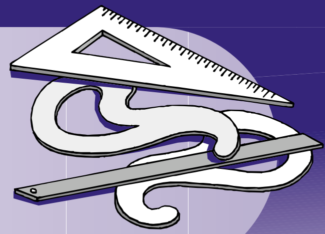


מיפוי חזותי למשפחות המשולשים והמרובעים בעזרת דיאגרמות וון

מחקר משדה ההוראה

אברהם תורגמן

הקדמה

כל מי שהתנסה בהוראת ההנדסה ברמת בית הספר היסודי, בחטיבת הביניים, בחטיבה העליונה, ואף במוסדות להשכלה גבוהה, נתקל לא אחת בבלבול השורר בקרב הלומדים לגבי ההגדרות של סוגי המשולשים וסוגי המרובעים ועוד יותר באשר לשאלות כגון, האם, או מתי, משולש על-פי הגדרה אחת הוא גם משולש על-פי הגדרה אחרת. הוא הדין באשר למשפחת המרובעים.

כמו כן, כאשר תלמידים מתבקשים לקבוע- "נכון", "לא נכון" לגבי היגדים מסוג, "כל משולש חד-זוויות הוא גם משולש שווה-צלעות", או, "כל משולש שווה צלעות הוא גם משולש חד-זוויות", הם יתקשו יותר להשיב נכונה אם יסתמכו רק על ההגדרות המילוליות, כיוון שאין בהן די להבנה ולהפנמה של המיון של משפחות המשולשים והמרובעים. הדברים נכונים באופן בולט ביותר בקרב תלמידים בינוניים ומטה.

לאור הנ"ל ולאור ניסיון רב שנים בהוראה בכל רמות הגיל, החל מבית ספר יסודי ועד למכללות לחינוך ואוניברסיטאות, פיתחתי את המפות החזותיות למיון ולאפיון משפחות המשולשים והמרובעים בעזרת דיאגראמות וון. למיטב ידיעתי אין בנמצא בספרות או במחקר מפות כאלו ולא שימוש בהן. בספרי גיאומטריה (למשל קרמר, 1987) קיים שימוש חלקי ומוגבל מאוד בדיאגראמות וון לתיאור מצבים הדדים במשפחת המרובעים, אך לא מעבר לכך. השימוש במודלים אלו נמצא טוב ויעיל להבנת ההגדרות, למיון הצורות, ליכולת התמודדות עם שאלות וקביעות מסוג אלו שהוזכרו לעיל, לסיוע בהוכחות גיאומטריות ועוד. הדברים נכונים גם לגבי בתי-ספר יסודיים שלא מלמדים את הנושא "קבוצות" או "תורת הקבוצות" בצורה מסודרת. השימוש במפות המוצעות יכול להיות כסיכום להוראת הנושא, כחלק ממהלך ההוראה או ככלי עזר בנקודות זמן וברמות גיל שונות בהם נדרשים לנושאים אלו או לתורת הקבוצות.

משפחת המשולשים

הגדרות מילוליות

עיון בכל ספר הנדסה מצוי (ראה למשל במקורות להלן) מוביל להגדרות הבאות:

1. **משולש** הוא מצולע (קו שבור סגור) בעל שלוש צלעות.
2. **משולש חד-זוויות** הוא משולש שכל זוויותיו חדות.
3. **משולש ישר-זווית** הוא משולש בו אחת מזוויותיו היא זווית ישרה.
4. **משולש קהה-זווית** הוא משולש בו אחת מזוויותיו היא זווית קהה.
5. **משולש שונה-צלעות** הוא משולש בו כל הצלעות שונות באורכן.
6. **משולש שווה-שוקיים** הוא משולש בו שתיים מצלעותיו שוות.
7. **משולש שווה-צלעות** הוא משולש בו כל הצלעות שוות.

מהתבוננות בהגדרות הנ"ל ניתן להבחין בחלוקתן לשלוש קבוצות כדלקמן:

א. הגדרה כללית אחת (1) למשולש - **מהו משולש**.

