנמה, קרפנטר, פרנק, לוי, ג'יקובס ואמפסון, Fennema, Carpenter) (Franke, Levi, Jacobs & Empson,1996 שהציגו בין היתר, שיפור בידע התלמידים בעקבות עבודה המבוססת על פתרון בעיות אתגר. גם שטיין וסמית (Smith & Stein, 1998) טוענות כי מתן הזדמנות לעבוד על משימות מאתגרות בסביבה כיתתית תומכת תורם לשיפור ניכר בלמידה.
על- פי (Kamii, Lewis, & Jones (1993, ילדים מבינים מושגים מתמטיים ופרוצדורות בצורה מעמיקה יותר, כאשר מאפשרים להם להשתמש בדרכי החשיבה שלהם לחקירה מתמטית.
ויקפילד (Wakefield, 1997) טוענת כי סקרנות טבעית, להיוות לחקירה, והבנה מתמטית מאפיינות ילדים. לכן יש לעודד תלמידים להשתמש בכישורי החשיבה הטבעית שלהם על מנת לתקוף ולפתור בעיות.
גם בקרב אנשי החינוך המתמטי הישראלי גישה זו השמה דגש על פתרון הבעיות, קיבלה תאוצה וניתן לה ביטוי בכל ספרי הלימוד החדשים.

במאמר זה נציג בעיה מתמטית, משימה המהווה אתגר למורים ולתלמידים[1], ונראה כיצד בתהליך הפתרון באים לידי ביטוי היבטים שונים התורמים לפיתוח הידע המתמטי.



[1] המשימה המקורית הוצגה במסגרת השתלמות מורים למתמטיקה ע"י ד"ר שרה הרשקוביץ במסגרת קורסי התמקצעות במתמטיקה במכללת סמינר הקיבוצים. המשימה שמשה בסיס לפעילות חקר רחבת היקפים תוך מתן דגש להיבטים דידקטיים שונים.

משימת ה"פירמידה"[2]

א.לפניך פירמידה 2 של מספרים.

?

? ?

? ? ?

? ? ? ?

14 ? ? ? ?

8 9 10 11 12 13

1 2 3 4 5 6 7

1. איזה מספר יופיע בראש הפירמידה?
2. כמה קומות יהיו לפירמידה?

ב.נתונה פירמידה אשר בבסיסה המספרים 1,2,3,4,5,6,7,8.

1. איזה מספר יופיע בראש הפירמידה?
2. כמה קומות יהיו לפירמידה?
3. נסו לפתור בשתי דרכים שונות.
4. תעדו אחד הפתרונות, כרצונכם.

ג. האם תוכלו לדעת איזה מספר יופיע בראש הפירמידה אשר בבסיסה המספרים 1,2,3,4,5,6,7,8,9 כמה קומות לפירמידה זו?

ד. האם תוכלו לדעת איזה מספר יופיע בראש הפירמידה אשר בבסיסה **n** מספרים: 1,2,3,...**n**? כמה קומות לפירמידה זו?

ה. מי מהמספרים הבאים יכול לעמוד בראש הפירמידה: 32? 56? 91? 105? 210?

הסבירו מדוע.

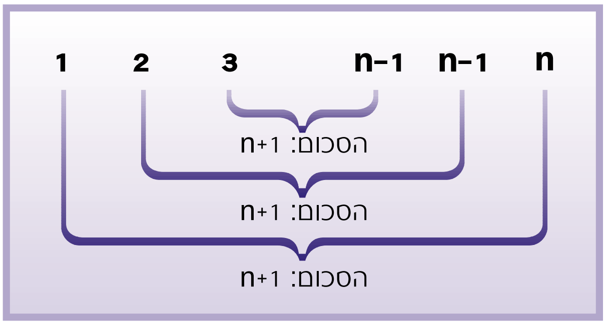
מה מאפיין מספר היכול לעמוד בראש הפירמידה? הסבירו.

ו. חברו פירמידה משלכם.

