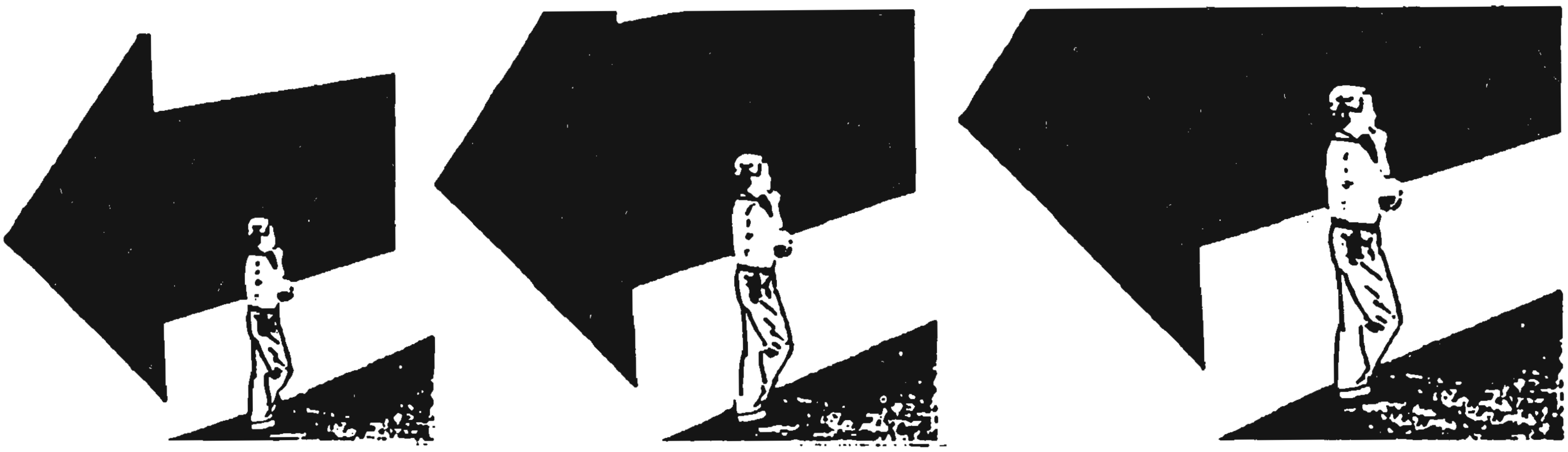

אפשר גם אחרת

חילוק שברים- למה להפוך?

אלכסנדר שקלרסקי

אחת "הטעויות" הנפוצות בקרב תלמידים בפעולות חילוק בשברים היא, שהלומדים "שוכחים" להפוך את פעולת החילוק לפעולת כפל בהופכי ואחד "הקשיים" למורה הוא, להסביר למה להפוך.

מקור הטעות אצל הלומד נובע מאנלוגיה לפעולת כפל בשברים, שיש להכפיל בה מונה במונה ומכנה במכנה.

למשל: $\frac{4}{7} \times \frac{5}{9} = \frac{4 \times 5}{7 \times 9} = \frac{20}{63}$

באופן כללי: $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

רק טבעי הוא בעיני הלומד כי בתרגיל חילוק יש לחלק מונה במונה ומכנה במכנה.

למשל: $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4 : 2}{9 : 3} = \frac{2}{3}$

באופן כללי הלומד מנסה לפתור את תרגיל החילוק כך: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d}$

הפתרון המקובל הוא בהתאם לכלל החילוק: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$

לפיכך, פתרון המורה הוא: $\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{9 \times 2} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

נפתור שוב את התרגיל האחרון:

אבל זו בדיוק התוצאה שקיבל התלמיד בדרכו ה"שגויה" !