ב. שלוש הגדרות (4,3,2) למשולשים שונים על-פי אופי **הזוויות** שלהם.

ג. שלוש הגדרות (7,6,5) למשולשים שונים על-פי אופי **הצלעות** שלהם.

מחלוקה זו קל לראות, למשל, כי כל משולש שווה-צלעות הוא גם משולש שווה-שוקיים, או כי משולש שונה-צלעות אינו משולש שווה-שוקיים ולא משולש שווה-צלעות. אולם, הקשר בין סוגי המשולשים לפי זוויות ולפי צלעות אינו תמיד כה ברור או מיידי. הדבר בא על פתרונו בבניית המפה החזותית והצגתה, כפי שמוסבר להלן.

הערות

1. בשל נושא המאמר ומטרתו הובאו כל ההגדרות במקבץ אחד ובסדר זה, אף שהוראתן בכיתה יכולה להתפרש על כמה שיעורים ובסדר הוראה שונה, בהתאם לסוג הכיתה ורמתה.

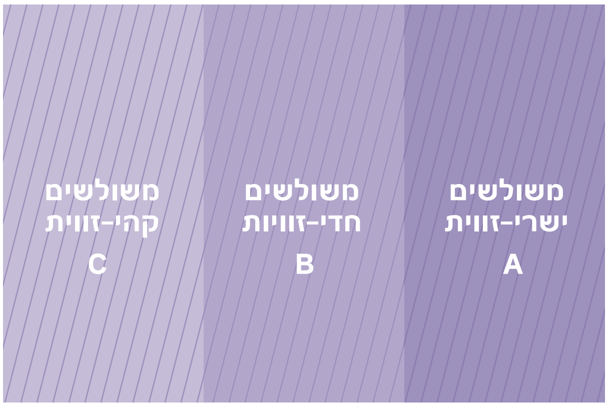
2. במאמר זה נסתמך על המשפט (התכונה) שסכום הזוויות במשולש הוא 180° ועל תכונות נוספות מבלי להוכיחן כאן.

מפה חזותית למשפחת המשולשים בעזרת דיאגראמות וון

לפיתוח המפה החזותית נעשה שימוש בחלוקה הנ"ל כדלקמן: ההגדרה הראשונה (1) - **משולש הוא מצולע בעל שלוש צלעות**, היא הגדרה הכוללת את **כל משפחת המשולשים**, בלא כל מגבלה או תכונה מיוחדת. לכן באופן חזותי נוכל לתאר משפחה זו בעזרת מלבן גדול - הקבוצה האוניברסאלית u (איור 1).

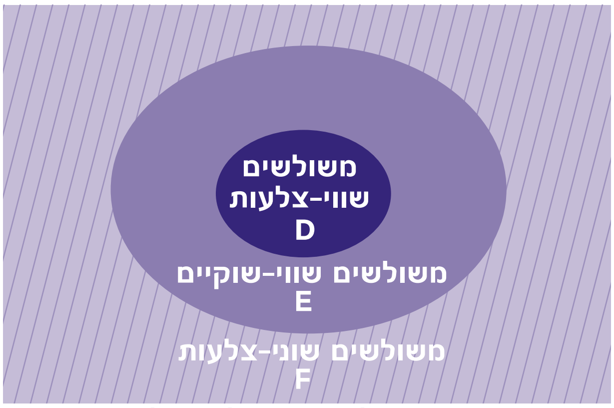
איור 1: משפחת המשולשים - כל המשולשים ללא כל מגבלה, הקבוצה האוניברסאלית - U