פתרון המשימה

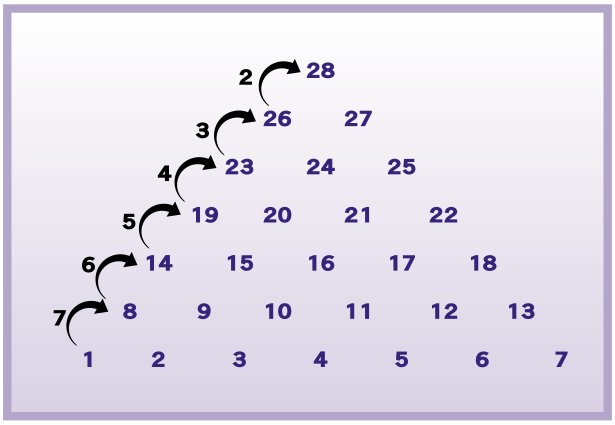
אפשר להגיע למספר בראש הפירמידה על-ידי רישום כל המספרים העוקבים, תוך הקפדה על שמירת מספר האיברים בכל שורה בפירמידה. אולם אם נחפש אחר קשרים והכללות, נגלה כי המספר שבראש הפירמידה הוא סכום המספרים בבסיס. המספרים מאורגנים כך שבשורה התחתונה יש **n** איברים, בשורה השנייה יש **n**-1 איברים, בשורה השלישית **n**-2 איברים וכן הלאה, עד שבשורה שלפני האחרונה יש 2 איברים ובשורה העליונה יש איבר אחד בלבד. ניתן לראות שהמספר המציין את מספר האיברים בשורה מסוימת הוא איבר בשורת הבסיס שהיא **n**,1-**n**,...1,2 מכאן, מספר האיברים בשורת הבסיס זהה למספר השורות, ולפיכך, כל אחד מהאיברים בשורת הבסיס מציין את כמות האיברים בשורה מסוימת. מכיוון שמדובר כאן על סדרת מספרים עוקבים המתחילה ב-1, הרי שהמספר בראש הפירמידה הוא גם המספר המציין כמה איברים יש בפירמידה כולה.

בשורת הבסיס **n** ,1-**n**...,1,2 סכום כל זוג מספרים הוא**n**+1:



ולכן סכום אברי השורה הוא $\frac{n(n+1)}{2}$. זאת נוסחת גאוס לחישוב סכום מספרים טבעיים מ-1 עד **n**. ניתן להגיע לשימוש בנוסחת גאוס גם על- ידי בדיקת טור ההפרשים של המספרים הנמצאים בקו הקיצוני (הימני או השמאלי של הפירמידה). ההפרש בין האיבר הראשון בשורה הראשונה לאיבר הראשון בשורה השנייה הוא 7. ההפרש בין האיבר הראשון בשורה השנייה לאיבר הראשון בשורה השלישית הוא 6, וכך מקבלים בהמשך את סדרת ההפרשים 2,3,4,5,6,7 ואת האיבר הראשון שהוא 1. לכן אלו בדיוק המספרים בשורת הבסיס, וסכומם יתן את המספר שבראש הפירמידה.

התהליך מודגם בשרטוט הבא:



---

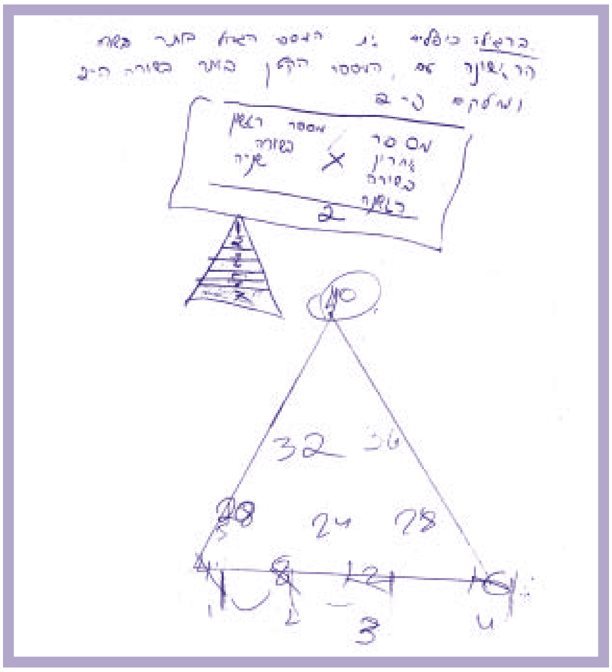
[2] עשינו שימוש במילה פירמידה משום האזכור לצורה של פירמידה על אף שזהו משולש מספרים.

