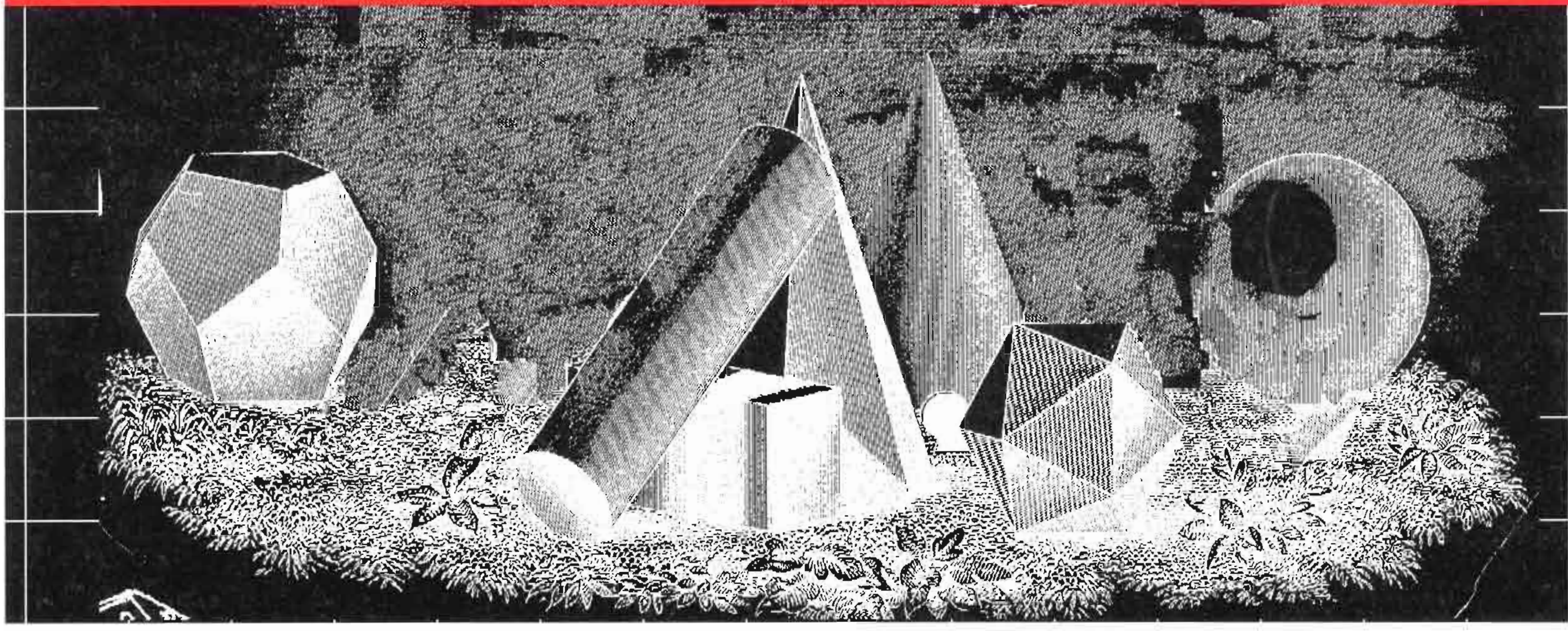

ד"ר עבוד אליאס
ד"ר ביאעה נימר

# בנייה בעזרת סרגל ומחוגה (המשך מגיליון 12)

בסוף המאמר הקודם שפורסם ב"מספר חזק" 12 הצגנו שלוש בעיות קלאסיות שחקרו היוונים בעת העתיקה:

1. הכפלת נפח הקובייה;
2. חלוקת זווית לשלושה חלקים שווים;
3. תרבוע המעגל.

הפתרונות לשלוש הבעיות מותנים בכך שיתקבלו באמצעות בנייה בשימוש בסרגל ומחוגה.

## א. הכפלת נפח הקובייה:

בעיה זו לא ניתנת לפתרון באמצעות סרגל ומחוגה. לא ניתן להכפיל נפח קובייה שאורך צלעה $a$, אחרת ניתן לבנות קוביה שנפחה $2a^3$ ואז יש לבנות צלע שאורכה $a\sqrt[3]{2}$.