הגדרות המשולשים על-פי אופי זוויותיהם, קבוצת ההגדרות (5,4,3) שבחלוקה הנ"ל, מחלקות את משפחת המשולשים לשלוש קבוצות זרות. ואומנם, אם משולש הוא **חד-זוויות** (כל זוויותיו חדות) הוא בוודאי אינו יכול להיות משולש **ישר-זווית** וגם לא משולש **קהה-זווית**, כי במשולשים אלו יש זווית ישרה או זווית קהה. כמו כן, אם משולש הוא **ישר-זווית** הוא אינו יכול להיות לא משולש **חד-זוויות** כי לא כל זוויותיו חדות וגם לא משולש **קהה-זווית**, שאם לא כן יהיו באותו משולש גם זווית ישרה וגם זווית קהה, שסכומן הוא מעל 180°, בעוד שסכום כל זוויות המשולש, בכל משולש, הוא תמיד 180°. באופן דומה, אם משולש הוא **קהה-זווית** אין הוא יכול להיות לא משולש **חד-זוויות** ולא משולש **ישר-זווית**. יוצא אפוא כי אכן יש לפנינו חלוקה של משפחת כל המשולשים **לשלוש קבוצות זרות.** לכן, בשלב זה נוכל לחלק את המלבן של משפחת המשולשים **לשלושה מלבנים זרים** המייצגים את שלוש הקבוצות, (איור 2).



איור 2: משפחת המשולשים - מיון לפי זוויות

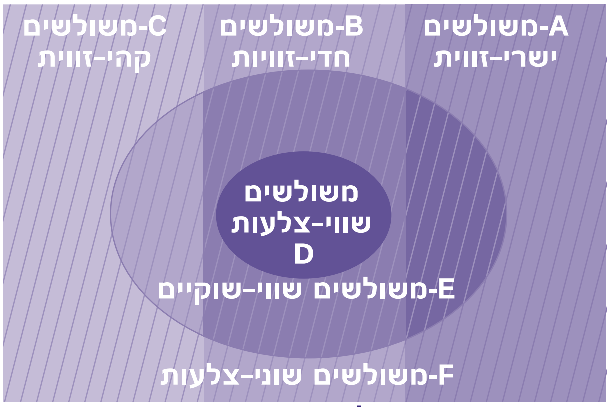
מאידך, הקבוצה השלישית בחלוקת ההגדרות הנ"ל כוללת שלוש הגדרות (7,6,5) של משולשים לפי צלעות. מחלוקה זו אפשר ללמוד כי אם משולש הוא **שונה-צלעות** (כל צלעותיו שונות באורכן) הרי הוא לא יכול להיות משולש **שווה-שוקיים**, בו נדרשות שתי צלעות שוות, ובוודאי לא משולש **שווה-צלעות**, משולש שכל צלעותיו שוות. מאידך, כל משולש **שווה-צלעות** הוא גם משולש **שווה-שוקיים**. כיוון שכך, את משפחת המשולשים האוניברסאליתU נוכל לחלק לשלוש קבוצות, לפי הצלעות, כמתואר באיור 3.



איור 3: משפחת המשולשים - מיון לפי הצלעות

מאיור 3 ניתן לראות כי אכן משפחת כל המשולשים מחולקת לשלוש קבוצות - השטח המקווקו, מייצג את המשולשים שוני הצלעות -F, האליפסה הגדולה מייצגת את המשולשים שווי השוקיים -E ואילו האליפסה הפנימית את המשולשים שווי הצלעות -D.

מכאן, אם נשלב את האיורים 2 ו- 3 נקבל את המפה הכללית (איור 4) של משפחת המשולשים העונה לכל ההגדרות. לכל קבוצה הוספנו גם אות לטינית לזיהוי בנוסף לשם העברי.



איור 4: משפחת המשולשים - המפה החזותית למיון בעזרת דיאגראמות וון

הערה

במקום שיש צבע על צבע או צבע וקווקו פירוש הדבר כי השטח מייצג כמה סוגי משולשים כמספר הצבעים ו/או הקווקו.

