

צוואתו של הבדואי

להמשך חקירה ולהכללת הבעיה. לדוגמה נציג את פרדוקס "צוואתו של הבדואי": הפעילות מתאימה לכיתות ה' ומעלה וקשורה לנושא השברים הפשוטים.

מקובל לחשוב שפרדוקסים מתמטיים מתאימים ל"מומחים במתמטיקה". אולם, ישנם פרדוקסים שניתן לפתור גם בבית-הספר היסודי.

ניתן להגיש את הפרדוקס לתלמידים כבעיה פתוחה (ללא התוויית דרך הפתרון) ובהמשך להנחות את התלמידים

צוואתו של הבדואי - פעילות חקר לקבוצה

בדואי זקן מת והוריש לשלושת בניו:

90 דונם אדמה

18 גמלים

17 כבשים.

בצוואתו נכתב:

"את כל רכושי יש לחלק בין בני באופן הבא:

מחצית לבני הבכור, שליש לבני האמצעי וחשיעית לבני הצעיר" הבנים התקשו בחלוקת הירושה. עזרו לבנים לחלק את הירושה:

לבן הצעיר	לבן האמצעי	לבן הבכור
אדמות	אדמות	אדמות
גמלים	גמלים	גמלים
כבשים	כבשים	כבשים

● מה הם לדעתכם, הקשיים שנתקלו בהם הבנים?

● מתי לדעתכם התעוררו הקשיים? בחלוקת האדמות, הגמלים או הכבשים?

● האם תוכלו להציע לבנים כיצד להתגבר על הקשיים?

מאחר שלא מצאו הבנים פתרון פנו אל שיד השבט לבקש עזרה.

השיד חשב וחשב ולבסוף אמר: "אילו הוריש לכם אביכם, במקום הכבשים, 17 ק"ג צמר כבשים הייתם מסתדרים ללא עזרתי. אבל גם כך נמצא פתרון: "אשאיל לכם כבשה אחת וכך יהיו לכם 18 כבשים. הבן הבכור יקבל תשע מהן, האמצעי יקבל שש מהן והצעיר יקבל שתי כבשים. ביחד תהיינה לכם 17 כבשים ותוכלו להחזיר לי את כבשתי"

הבנים חזרו מרוצים וחילקו את הירושה.

דונו בקבוצה בשאלות הבאות:

- כיצד ייתכן שנותרה הכבשה שהוחזרה לשיד?
- האם צדק השיד כשאמר: " אילו הוריש לכם אביכם, במקום הכבשים, 17 ק"ג צמר כבשים הייתם מסתדרים ללא עזרתי?"
- מדוע, לדעתו, לא היו מתעוררות בעיות בחלוקת הצמר?
- האם בהתאם לעצתו של השיד קיימו הבנים את צוואתו של אביהם כלשונה?
- האם הצליחו לחלק ביניהם את כל רכושו של האב?
- הציעו דרכים לבדיקה.
- האם לפי עצתו של השיד לא קופח אחד הבנים?
- האם לפי עצתו של השיד קיבל מישהו חלק גדול יותר מהמגיע לו?

הצעה דידיקטית למורה – ניתוח פתרון הבעיה ופעילות חקר לתלמידים

במבט ראשון נראה שהבעיה היא רק בחלוקת הכבשים (ועל כן פנו הבנים לשיד). וזאת משום שאין כל בעיה במציאת החלקים (חצי, שליש ותשיעית) מתוך 90 דונם אדמה וגם מתוך 18 גמלים. ואולם אם נרצה למצוא את החלקים האלו מתוך 17 כבשים נקבל מספרים לא שלמים וכאן מתעוררת בעיה.

מובן שאילו 17 הכבשים לא היו יצורים חיים, אלא 17 ק"ג צמר שניתן לחלקם, לא היתה מתעוררת הבעיה. ואולם, בעיון נוסף בבעיה מתברר שהצוואה לא קוימה במדויק לגבי כל אחד מהפריטים שהוריש האב.

א. נבדוק את חלוקת האדמות:

הבן הבכור קיבל מחצית מ- 90 דונם, כלומר הוא קיבל 45 דונם.

הבן האמצעי קיבל שליש, כלומר הוא קיבל 30 דונם. והבן הצעיר קיבל תשיעית, כלומר הוא קיבל 10 דונם. סכום הדונמים שקיבלו שלושת הבנים הוא 85. כלומר, חמישה דונמים לא חולקו.

לפיכך כאן אפשר להציג לתלמידים שאלת אתגר: **כיצד לחלק את חמשת הדונמים הנוותרים?**

אם יציעו התלמידים להמשיך ולחלק על-פי החלקים שהוצגו בצוואה, (והרי אין בעיה לחלק דונם לחלקים), יבחינו התלמידים שתמיד יישאר חלק שלא חולק בין הבנים. החלק

ילך ויקטן אבל לא יעלם! למעשה, לא נפתרה בעית חלוקת האדמות!