באשר לשאלה: איזה מספר יכול לעמוד בראש הפירמידה? מכיוון שמדובר בטור מספרים עוקבים המתחיל ב-1 הרי על פי נוסחת גאוס, המספר בראש הפירמידה הוא מחצית המכפלה של שני מספרים עוקבים: $\frac{n(n+1)}{2}$. לכן המספר 28 יכול לעמוד בראש הפירמידה. שכן מכפלתו ב - 2 היא 56, שזו התוצאה של מכפלת שני המספרים העוקבים 7X8. באותו אופן, 32 אינו יכול לעמוד בראש הפירמידה, משום שאין שני מספרים עוקבים שמכפלתם 64. לקשר זה ניתן להגיע רק לאחר שיוצרים את ההכללה איך לחשב את המספר שבראש הפירמידה. אפשר, כמובן, לבדוק כל מספר אם הוא מתאים לעמוד בראש הפירמידה, על-ידי רישום כל המספרים בספירה לאחור תוך כדי יצירת פירמידה. בדיקה זו מייגעת וכל סטיה קטנה במספר האיברים שבשורה, תגרום לטעות.

נבחן עתה, אילו היבטים באים לידי ביטוי במהלך הפתרון של הבעיה, ונציג דוגמאות לפתרונות של תלמידים מכיתות שונות.

א. משימת חקר

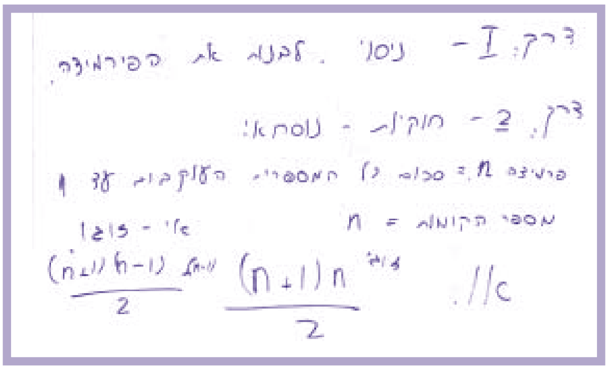
בעיה זו ניתנת לפתרון על ידי רישום המספרים בסדר רץ, עד שמגיעים לראש הפירמידה. הדרישה לפתור בדרך נוספת גורמת לתלמיד לחפש פתרון אחר, פתרון שאינו מיידי. תהליך הפתרון דורש **עבודה לאורך זמן, מדגיש את התהליך על פני הפתרון, מזמן תקשורת ודיונים** בין התלמידים ואף בין התלמידים למורה. תהליך זה יוצר: "פעילות רב שלבית, פתוחה, המזמנת עבודה ברמות שונות ומעודדת דרכי פתרון שונות (...) ושיתוף פעולה" (ת"ל, 2004) ולכן הוא פעילות חקר שבעקבותיה התלמיד לומד **לקבל החלטות מתמטיות**, התלמיד **מעלה השערות ובודק אותן**. הוא נדרש להסביר, להוכיח ולפרש את המהלכים השונים. לדוגמה: תלמידים גילו כי המספר בראש הפירמידה הוא חצי ממכפלת המספר האחרון בשורה הראשונה במספר הראשון בשורה השנייה (ראה דוגמת פתרון 1 באיור 1) ונשאלת השאלה: מדוע זה נכון?



איור 1

המספר האחרון בשורה הראשונה הוא n ואילו המספר הראשון בשורה השניה הוא n+1, כך שמחצית מכפלתם מקיימת בדיוק את נוסחת גאוס. רוב התלמידים לא הצליחו לנמק את הפתרון שמצאו.

דוגמה אחרת (ראה דוגמת פתרון 2 באיור 2): התלמידים יצרו הבחנה בין המקרה שבשורת בסיס הפירמידה יש מספר זוגי של איברים לבין המקרה שמספר האיברים הוא אי-זוגי. נשאלת השאלה האם הבחנה זו נחוצה?



