

גאוס והסדרה החשבונית: על האיש ואוסף פעילויות לכתה

אורה הר אל
יפים כץ
מאיה כץ

אם נחבר את כל המספרים הטבעיים מ-1 עד 100 - מה יהיה סכומם?
יש ילדים היודעים לחשב את הסכום ולתת תשובה נכונה - מי בדרך מהירה יותר
ומי באופן איטי יותר. אבל יסכימו כולם כי אם נשאל ילד בן 7 שאלה זו, הוא יתקשה
להשיב תשובה נכונה. ילד צעיר יתחיל לחבר את המספרים לפי סדר: הוא יחבר
תחילה את שני המספרים הראשונים וירשום את סכומם: $1+2=3$ לאחר מכן יוסיף
לסכום את המספר השלישי: $1+2+3=3+3=6$ וכך ימשיך עד 100. קרוב לוודאי שהילד
יתעייף, יתייאש ולא יוכל להתמיד בחישוב ולו רק משום שהסכומים אחרי מספר
צעדים יהיו מספרים שילד בן 7 עדיין אינו מכיר.

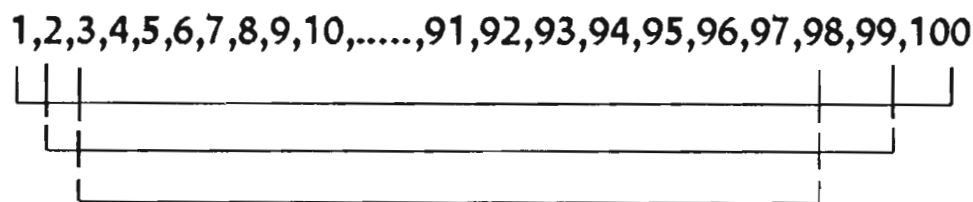
היום אני רוצה לספר לכם על מתמטיקאי שכבר בגיל צעיר התבלט ביכולת החישוב
שלו וביכולת החשיבה המתמטית שלו. שם המתמטיקאי הוא: קרל פרידריך גאוס,
שנחשב בעולם המתמטיקה ראשון המתמטיקאים.

גאוס נולד בעיירה בראונשוויג שבצפון גרמניה במאה ה-18 (1777). כמעט מיום
שנולד התעניין גאוס בחישובים, ומספרים עליו שכבר בגיל 3 היה מתקן לאביו את
השגיאות שמצא בחשבוניותיו. אביו, שהיה בעל השכלה נמוכה, לא ראה ברצון את
התעניינותו של בנו בחשבון ובמדע, אך אימו עודדה אותו לפתח את סקרנותו. בגיל
7 הלך לבית ספר. בשנתיים הראשונות למד לקרוא ולכתוב, ולא התבלט בין חבריו.
אך כאשר התחילו ללמוד חשבון התחיל גאוס הקטן לפרוח. באותה תקופה למדו
ילדים בני גילים שונים באותה כיתה עם אותו מורה. כדי להעסיק תלמידים צעירים
או תלמידים בעלי ידע שונה, היה המורה נותן להם תרגילים בחשבון. התלמידים היו
פותרים בעצמם את התרגילים ומגישים למורה לבדוק את דף הפתרונות. בזמן שחלק
מתלמידי הכיתה היו עסוקים בפתרון התרגילים, היה המורה יכול להקדיש את זמנו
לקבוצת תלמידים אחרת.

המאמר נכתב עפ"י הרצאה שניתנה בטקס חלוקת פרסים בתחרות במתמטיקה, לתלמידים
מכיתות ד'-ט' באזור גוש דן והמרכז, לרגל מלאת שמונים שנה למכללת לוינסקי בתל אביב.

