לגופו של ענין
נושאים מתמטיים

הקשר בין הכפולה המשותפת המינימלית לבין המחלק המשותף המקסימלי של שני מספרים

ד"ר אליאס עבוד
ד"ר נימר ביאעה

הקדמה

המושגים שנעסוק בהם מתקשרים לפעולות החיבור והחיסור של שברים. כאשר רושמים מכנה משותף של כמה מכנים, אנו בעצם לוקחים כפולה משותפת שלהם, כלומר מספר שמתחלק בכל אחד מן המספרים. טבעי להקל את פעולות החיבור והחיסור על התלמידים ברמת בית־ספר יסודי, לכן נבחר במכנה המשותף הקטן ביותר.

למספר מיוחד זה קוראים כפולה משותפת מינימלית, או בקיצור - כמ"מ. בהרבה מקרים בוחרים במכפלת המכנים כמכנה המשותף. יוצא כי הכמ"מ שווה למכפלת המכנים במקרים שבהם המחלק המשותף המקסימלי (בקיצור- ממ"מ) הוא 1. הממ"מ הוא המספר הגדול ביותר שמחלק שני מספרים (או יותר). במאמר הפתיחה של תמי גירון (ב"מספר חזק" גליון 5), תוארו שיטות לחישוב הממ"מ. כהמשך למאמר הנ"ל, נתאר את הקשר בין הכמ"מ לבין הממ"מ, נתאר שיטה לחישוב הכמ"מ, ולבסוף נראה כמה שימושים.

סימונים

בהינתן שני מספרים טבעיים a ו-b, נסמן את הכמ"מ שלהם על־ידי $[a,b]$ ואת הממ"מ שלהם על־ידי (a,b).

למשל: $[24,60] = 120$

$(24,60) = 12$

הקשר בין הכמ"מ לבין הממ"מ

מסתבר שמספיק לחשב אחד מהם כדי למצוא את האחר. קיים בינהם הקשר הבסיסי הבא:

מכפלתם שווה למכפלת שני המספרים, או בסימונים: $[a,b]\,(a,b) = ab$

למשל בדוגמא שנתנו קודם מתקיים: $[60,24]\ (60,24) = 60 \times 24$

נשים לב ש - $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3^1 = 2^3 \times 3^1 \times 5^0$

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$

כדי לחשב את הכמ"מ והממ"מ אנו מכפילים את הגורמים הראשוניים שמופיעים בפירוק של כל אחד משני המספרים, עם מעריכים מתאימים, כאשר: בוחרים במעריך הגדול עבור הכמ"מ ובמעריך הקטן עבור הממ"מ, וכך אמנם

$[24,60] = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 = 120$

$(24,60) = 2^2 \times 3^1 \times 5^0 = 12$

באופן דומה נקבל, כי $[a,b]\,(a,b) = ab$ לכל שני מספרים a , b .

הרי במכפלה ab כל גורם ראשוני בפירוק של a או של b, מופיע פעם עם המעריך הקטן ופעם עם המעריך הגדול. אותו גורם ראשוני יופיע ב (a,b) עם המעריך הקטן וב $[a,b]$ עם המעריך הגדול. כלומר, אנו כופלים את אותם גורמים ראשוניים באותם מעריכים גם ב- ab וגם ב - $[a,b]\,(a,b)$ ולכן:

$$[a,b]\,(a,b) = ab$$

מהקשר הזה נובעת העובדה שהזכרנו בהקדמה, והיא:

$$(a,b) = 1 \iff [a,b] = ab$$

כלומר: הכמ"מ שווה למכפלת שני המספרים רק במקרה שבו המספרים זרים, דהיינו הממ"מ שלהם הוא 1.

שאלה: האם תכונה זו $[a,b]\ (a,b)=ab$ **ניתנת להרחבה ? כלומר, האם נכון כי** $[a,b,c\ ](a,b,c)=abc$

כדי לענות על שאלה זו, בדוק את השוויון עבור $a=4,\ b=6,\ c=8$ **!**

יישומים

תכונה נוספת של הממ"מ היא, שניתן לקבל אותו כצירוף של שני המספרים.

כלומר, אם $d=(a,b)$ **אזי קיימים** α **ו-** β **מספרים שלמים, כך ש -**

$$a\alpha + \beta b = d$$

למשל: $(2,3) = 1$

$$(-1) \times 2 + 1 \times 3 = 1$$

$$2 \times 2 + (-1) \times 3 = 1$$ **וכדומה.**

אפשר להשתמש בתכונה זו לפתרון משוואות דיופנטיות וגם לפתרון חידות מכלים.

נתאר חידות כאלה:

נניח שנתונים שני כדים, A ו-B, והתכולה שלהם היא a ליטרים ו- b ליטרים בהתאמה. a ו-b מספרים טבעיים.

השאלה היא : אילו כמויות (שלמות) ניתן לקבל על־ידי שימוש בכדים A ו-B?

הנה כמה דוגמאות:

1. $a = 2 \quad b = 3$

במקרה כזה נוכל לקבל כל כמות (שלמה) על־ידי שימוש ב- A ו- B. נוכל לקבל את הכמות $b - a = 1$**, ואז נבצע פעולה כזו פעמים מספר.**

2. $b = 6 \quad a = 4$

לא נוכל לקבל את הכמות 1 ליטר (מדוע)? אבל אפשר לקבל את הכמות $(6,4)=2$ **ליטר וכל מספר שלם שהוא כפולה של 2.**

3. $a = 10$ $\quad b = 4$

איך נקבל 2 ליטר ?

מאחר ש- $2 = (10,4)$ הרי שלפי האמור לעיל קיים לכך פתרון;

ואכן: $2 = 4 \times (-2) + 1 \times 10$ או $2 = 10 \times (-1) + 4 \times 3$.

טענה: באופן כללי ניתן לקבל את הכמויות שהן כפולות של $d = (a,b)$

הוכחה: כל כמות שניתן לקבל על־ידי שימוש בכדים A ו-B היא מהצורה $\alpha a + b\beta$ (α **ו-** β **שלמים), ומכיוון ש-** d **מחלק גם את** a **וגם את** b,

אפשר לכתוב $b = ld$ **ו-** $a = kd$,

ולכן: $\alpha kd + \beta ld = d(\alpha k + \beta l)$

כלומר, כל כמות שניתן לקבל ע"י שימוש בכדים A ו־B היא כפולה של d.