דיון

מהתבוננות במפה החזותית (איור 4), מפה שכאמור יכולה להינתן בכיתה בשלבים ובזמנים שונים בהתאם לצרכי ההוראה, מטרותיה וקבוצת הלימוד, ניתן בנקל לראות כי:

א. מיון המשולשים לפי זוויות יוצר **שלוש קבוצות זרות:** המיוצגות באמצעות שלושה גוונים השונים זה מזה, ומסומנות על-ידי B,A ו-C.

ב. מיון המשולשים לפי צלעות יוצר שתי קבוצות זרות: F- משולשים שוני צלעות ו-E- משולשים שווי-שוקיים, קבוצות המשלימות זו את זו. כלומר, שתי קבוצות הכוללות את כל משפחת המשולשים באופן שכל משולש נמצא בקבוצה E **או** בקבוצה F **ורק באחת מהן.** הקבוצה השלישית במיון זה היא האליפסה הפנימית המייצגת את D - משולשים שווי-צלעות. קבוצה זו כלולה כולה בתוך האליפסה הגדולה (קבוצה E) המייצגת את המשולשים שווי-השוקיים. פירוש הדבר כי **כל משולש שווה-צלעות הוא גם משולש שווה-שוקיים.**

ג. האליפסה המייצגת את E - משולשים שווי-שוקיים, מכסה חלקים מכל שלושת המלבנים המייצגים את מיון המשולשים לפי זוויות. משמעות הדבר היא כי **משולש שווה-שוקיים יכול להיות גם משולש ישר-זווית, או גם משולש חד-זוויות או גם קהה-זווית.**

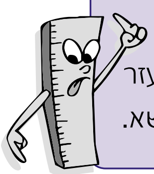
ד. באופן דומה, השטח המייצג את המשולשים שוני-הצלעות - קבוצה F, גם הוא מכסה חלקים מכל שלושת המלבנים של המיון לפי זוויות. ולכן, משולש שונה-**צלעות יכול להיות גם משולש ישר-זווית או גם משולש חד-זוויות או גם משולש קהה-זווית.**

ה. לעומת הנ"ל, האליפסה הפנימית המייצגת את D - משולשים שווי-צלעות, נמצאת כולה מחד, כאמור, בתוך האליפסה הגדולה המייצגת את המשולשים שווי-השוקיים (קבוצה E), ומאידך, נמצאת כולה רק בתוך המלבן המייצג את B - משולשים חדי-זוויות, דבר האומר כי כל משולש שווה-צלעות הוא גם משולש שווה-שוקיים אך בו בזמן גם משולש חד-זוויות. הדבר כמובן נובע מכך שבמשולש שווה-צלעות כל הזוויות שוות וסכומן 180° וזה ייתכן רק אם כל הזוויות חדות (כל אחת בת 60°).

ו. לאור הנ"ל ולאור המבט החזותי של המפה ניתן עתה, ללא קושי רב, לענות על שאלות וקביעות מסוג אלו שהוזכרו לעיל.

למשל: הטענה - "כל משולש חד-זווית הוא גם משולש שווה-צלעות" אינה נכונה שהרי ניתן "לראות" שייתכן גם משולש שווה שוקיים חד-זוויות שאינו שווה-צלעות, ואף ייתכן משולש חד-זוויות שהוא משולש שונה-צלעות. כלומר, **משולש חד-זוויות** יכול להיות משולש מכל אחד מסוגי המשולשים לפי מיון הצלעות - שווה-צלעות, או שווה-שוקיים, או שונה-צלעות. לעומת זאת הטענה - "**כל משולש שווה-צלעות הוא גם משולש חד-זוויות"** בוודאי נכונה, כפי שהוסבר לעיל. גם על שאלות מסוג השאלות הבאות ניתן לענות בנקל.

- האם כל משולש קהה-זווית הוא גם שונה-צלעות?
- האם כל משולש ישר-זווית הוא גם שונה-צלעות?
- האם כל משולש שונה-צלעות הוא חד-זווית?



ענו על השאלות הנ"ל (נסו תחילה לענות בלא להיעזר במפה). נמקו כל תשובה. חברו עוד שאלות בנושא.