כאן מתקשר הסיפור לשאלה שנשאלתם קודם לכן. גאוס וחבריו קיבלו משימה: היה עליהם לחשב את סכום המספרים מ-1 עד 100. המורה היה בטוח שהצליח לספק לתלמידים תעסוקה לזמן ממושך, וכך יוכל להמשיך בתכנית הלימודים שקבע לעצמו עם קבוצת לומדים אחרת בכיתה. אך לא כך היה. לא עברה דקה וגאוס הניח את הדף על שולחן המורה. המורה, שהיה אדם רגזן והתהלך בכיתה עם מקל כדי להפחיד את תלמידיו, כעס על גאוס כעס רב וקרא לו: "עצלן, רשולן, בכיתה שלי אין מתרשלים, חזור למקומך ופתור את הבעיה". המורה לא האמין שילד בגילו של גאוס יצליח לפתור תרגיל זה בזמן כה קצר. רק לאחר שעתיים, כאשר אסף את כל עבודות התלמידים ובדק אותן, התברר לו כי עבודתו של גאוס היתה העבודה הנכונה היחידה שקיבל מתלמידיו. נסביר לכם בקצרה מה עבר במוחו של גאוס, כאשר חשב על הדרך לפתרון, וכיצד חישב את הסכום:

גאוס הבין שאם רושמים את כל המספרים מ-1 ועד 100 לפי הסדר בשורה, אפשר למצוא זוגות של מספרים אשר להם סכום קבוע -



$$1+100=101$$

$$2+99=101$$

$$3+98=101$$

.

.

.

$$50+51=101$$

כך מתקבלים 50 זוגות שסכום כל זוג הוא 101, ובסך הכל 50×101 שהם 5,050. גאוס חישב את הסכום בנצלו את תכונותיה של סדרה חשבונית, מבלי שהכיר ולמד קודם לעבוד עם סדרות כאלה.

בשנת 1788 התחיל גאוס את לימודיו בגימנסיה (בית ספר תיכון), ולאחר מכן למד באוניברסיטה של גטינגן. בשנות לימודיו בגימנסיה נתגלה בו גם כשרון בלשני מפליא, וגאוס התלבט אם להמשיך לעסוק במתמטיקה או לעבור לתחום הבלשנות. גם כשהחליט להתמיד בלימודי המתמטיקה, שמר על חיבתו לשפות זרות והיה מאחרוני המדענים שכתבו את מאמריהם בלטינית. לעת זקנתו התחיל ללמוד רוסית, והיה היחיד בין אנשי המדע באירופה, מחוץ לרוסיה, שקרא את המחקרים של המתמטיקאים הרוסים בשפת המקור.

גאוס דחה הזמנה של האקדמיה הרוסית למדעים לעמוד בראשה ובחר במשרה צנועה של מנהל מצפה הכוכבים בגטינגן וכפרופסור באוניברסיטת גטינגן עד יום מותו. גאוס עסק בהרבה תחומים במתמטיקה, תחומים שתכירו בעתיד כשתתקדמו בלימודי המתמטיקה. אחד התחומים שעסק בהם היה הגיאומטריה. בין היתר טיפל בבניות של מצולעים משוכללים בעזרת סרגל ומחוגה בלבד (בניות שאין בהן מדידות של אורכים וזוויות). ההוכחות שנתן בתחומים אלה היו ראשונות מסוגן וניתנו לאחר שנכשלו מאמצים של מתמטיקאים בדורות שקדמו לו לטפל בנושא. כשמת גאוס, בגיל 78, הקימו על קברו מצבה בצורת מצולע משוכלל בן 17 צלעות, מצולע שאפשר לבנות בעזרת סרגל ומחוגה בלבד, לפי הוכחה שניתנה על ידיו. גאוס עסק גם באסטרונומיה ובפיסיקה, ובשנת 1833 בנה ביחד עם חבר טלגרף אלקטרומגנטי.