איור 2

אם n זוגי הרי שהוא מתחלק ב- 2 ללא שארית. אם איננו זוג אזי n+1 הוא זוגי ומתחלק ב- 2 ללא שארית. לכן המכפלה n(n+1) תמיד תתחלק ב- 2 ללא שארית ואין צורך לעשות את ההבחנה. למעשה אם נבדוק את הפתרון שנתנו עבור n אי-זוגי נראה כי הוא תואם את נוסחת גאוס:

$$\frac{(n+1)(n-1)+(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n-1+1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$$

ב. משימת חקר מזמנת עבודה שיתופית ומעודדת שיח מתמטי

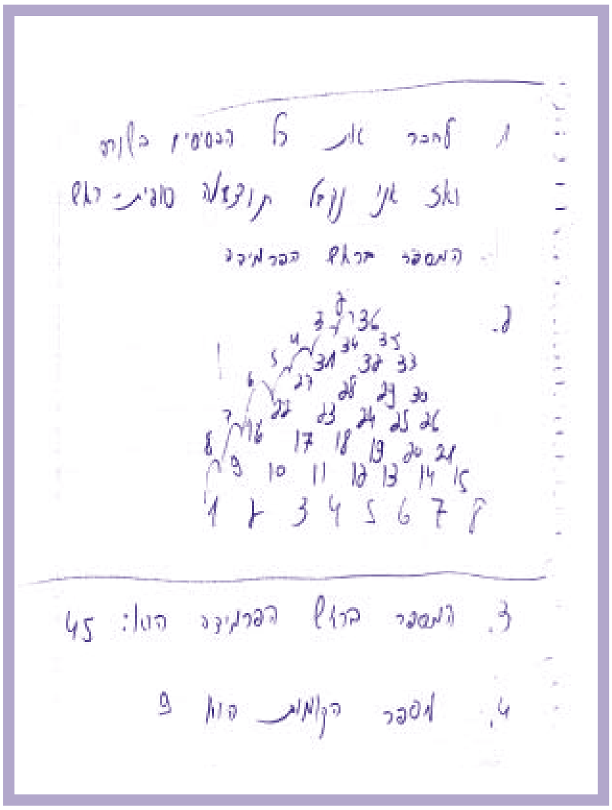
מטבע הדברים כאשר ניתנת משימה כל תלמיד חייב לקרוא ולהבין. הוא מנסה לפתור לבד ולפעמים נעצר. בשלב זה מתחיל שיח בין מספר ילדים כאשר כל אחד תורם מהבנתו וחשיבתו. נוצרת הפריה הדדית המובילה את התלמידים יחד לכיוון הפתרון.

במשימה זו התלמידים, על-פי-רוב, יטו לרשום את כל המספרים ולהגיע לפתרון. הדרישה לפתור בשתי דרכים שונות היא המובילה לחקור את הבעיה. מכיוון שהפתרון הנוסף אינו מיידי, נוצר הצורך בשיתוף פעולה בין התלמידים. הלימוד חדל להיות פסיבי והופך ללימוד אקטיבי.

ג. משימת חקר חושפת את התלמידים לאסטרטגיות שונות לפתרון

למשימה זו פתרון יחיד. ניתן להגיע אליו על-ידי רישום מספרים עוקבים במשבצות הפירמידה. הדרישה במשימה לפתור בדרך נוספת דורשת מכל תלמיד לפחות שתי אסטרטגיות עבודה שונות. בנוסף, התהליך בו כל תלמיד או קבוצת תלמידים מציגים דרך נוספת לפתרון הבעיה ושאר התלמידים מנסים להבינה, חושף את הילדים לאסטרטגיות נוספות.

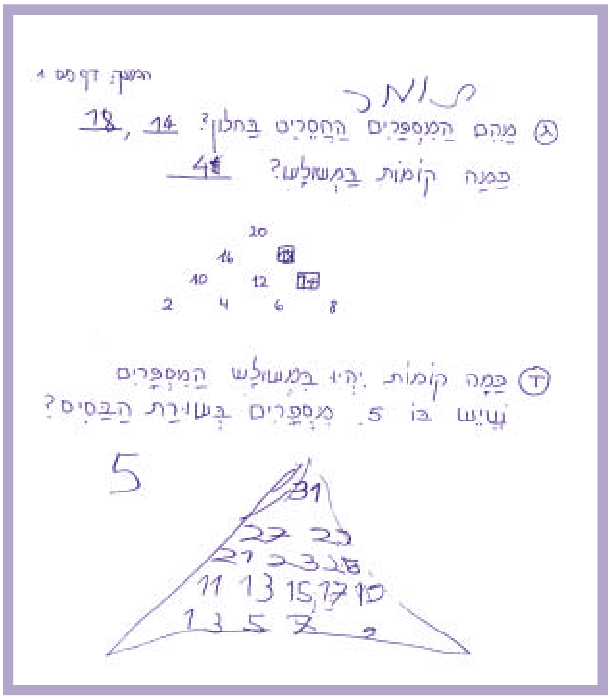
להלן דוגמה לאסטרטגיה נוספת לפיתרון (איור 3).