כעת נעבור למשפחת המרובעים. במקרה זה נקצר בהסברים שבעיקרם דומים לאלו שכבר הוצגו במשפחת המשולשים.

משפחת המרובעים

הגדרות מילוליות

1. **מרובע** הוא מצולע (קו שבור סגור) בעל ארבע צלעות.
2. **טרפז** הוא מרובע בו רק זוג אחד של צלעות נגדיות מקבילות.
3. **דלתון** הוא מרובע הבנוי משני משולשים שווי-שוקיים בעלי בסיס משותף.
4. **מקבילית** היא מרובע בו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות.
5. **מעוין** הוא מקבילית בעלת שתי צלעות סמוכות שוות.
6. **מלבן** הוא מקבילית בעלת זווית ישרה.
7. **ריבוע** הוא מעוין בעל זווית ישרה.

או: **ריבוע** הוא מלבן בעל שתי צלעות סמוכות שוות.

הערות:

1. הגדרות 1 ו- 3 נכונות הן למרובע **קמור** והן למרובע **קעור** אך לצורך המאמר והעניין שלנו נתייחס רק למרובע קמור גם מפני שיתר ההגדרות עוסקות רק במרובע **קמור**.
2. לריבוע הבאנו שתי הגדרות. מבחינה מתמטית אפשר להסתפק רק באחת ואז השנייה תהפך לטענה שניתן להוכיחה בקלות. שתי ההגדרות מסייעות לנו בבניית המודל והבנתו.
3. הגדרת הטרפז הוקדמה להגדרת הדלתון אף שבדרך-כלל הוראת הדלתון קודמת להוראת הטרפז וזאת מטעמים דידקטיים בבניית המפה החזותית.
4. במרבית ההגדרות ההגדרה כוללת שימוש בהגדרה קודמת בתוספת תכונה נוספת, אלא שלא תמיד ברור מה משמעות הדבר כששתי הגדרות שונות מסתמכות על אותה הגדרה או שתי הגדרות לאותו מושג מסתמכות על הגדרות שונות.

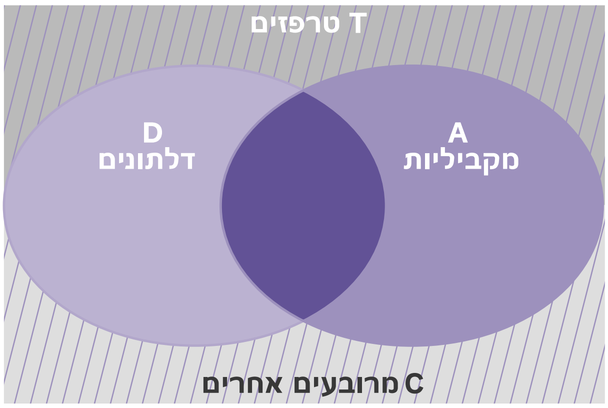
מפה חזותית למשפחת המרובעים בעזרת דיאגראמות וון

השאלות והקשיים שהועלו לגבי משפחת המשולשים נכונות גם במקרה זה, כמובן עם ההתאמה הנדרשת למרובעים. לכן ניגש מיד לבניית המפה.

ההגדרה הראשונה (1) מגדירה **מרובע** - מצולע בעל ארבע צלעות, ללא כל מגבלה או תכונה נוספת. כלומר, זו ההגדרה הכללית ביותר והיא כוללת את כל משפחת המרובעים, אותה נוכל לתאר בעזרת המלבן באיור 5.