ב. באותה הדרך נבדוק את חלוקת הגמלים:

הבן הבכור יקבל תשעה גמלים, הבן האמצעי יקבל שישה גמלים והבן הצעיר יקבל שני גמלים. ביחד יקבלו שלושתם 17 גמלים. ומה עם הגמל שנותר?

ג. בחלוקת הכבשים:

הבכור יקבל תשעה כבשים, האמצעי שישה כבשים והצעיר שתי כבשים.

ביחד 17 כבשים, והכבשה ה- 18 תוחזר לשיד.

אבל אם נבדוק מה היה קורה אילו היו מחלקים 17 ק"ג צמר כבשים, נמצא:

$$\frac{1}{2} \times 17 = 8 \frac{1}{2} \quad \text{הבכור יקבל:}$$

$$\frac{1}{3} \times 17 = 5 \frac{2}{3} \quad \text{האמצעי יקבל:}$$

$$\frac{1}{9} \times 17 = 1 \frac{8}{9} \quad \text{הצעיר יקבל:}$$

וכשנחבר שוב לא נגיע ל 17 ק"ג ונחזור לבעיה שהתעוררה בחלוקת האדמות.

לכאורה, נראה שרק חלוקת הכבשים היתה יכולה להתבצע, כך שכל הכמות תחולק בין הבנים. אך האם באמת התבצעה החלוקה במדויק על פי הכתוב בצוואה?

כאן יש להפנות את התלמידים לשאלה:

האם תשע הכבשים שקיבל הבן הבכור הן באמת מחצית מ- 17 כבשים?

ברור שלא. הבן הבכור קיבל קצת יותר ממחצית. את הבדיקה הזו יש לערוך לגבי כל אחד מהאחים. ייתכן שמישהו קופח בעוד שהאחר מקבל "קצת יותר"! בבדיקה נמצא שבעצם אף אחד לא קופח (ובכך גדולתו של השיד)!

$$\frac{9}{17} > \frac{1}{2} \quad \text{והרי } \frac{9}{17} \text{ קיבל הבכור}$$

$$\frac{6}{17} > \frac{1}{3} \quad \text{והרי } \frac{6}{17} \text{ קיבל האמצעי}$$

$$\frac{2}{17} > \frac{1}{9} \quad \text{וגם במקרה זה } \frac{2}{17} \text{ קיבל הצעיר}$$

כיצד ייתכן שכולם קיבלו יותר מהמגיע להם?

שאלה זו מתקשרת לבעיה שהתעוררה בחלוקת האדמות והגמלים. הבדואי הזקן לא דאג לחלק את כל רכושו לבכור והורישי. הורישי $1/2$ לאמצעי הורישי $1/3$ לצעיר הורישי $1/9$. ביחד הורישי לשלושתם $1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18$ מרכושו. ל- $1/18$ מרכושו לא דאג הבדואי הזקן.

מרכושו. ל- $1/18$ מרכושו לא דאג הבדואי הזקן.

ועוד ירושות... – פעילות נוספת לקבוצה או ליחיד:

שהורישי לבניהם שונים, אבל השגיאה חוזרת! וכך הורישי אחד מהם:

מתברר שכל שבעת אחיו הזקנים של הבדואי עשו את אותה השגיאה בצוואותיהם. רכושם שונה, החלקים

לבן הבכור	לבן האמצעי	לבן הצעיר
$1/2$	$1/4$	$1/8$

אבל הפעם התעוררה בעיה נוספת:

לבן הבכור	לבן האמצעי	לבן הצעיר
$2/3$		$1/6$
$1/2$		$1/12$
	$1/3$	$1/9$
	$1/4$	$1/5$
$1/2$		$1/7$
	$1/3$	$1/8$

את צוואותיהם. נסו גם אתם למחוק בטבלה את החלקים הרשומים ולהציע חלוקה אחרת, כך שבאמת תהיה אפשרות לחלק את כל הרכוש.

חלקים מהצוואות נמחקו. התוכלו להשלים? כשראה זאת שיך השבט מיהר להציע לאחים לשנות

הצעות דיסקטיות למורה:

א. דיון קבוצתי של התלמידים.

הבעיה מותאמת לקבוצה הטרוגנית. הדיון במרכיבי הירושה שונה מבחינת מרכיבי הקושי, ועל כן יש להניח שכל תלמיד יחקור על-פי יכולתו ויתרום את חלקו לקבוצה.

ב. דיון במליאה והנחיה של המורה על-ידי שאילת שאלות מנחות.

ג. חקירה נוספת ליחידים או קבוצות (ועוד ירושות...).

בבליוגרפיה:

מובשוביץ - הדר נצה (1990), הא-כיצד?! אוסף פרדוכסים מתמטיים. טכניון, חיפה.