איור 3

ד. משימת חקר ניתנת לפתרון בעזרת שימוש בעצמים

מבנה הפירמידה הוא כזה שבכל שורה מספר האיברים קטן ב-1 ממספר איברי השורה הקודמת. שימוש בעצמים (דסקיות/פקקים/חרוזים) מנתק את ההתייחסות למספרים עצמם ומאפשר את ראיית המבנה הכללי של הפירמידה. השימוש בעצמים עוזר לבניית הקשר בין המבנה של הפירמידה ובין המספר שבראש הפירמידה ומוביל ליצור הכללה ולהגיע לפתרון. דוגמה לפתרון של תלמיד שלא שמר על מספר מתאים של מספרים בכל שורה, ניתן לראות באיור 4.



איור 4

ה. משימת חקר מעוררת דיון

לא ייתכן תהליך חקר המעודד עבודה שיתופית ללא דיונים. פרט לדיונים שנוצרים במהלך פתרון המשימה (סעיף ב - עידוד שיח מתמטי), גם ההצגה של פתרונות שונים לבעיה מעוודדת דיונים. בעת הצגת הפתרון כל מציג נדרש להסביר ולנמק את דרך הפתרון שלו ועל התלמידים לנסות ולהבין את הפתרון. בעיות יכולות וצריכות לעורר דיונים ואפילו חילוקי דעות בין ילדים.

ו. משימת חקר מקשרת בין מספר נושאים

בפעילות זו, אסטרטגיות הפתרון קשורות בידע מתמטי תוכני מספרים עוקבים, פעולות חיבור וחיסור (מציאת ההפרשים בין המספרים שבשוליים וחיבור ההפרשים,

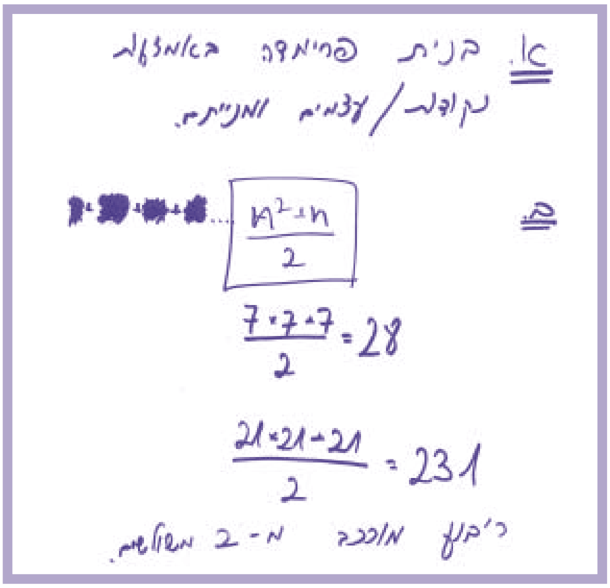
חיבור המספרים בבסיס הפירמידה), כפל וחילוק (מציאת המספר היכול להיות בראש הפירמידה, חישובים בנוסחת גאוס), סדרות (מציאת האיבר ה-n בסדרה, סכום סדרה). קיימת אפשרות לשנות את המספרים בפירמידה לשברים פשוטים, עשרוניים, שליליים ועוד, על-ידי כך להרחיב את טווח הנושאים. (מצורפות דוגמאות בהמשך).

ז. משימת חקר מתאימה לכיתה הטרוגנית

מגוון אסטרטגיות לפתרון המשימה מאפשר לכלל אוכלוסיית התלמידים (חלשים וחזקים) להגיע לפתרון. כל תלמיד יכול לגלות את המספר שעומד בראש הפירמידה על-ידי **רישום** מספרים עוקבים וספירת השורות בפירמידה. יש תלמידים שיגיעו להכללות שונות ויש תלמידים שיוכלו לקשר את המספרים לסדרות חשבוניות וימצאו חוקיות.