שורש שלישי כזה לא ניתן לקבל על-ידי הוצאת שורשים ריבועיים (בבנייה) ולכן לא ניתן לבנות צלע כזו כמו שהוסבר בגיליון מס' 12.

אגב, בגיליון מס' 12 מוזכרת בעיה זו בהקשר להתפתחות הגיאומטריה: "הבעייה הדלית מהמיתולוגיה היוונית (מספר חזק 12 עמ' 4).

## ב. חלוקת זווית לשלושה חלקים:

לא ניתן לחלק זווית לשלושה חלקים שווים באמצעות סרגל ומחוגה.

כלומר, יש זוויות שניתן לחלקן כמו למשל $90^\circ$, $180^\circ$...

לדוגמה, ניתן לחלק את הזווית $90^\circ$ לשלושה חלקים שווים בני $30^\circ$ כל אחד, שכיוון שאפשר לבנות זווית של $30^\circ$:

נבנה משולש ישר זווית שבו אחד הניצבים שווה למחצית היתר, ועל-פי משפט גיאומטרי שווה הזווית שמול ניצב זה ל- $30^\circ$.

אך לעומת זאת יש זוויות שלא ניתן לחלקן לשלושה חלקים שווים והדוגמה הקלאסית היא זווית בת $60^\circ$.

לא ניתן לבנות את הזווית $20^\circ$ בעזרת סרגל ומחוגה, כדי להוכיח זאת נשתמש בגיאומטריה.

בניית זווית $\alpha$ שקולה לבניית קטע באורך $COS\alpha$, כי אם נבנה משולש ישר זווית עם יתר שאורכו 1 וניצב באורך $COS\alpha$ נקבל שהזווית בין היתר לניצב זה היא בת $\alpha^\circ$.

נראה עכשיו ש- $COS\ 20^\circ$ הוא פתרון של המשוואה:

$$0 = 8x^3 - 6x - 1$$

ואת זה נסביר בהסתמך על הזהות הטריגונומטרית:

$$COS3\alpha = 4COS^3\alpha - 3COS\alpha$$

נציב $\alpha = 20^\circ$ ונקבל:

$$COS60 = 4COS^3 20 - 3COS20$$

אם נסמן $x = COS20$

וידוע ש: $COS60 = 1/2$

נקבל: $1/2 = 4x^3 - 3x$

לכן: $1 = 8x^3 - 6x$

מפתרון המשוואה: $8x^3 - 6x - 1 = 0$

לא מקבלים שורשים ריבועיים ולכן לא ניתן לבנות זווית $20^\circ$ ומכאן שלא ניתן לחלק את הזווית $60^\circ$ לשלושה חלקים שווים.

### ג. תרבוע המעגל:

לא ניתן לבנות ריבוע ששיטחו שווה לשטח עיגול נתון. אם ניקח מעגל שרדיוסו 1, הרי ששיטחו שווה ל-$\pi$. אורך צלע הריבוע הנדרש צריך להיות שווה ל- $\sqrt{\pi}$ . לא ניתן לבנות בעזרת סרגל ומחוגה קטע שאורכו $\sqrt{\pi}$ (וגם לא באורך $\pi$!), מכיוון שלא ניתן לקבל מספר זה על-ידי גורמים ריבועיים של מספרים רציונליים.

היוונים לא ידעו שאי-אפשר לפתור את הבעיה באמצעים שעמדו לרשותם (חרט, סרגל ומחוגה) והמשיכו לנסות לפתור את הבעיה. תוך כדי כך תרמו תרומה גדולה להתפתחות המתמטיקה.

את ההוכחה הסופית לחוסר האפשרות לפתור את בעיית תרבוע המעגל בעזרת סרגל ומחוגה נתן רק ב- 1882 המתמטיקאי לינדמן (Lindemann C.L.), כ- 2300 שנה אחרי ניסיונותיהם של המתמטיקאים היוונים וביניהם היפוקראטס (עליו תוכלו לקרוא ברשימה על תולדות המתמטיקה בגיליון זה).