איור 5: משפחת המרובעים - כל המרובעים ללא כל מגבלה, הקבוצה האוניברסאלית - u

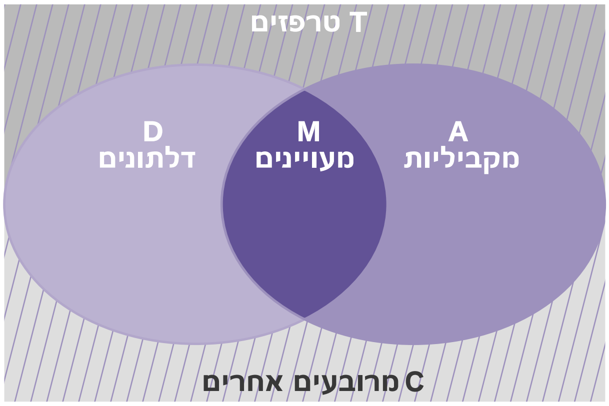
הטרפז הוא מרובע ייחודי במשפחת המרובעים במובן זה שהוא, על-פי הגדרתו (2), אינו יכול להיות אף מרובע מסוג אחר במשפחת המרובעים. לכן הטרפזים -T יוצרים קבוצה נפרדת במשפחת המרובעים. מאידך, הגדרות **הדלתון** (3) **והמקבילית** (4) דורשות כל אחת תכונה נוספת להגדרה הבסיסית של המרובע, כך שאין מניעה שיהיה מרובע שיקיים את שתי הדרישות כאחד. לכן מהגדרת הטרפז ומהגדרות הדלתון והמקבילית נוכל בשלב זה לחלק את משפחת המרובעים לארבע קבוצות באופן הבא (איור 6): המקביליות - A והדלתונים - D, החותכות זו את זו כמוסבר לעיל. הטרפזים -T והקבוצה הרביעית - C מרובעים חסרי כל תכונה.



איור 6: משפחת המרובעים - טרפזים - T, מרובעים חסרי כל תכונה - C, מקביליות - A ודלתונים - D.

מעוין הוא מקבילית בה זוג צלעות סמוכות שוות ולכן המעוינים - M מהווים קבוצה חלקית של המקביליות -A. מאידך, **מעוין הוא גם דלתון** שכן, מאחר שהוא מקבילית בעלת שתי צלעות סמוכות שוות, ובמקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות, יוצא שכל זוג צלעות סמוכות שוות, מה שמקיים גם את הגדרת הדלתון.

פירוש הדבר כי המעוינים - M מיוצגים בדיוק על-ידי השטח המשותף למקביליות - A ולדלתונים - D. מצב זה מתואר באיור 7.

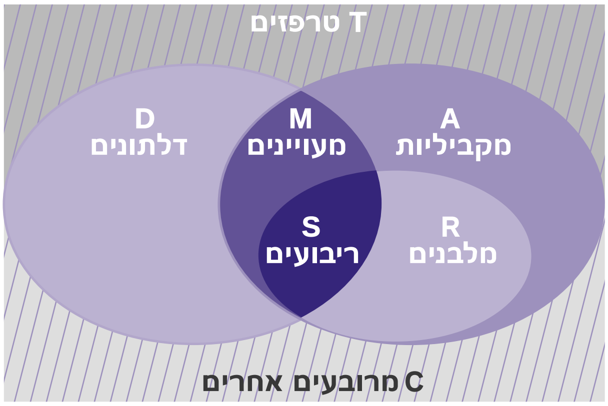


איור 7: משפחת המרובעים - טרפזים, מרובעים חסרי כל תכונה, מקביליות, דלתונים ומעוינים

בשלב זה ניתן לראות כי המפה החזותית של משפחת המרובעים עד כה מאפשרת חלוקה של כל המרובעים ל- 5 קבוצות זרות (על פי סוג ומספר התכונות של המרובע שבכל קבוצה) כדלקמן: טרפזים, מרובעים חסרי כל תכונה נוספת, מקביליות (שאינן דלתונים), דלתונים (שאינם מקביליות) ומעוינים, כך שכל מרובע נמצא בקבוצה אחת ורק אחת.