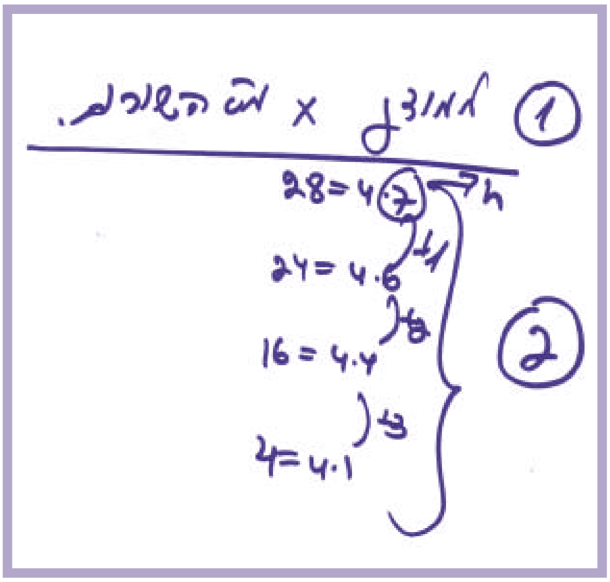
ח. משימת חקר מזמנת התנסות מטה-קוגנטיבית

המשימה דורשת **תיעוד** של דרך הפתרון.
על מנת לתעד הפותר מבצע חשיבה על החשיבה - תהליך מטה-קוגנטיבי. נוכחנו כי לפותר קל יותר לתאר בעל-פה את דרך הפתרון מאשר לכתוב אותה. כאשר הפותר נדרש לבצע תיעוד בכתב, הוא חייב לנסח את מהלכיו במדויק ובאופן בהיר - מתמטית ומילולית.
ניתן לראות בשלושת דוגמאות הפתרון 6,5 ו-7 (איורים 5-7) כיצד התלמיד רושם את דרך הפתרון, אשר ברורה לו, אבל לקורא חסר מידע רב.



איור 5

איור 6



איור 7

התיעוד בדוגמת פתרון 6 מציג רישום חלקי של המספרים: אין שמירה על מיקום המספרים, חסר הסבר (כמו מדוע השורה המתחילה במספר 19 תסתיים במספר 22) ואין הכללה.
בפתרון שבאיור 7, התיעוד אינו מבהיר לאיזה ממוצע מתכוונים, האם הכוונה לממוצע של כל המספרים בפירמידה? האם הכוונה לממוצע המספרים בשורה הראשונה?
בהסבר בעל-פה התברר כי הכוונה **לחציון** של האיברים בשורה הראשונה. במקרה של מספרים עוקבים המתחילים ב- 1, החציון של שורת המספרים בשורה התחתונה שווה לממוצע שלה.

ט. משימת חקר מזמנת חוויות הצלחה

המשימה מאפשרת לכל אחד להצליח ולהגיע לפתרון. כפי שנאמר לעיל, תלמידים מתקשים יוכלו לפתור על-ידי רישום של כל המספרים העוקבים וספירת השורות. ידוע כי חוויית הצלחה תורמת להנאה וכתוצאה מכך להנעה. המשימה מעודדת חשיבה מקורית והמצאה התורמים גם הם לחוויית ההצלחה.

י. משימת חקר ניתנת להרחבה

ניתן להרחיב את המשימה בכיוונים שונים כאשר נשאל **"מה היה קורה אם ... ? ".**

לדוגמה: "מה היה קורה אם היינו מתחילים לשבץ מספרים מראש הפירמידה? איזה מספר יימצא בסוף השורה ה-7? ה- 9? ה- **n**?"

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
11 ? ? ? ?
? ? ? ? ? ?
? ?

"מה היה קורה אם היו מתחילים במספר 21 ולא ב- 1?"

?
? ?
? ? ?
39 ? ? ?
34 35 36 37 38
28 29 30 31 32 33
21 22 23 24 25 26 27

מה היה קורה אם היו מתחילים ב- 1 וההפרשים היו קבועים ושונים מ- 1."

?
?
?
?
19 ? ? ? ?
1 4 7 10 13 16

"מה היה קורה אם לא היו מתחילים ב-1 וההפרשים בין המספרים היו קבועים ושונים מ-1?":

?
?
?
38 ? ? ?
28 30 32 34 36
16 18 20 22 24 26
2 4 6 8 10 12 14

(כאשר כופלים ב-2 את הפירמידה המקורית מתקבלת פרמידה זו).

ייתכנו אפשרויות הרחבה נוספות, כמו, השלמה של פירמידה חסרה. (חסרה שורת הבסיס אך רמזים לגביה ניתן לגלות מן האיברים הראשונים של כל אחת מהשורות) לדוגמה:

?
?
150
130
100
60
10 ? ? ? ? ? ?