נסתכל על דוגמאות נוספות:

פתרון התלמיד: $\frac{4}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4 : 2}{15 : 3} = \frac{2}{5}$

פתרון המורה: $\frac{4}{15} : \frac{2}{3} = \frac{4}{15} \times \frac{3}{2} = \frac{4 \times 3}{15 \times 2} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$

פתרון התלמיד: $\frac{1}{8} : \frac{1}{4} = \frac{1 : 1}{8 : 4} = \frac{1}{2}$

פתרון המורה: $\frac{1}{8} : \frac{1}{4} = \frac{1}{8} : \frac{4}{1} = \frac{1 \times 4}{8 \times 1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

נשאלת השאלה: האם כאשר נתון תרגיל חילוק מתקיימת זהות בין פתרון התלמיד לפתרון המורה. כלומר האם קיימת הזהות הבאה בכל שני שברים ?

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a : c}{b : d} = \frac{a \times d}{b \times c}}$$

מסתבר כי התשובה המיידית של רבים לשאלה זו היא: לא. "כך לא מבצעים תרגיל חילוק, התשובה תתקבל שגויה", האומנם ?

נצא מהשוויון המקובל $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$

$$\frac{a \times d \times \frac{1}{dc}}{b \times c \times \frac{1}{dc}} = \frac{a\,(d \times \frac{1}{d}) \times \frac{1}{c}}{b\,(c \times \frac{1}{c}) \times \frac{1}{d}} = \frac{\frac{a}{1} \times \frac{1}{c}}{\frac{b}{1} \times \frac{1}{b}} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a : c}{b : d}$$

נכפול מונה ומכנה ב - $\frac{1}{cd}$ /

אם כך למרבה ההפתעה התלמיד לא טעה; מדוע אפוא נוהגים רבים לשלול את הפתרון הזה, המוצג בדרך כלל בידי הלומד?

בעיה שמעלה דרך זו הינה : "מה יקרה כאשר התרגיל לא מתחלק יפה"

למשל: $\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3 : 2}{4 : 5} = ?$

להבדיל מתרגילים שמתחלקים יפה כגון:

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \frac{1\ :\ 1}{2\ :\ 2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{3}{4} : \frac{1}{4} = \frac{3\ :\ 1}{4\ :\ 4} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1\ :\ 2}{3\ :\ 3} = \frac{1\ :\ 2}{1} = 1 : 2 = \frac{1}{2}$$

בשלוש הדוגמאות האחרונות קיים מכנה משותף בתרגילי החילוק. רמז לפתרון הבעיה שהועלתה קודם. המושגים הרחבה וצמצום שבר, ומכנה משותף, כבר מוכרים ללומד. נשתמש בהם לפתרון תרגיל החילוק "הבעייתי":

$$\frac{3}{4} : \frac{9}{8} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} : \frac{9}{8} = \frac{6}{8} : \frac{9}{8} = \frac{6 : 9}{8 : 8} = \frac{6 : 9}{1} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3 \times 5}{4 \times 5} : \frac{2 \times 4}{5 \times 4} = \frac{15}{20} : \frac{8}{20} = \frac{15 : 8}{20 : 20} = \frac{15 : 8}{1} = 15 : 8 = \frac{15}{8}$$

$$\frac{7}{8} : \frac{3}{5} = \frac{35}{40} : \frac{24}{40} = \frac{35}{24}$$

אם כן, דרך הפתרון היא: הרחבת השבר לקבלת מכנה משותף, והתוצאה הסופית היא מנת המונים של שני השברים, לאחר הרחבתם למכנה משותף.

באופן כללי:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} : \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{(a\,d) : (c\,b)}{(b\,d) : (d\,b)} = \frac{(a\,d) : (c\,b)}{1} = \frac{a \times d}{c \times b}$$

חזרנו לנקודת ההתחלה, הוכחנו את פתרון התלמיד (המורה) למורה (לתלמיד).

לסיכום: אפשר להתחיל את לימוד החילוק בצורה התואמת את האינטואיציה הראשונית של התלמיד, ולהגיע לדרך הפתרון המקובלת בלי לשלול את פתרון התלמיד. אפשר לקבל את פתרון התלמיד בדרך טבעית בלי הכתבה מלמעלה של הכלל - ב מ ק ו ם לחלק יש לכפול בהופכי.