"האדם החושב" מוזיאון רודן, פאריס

ההגדרה הבאה היא של **המלבן**. המלבן הוא מקבילית בתוספת התכונה של זווית ישרה. לכן, מחד, המלבנים - R הם קבוצה חלקית של המקביליות - A. מאידך, מלבן **יכול להיות גם מעוין אם כל זוג צלעות סמוכות שבו שוות**. אולם אז הוא בוודאי גם דלתון בו נדרש רק שני זוגות של צלעות שוות (ראה הגדרה). כלומר, ייתכנו מלבנים - R שהם גם מעוינים - M וגם דלתונים - D. אבל, ההגדרה האחרונה במשפחת המרובעים היא זו של הריבוע, לו יש שתי הגדרות. **אחת היא - מעוין בעל זווית ישרה, ואחת - מלבן בו שתי צלעות סמוכות שוות**. פירוש הדברים הוא כי הריבועים - S מהווים בו זמנית גם קבוצה חלקית של המלבנים-R וגם קבוצה חלקית של המעוינים - M, וזה אומר כי השטח המשותף למעוינים - M ולמלבנים - R הוא בדיוק השטח המייצג את הריבועים (איור 8). בכך הושלמה בניית המפה החזותית למיון של משפחת המרובעים, כמתואר באיור 8.



איור 8: משפחת המרובעים - מפה חזותית למיון בעזרת דיאגראמות וון

הערה:

כדי להדגיש את ההבחנה בין השטח המייצג את המרובעים החסרים כל תכונה נוספת לבין זה המייצג את הטרפזים, כל קבוצה מיוצגת בגוון שונה של אפור וגם על ידי אות לטינית לזיהוי. אולם, ישנם חלקים חופפים ונסתרים לכן, במקרה שיש שטח "נסתר" בו יש צבע "על" צבע, הדבר אומר כי שטח זה מייצג מרובעים בעלי תכונות כמספר הצבעים.

דיון

1. המפה החזותית של המרובעים אכן מכסה את כל המרובעים האפשריים. כלומר, כל מרובע מכל סוג שהוא שייך לפחות לאחת מהקבוצות שבמפה. הקבוצות מסומנות גם באותיות לטיניות. אין מרובע במשפחה שאינו כלול בתיאור שבמפה זו.

2. במפה יש שתי קבוצות זרות, **הטרפזים** - T **והמרובעים חסרי כל תכונה נוספת** - C. קבוצות שבשום שלב או מצב לא היה ואין להן כל איבר משותף. ואכן הטרפזים כאמור, מהווים קבוצה ייחודית בפני עצמה שאין לה קשר לאף קבוצה אחרת במשפחת המרובעים וכך גם הקבוצה C - קבוצת המרובעים חסרי כל תכונה נוספת.

3. **המקביליות** - A **והדלתונים** - D, מהווים את שתי הקבוצות הבאות במיון משפחת המרובעים. שטחן יחד במפה הוא כל השטח שאינו מייצג את הטרפזים - T ולא את המרובעים חסרי כל תכונה נוספת - C. אולם, לשתי קבוצות אלו יש שטח משותף (חיתוך לא ריק) - M, שטח המייצג בדיוק את המעוינים - M.

4. קבוצת **המלבנים** - R היא כאמור, חלק **מהמקביליות** - A אבל, **מלבן יכול להיות גם מעוין וממילא גם דלתון**. לכן, השטח המייצג אותם - R חותך גם את **המקביליות** - A, גם את **המעוינים** - M וגם את **הדלתונים**- D. שטח חיתוך זה מייצג את קבוצת **הריבועים** - S אכן:

5. **הריבוע** הוא המרובע המשוכלל במשפחה זו ולכן קבוצת **הריבועים** - S היא קבוצה חלקית לכל אחת מיתר הקבוצות: **המקביליות** - A, **המלבנים** - R, **המעוינים** - M, **והדלתונים** - D.