או הרחבה לפירמידות אחרות:

פעילות פירמידת מספרים

לא רק משולש פסקל יוצר פירמידת מספרים. לפניך פירמידה אחרת, התבונו בה וענו על השאלות הבאות:

א. פירמידה זו ניתנת להמשך, עמדו על החוקיות של הפירמידה וגלו באיזו שורה יופיע המספר 35.

ב. מבלי לבנות המשך לפירמידה ענו:

1. אילו מספרים יופיעו בשורה ה- 15?
2. באיזו שורה יופיע המספר 100?

ג. חפשו קשרים מעניינים נוספים בפרמידה.

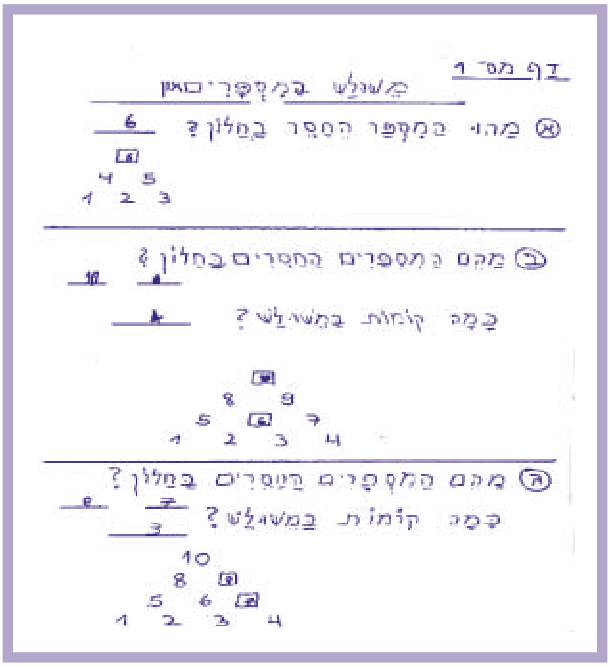
1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16

(הפעילות נלקחה מתוך: "תולדות המתמטיקה, מקורות מהיהדות והאיסלאם ושילובם בהוראת מתמטיקה" בעריכת ד"ר עדה קצף, המכללה לחינוך על-שם קיי, באר שבע).

יא. משימת חקר ניתנת ליישום בכיתות השונות

המשימה ניתנת להתאמה תוך התייחסות לתכנים המתמטיים הנלמדים בכיתות השונות.

בכיתות הנמוכות הפעילות נותנת הזדמנות לתרגל את כתיבת המספרים העוקבים בתחום הנלמד. (איורים 8-9)



איור 8

איור 9

בכיתות הביניים המשימה מאפשרת יישום בתחומי מספרים חדשים, סדרות בהפרשים קבועים המדגישות את המבנה העשורי. המשימה יוצרת גם הזדמנויות נוספות לשימוש ותרגול פעולת הכפל. (איור 10)


בס"ד

1

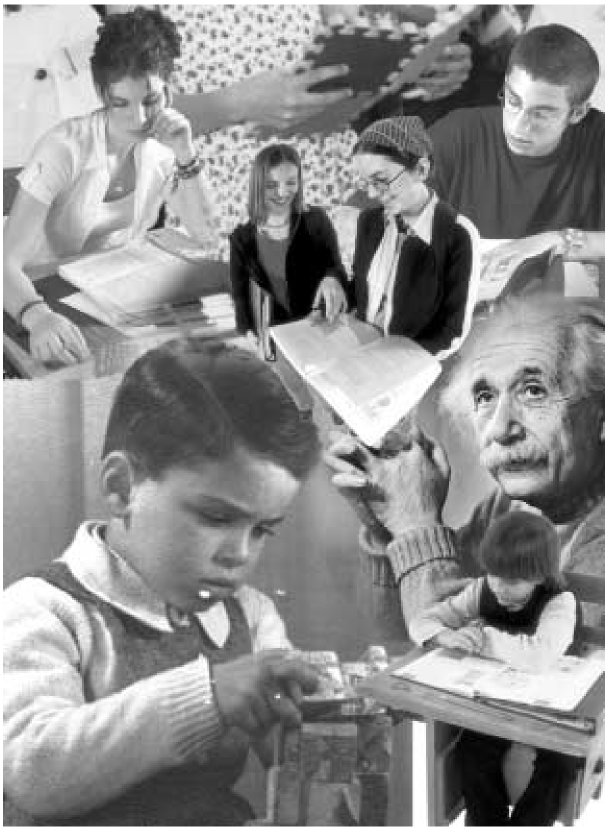
א. נתונה פירמידה אשר בסיסה המספרים:
2 4 6 8 10
ב. איזה מספר יופיע בראש הפירמידה?
ג. כמה קומות לפירמידה?
ד. נסו לפתור בכמה דרכים
ה. תעדו דרך אחת