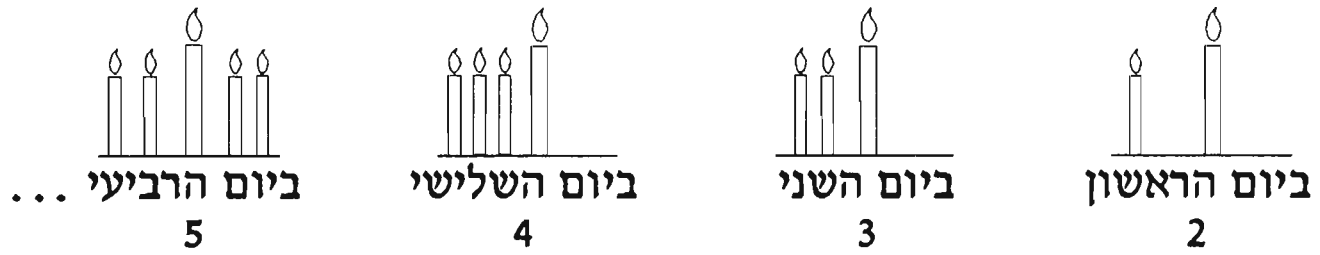
על החריפות השכלית וחוש ההומור של גאוס יעיד הסיפור הבא, ובסיפור זה נסיים. גאוס הקטן הפליא בחכמתו ובחידודיו את מוריו והם ניסו "להכשילו" בשאלות שלא יוכל לענות עליהן. פעם פנה המורה לגאוס ואמר: "אני אשאל אותך שתי שאלות. אם תענה תשובה נכונה לשאלתי הראשונה לא תצטרך לענות על השאלה השנייה". גאוס הסכים, והמורה שאל: "כמה מחטים יש על אילן חג המולד?" גאוס השיב בלי להרהר שניה: "67,534".

"איך אתה יכול לספור כל כך מהר?" התפלא המורה.

ומה לדעתכם היתה התשובה של גאוס? "וזו, מורי נכבדי, כבר שאלה שנייה".

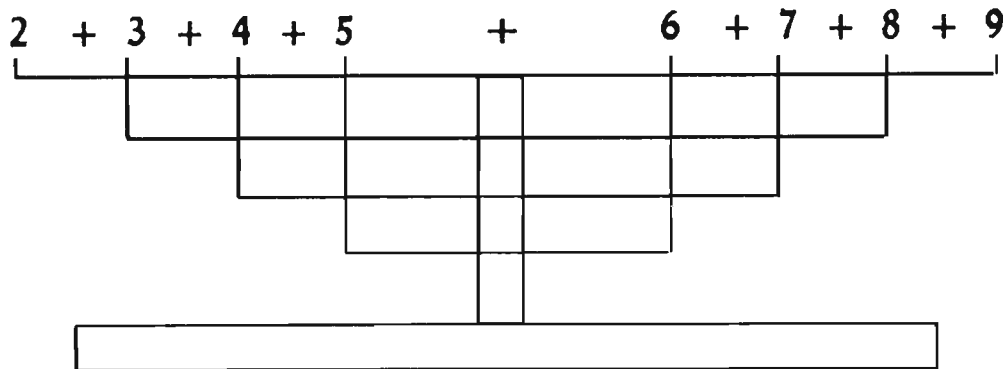
לפניכם פעילויות נוספות הקשורות ב"עקרון" של גאוס לחיבור מספרים

1. כמה נרות מדליקים בחנוכה, כולל השמש?



ב. נסה לחפש קיצור דרך לחישוב מספר הנרות שמדליקים בחנוכה.

רמז:



כעת בדוק את הסכום של כל אחד מהזוגות שלפניך:

$$2+9=$$

$$3+8=$$

$$4+7=$$

$$5+6=$$

ארבעה זוגות שסכום כל זוג הוא: _____ ובסך הכל _____ נרות.

2. חשב את סכום כל המספרים הטבעיים מ-1 עד 100 (התרגיל שניתן לגאוס).

רמז: רשום את כל הזוגות לפי הדוגמא ובדוק את הסכום של כל אחד מהם.

$$1+100=$$

$$2+99=$$

$$3+98=$$

כמה זוגות כאלה יש? _____ מה הסכום של כל הזוגות? _____

3. מה סכום כל המספרים האי־זוגיים מ־1 עד 100?

$$1+3+5+\dots+95+97+99=$$

4. מה סכום כל המספרים הזוגיים מ־1 עד 100?

פעילויות אלה מתאימות לילדים בכיתות ג'־ה'.