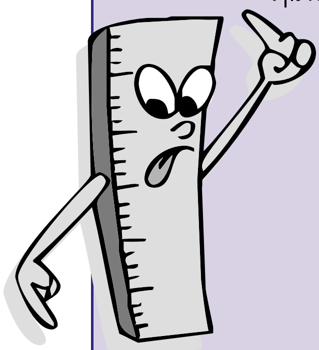
6. המפה מאפשרת לפרק את משפחת כל המרובעים **לשבע קבוצות זרות**. כל אחת מקבוצות אלו מסומנת על-ידי שטח בצבע ואות שונים. הקבוצות זרות במובן של סוג ומספר התכונות שיש לכל אחד מהמרובעים שבקבוצה, גם אם במקור הקבוצה הינה קבוצה חלקית לקבוצה גדולה יותר. (ראה לעיל, לאחר איור 7, שם קבלנו חלוקה ל- 5 קבוצות זרות). הקבוצות הן: טרפזים, מרובעים חסרי כל תכונה נוספת, מקביליות (שאינן דלתונים ושאינן מלבנים), דלתונים (שאינם מקביליות וממילא לא מעוינים ולא ריבועים), מלבנים (שאינם מעוינים), המעוינים (שאינם מלבנים) והריבועים. על פי חלוקה זו כל מרובע נמצא בקבוצה אחת ורק אחת. בפרט, חלוקה זו מאפשרת לראות למשל כי, תתכן מקבילית שאינה לא מעוין, לא מלבן ולא ריבוע. כן כי, תתכן מקבילית לה יש עוד תכונה אחת או יותר ועוד. הוא הדין ביחס לשאר הצורות.

7. כבמקרה משפחת המשולשים גם במשפחת המרובעים המפה החזותית מאפשרת בנקל להשיב על שאלות שונות כגון השאלות הבאות:

- האם מקבילית היא גם טרפז?

- האם יש מקבילית שהיא גם דלתון?

- קבע נכון או לא נכון לטענה:
1. כל מלבן הוא גם דלתון.
2. כל מלבן הוא גם מעויין.
3. כל מלבן הוא גם ריבוע.
4. כל מעויין הוא גם ריבוע.
5. כל ריבוע הוא גם מלבן.



ענו על השאלות הנ"ל.
(נסו תחילה לענות בלי להיעזר במפה). נמקו כל תשובה. חברו עוד שאלות בנושא.

סיום

במאמר זה הצגנו מפות חזותיות לתיאור ומיון משפחת המשולשים ומשפחת המרובעים. המפות המלאות מופיעות באיור 4 ובאיור 8. אפשר, כאמור, להשתמש ישירות במפות אלו, בהתאם לצרכי ההוראה, מטרותיה וסוג הכיתה, ובמקרה כזה יש להתייחס לחלק הדיון שבא אחרי כל מפה. עם זאת במאמר זה הצגנו גם את הרציונל וגם את התהליך המחקרי והשלבים השונים בבניית כל מפה, הן כדי להראות תהליך שלם והן כדי לאפשר התייחסות ודיון בכיתה ו/או בין אנשי הוראה ומקצוע לרעיונות המוצעים. כאמור , במהלך שנות עבודתי הרבות נוכחתי כי מפות אלו יעילות מאוד לתלמידים בגילים שונים ובעלי רקע שונה. בפועל, לא נאספו נתונים אמפיריים שיאפשרו מתן היבט השוואתי בין קבוצות הלימוד השונות.

נודה לכל מי שיעשה שימוש במודלים אלו במסגרת עבודתו ויעביר למחבר נתונים או התרשמות מהתנסותו.

{מקורות}

1. אספיס, א' (1987). **גיאומטריה, טריגונומטריה וסטריאומטריה.** הוצאת המחבר.
2. גורן, ב' (1984). **גיאומטריה של המישור.** מישלב-מכון ישראלי להשכלה בע"מ.
3. קרמר, ע' (1987). **פרקי מתמטיקה, גיאומטריה.** רחובות:המרכז הישראלי להוראת המדעים.
4. תורגמן, א' (1982). **הגדרות ומשפטים בגיאומטריה.** כפר מימון: ישיבת בני עקיבא (פנימי).