בס"ד

2

א. נתון ראש הפירמידה 42
ב. האם תוכלו לגלות את בסיס הפירמידה?
ג. כמה קומות לפירמידה?
ד. תעדו את דרך הפתרון.

איור 10



בכיתות הגבוהות ניתן להרחיב את המשימה לתחומי מספרים נוספים כמו: השבר הפשוט, המספר העשרוני, מציאת חוקיות והכללות שונות ויישומן בתחומי השברים. למשל תרגול בשברים, כמו: מה ההפרש בין זוג שברי יחידה שהמכנים שלהם מספרים עוקבים? מה קורה להפרש זה כאשר עולים בקומות?

$\frac{10}{10}$

$\frac{8}{10}$ $\frac{9}{10}$

$\frac{5}{10}$ $\frac{6}{10}$ $\frac{7}{10}$

$\frac{1}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{4}{10}$

הפרשים קבועים

?

? ?

? ? ?

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$

הפרשים לא קבועים

או לשאול:

כמה פעמים תופיע הספרה "1" בראש הפירמידה?

?

? ?

? ? ?

? ? ? ?

0.1 0.11 0.111 0.1111 0.11111

סיכום

בעיה מתמטית (מילולית או שאינה מילולית) אשר במהלך פתרונה יבואו לידי ביטוי היבטים שונים כדוגמת אלו שהוזכרו לעיל תהא בעיה מתמטית טובה. ככל שהבעיה תקיף מספר רב יותר של היבטים הבעיה תהא טובה יותר. לאור האמור לעיל, ניתן לומר כי **משימת הפירמידה** היא אכן **בעיה מתמטית טובה**.

במאמרו של גייסט (Geist,2000) על לקחים משיעורים מוקלטים במחקר של ה- TIMSS מוצגות 7 תכונות, המתארות כיצד נוהגים מתמטיקאים כשהם פותרים בעיות, התכונות התקבלו משיחות עם מתמטיקאים וסטודנטים בוגרים במתמטיקה.

- מתמטיקאים עובדים לעיתים קרובות על בעיה אחת זמן רב.
- מתמטיקאים משתפים פעולה עם עמיתיהם ובוחנים מה עשו אחרים.
- מתמטיקאים חייבים להוכיח לעצמם שהפתרונות שלהם נכונים.
- מתמטיקאים עובדים על בעיות מורכבות.
- מתמטיקאים מקבלים סיפוק מהתהליך.
- מתמטיקאים רוכשים תחושה של גאווה מהגעה לפתרונות.
- מתמטיקאים משתמשים בניסיונות כושלים כקרש קפיצה לפתרון.

בעיה מתמטית טובה מתרגלת, מדגישה ומובילה לפיתוח תכונות של מתמטיקאים. לכן, אולי, אם בעיות טובות יהיו חלק מהעשייה המתמטית בכיתות, פרט לתרומה לידע המתמטי, נגדל גם דור של מתמטיקאים צעירים.

מקורות

תכנית הלימודים החדשה במתמטיקה לבית הספר היסודי (2004). האגף לתכנון ולפיתוח תכניות לימודים, משרד החינוך, ירושלים.

Doyle, W.(1988). Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking during Instruction. *Educational Psychologist*, *23*, 167-180.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitidunal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* , 403-434.

Geist E. A. (2000). Lessons from the TIMSS videotaps study. *Teaching Children Mathematics 7*, 180-185.

תרגום: ברכה סגליס, מרכז מורים ארצי, אוניברסיטת חיפה.

Kamii, C. B., Lewis, A., & Jones, S. (1993). Primary arithmetic: Children inventing their own procedures. *Arithmetic Teacher, 41*, 200-203.

NCTM (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston, Va.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Va.

Wakefield, A. P. (1997). *Classroom practice: Supporting math thinking*. Phi Delta Kappa (pp.233-236).