שאלות אתגר

5. כמה מספרים מ־1 עד 100 מתחלקים ב־4? מה סכום המספרים האלה?

6. מה סכום הטור הבא?

$$-1+4-7+10-13+16-19+22-25+28=$$

7. עליך להמשיך את הטור שלפניך עד שיהיו בו 10 איברים. מה סכום הטור?

$$2-6+10-14+18\dots=$$

8. מהו סכום הטור הבא?

$$-4+8-12+16-20+24-28+\dots$$

9. עליך לרשום את האיבר העומד במקום ה־20 ולחשב את סכום הטור מבלי לחבר את כל איבריו.

$$+1+2-3-4+5+6-7-8+9+\dots+1989+1990-1991-1992+1993+1994-1995=$$

הערה למורה:

פעילויות 6-9 מתאימות לילדים שלמדו מספרים שליליים. באופן כזה ניתן לחבר פעילויות דומות ולהתאימן לרמות לימוד שונות ולכיתות שונות בביה"ס היסודי ובחטיבת ביניים. כאשר עוסקים בפעילות מסוג זה, אנו מציעים לספר לתלמידים על גאוס.

נסתכל כעת על דוגמא לשלוש דרכים לפתור בעיה:

עליך לחשב את הסכום:

$$-1+4-7+10-13+16-19+22-25+28=$$

$\underbrace{\quad}_{+3} \quad \underbrace{\quad}_{+3} \quad \underbrace{\quad}_{+3}$

דרך א':

$$-1+4-7+10-13+16-19+22-25+28=$$

$$+3+3+3+3+3=$$

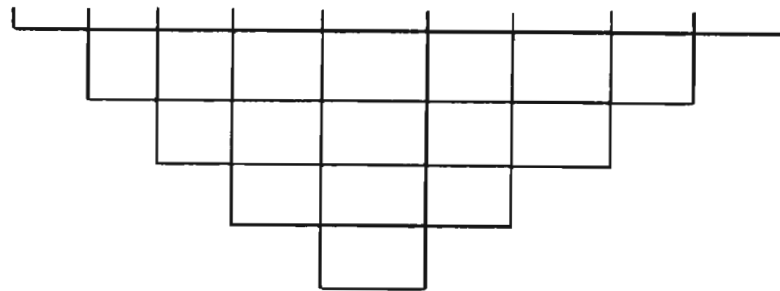
5 זוגות שסכום כל זוג +3

$$5 \times 3 = 15$$

הסכום

דרך ב':

$$-1 + 4 - 7 + 10 - 13 + 16 - 19 + 22 - 25 + 28 =$$



$$(-1+28)+(4-25)+(-7+22)+(10-19)+(-13+16)=$$

$$27-21+15-9+3=$$

$$(27+3)+(-21-9)+15=$$

$$+30-30+15=15$$

דרך ג':

$$-1+4-7+10-13+16-19+22-25+28=$$

$$-1+(4+28)+(-7-25)+(10+22)+(-13-19)+16=$$

$$-1+32-32+32-32+16=$$

$$-1+16=15$$

מקורות:

- האנציקלופדיה העברית, ערך גאוס, הוצאת מסדה.
אנציקלופדיה למתמטיקאי הצעיר, מוסקבה 1985.
אתגורו. ש., (1989) מבוא לתולדות המתמטיקה, חלק ב', משרד הבטחון.
ברגמיני, דוד, (1970), "מתמטיקה", Time Life, הוצאת ספרים מעריב.
שישא, אליעזר, (1977), מתמטיקה ומתמטיקאים, הוצאת מסדה בע"מ.
KAVANT מס' 1, מוסקבה 1972.
KAVANT מס' 8, מוסקבה 1977.

D.J. Struik, 1963, Abriss der Geschichte der Mathematik, Berlin.

Glazer.G, 1964, Mathematical history in school, Moscow.

Krisitzki. V, 1981, A famous Mathematician, Vasha.

Lehmann. J, 1980, Kurzweil durch mathe, Berlin.

Tornbull. H.W, The Great Mathematicians, University paperbacks, Mathuen,
London.