קריטריונים לגילוי תלמידים מוכשרים במתמטיקה

ד"ר בנו ארבל

(פורסם בשנתון המכללה, סמינר הקיבוצים 1997)

"שנינות - פירושה היכולת לזהות את הדמיון בין דברים שונים והשוני דברים דומים"

סופרת צרפתייה (1766-1817) Madame de stael

"The moving power of mathematical invention is not reasonimg but imagination"

מתמטיקאי (לוגיקן) אנגלי (1806-1871) Morgan Augustus

1. מבוא

הציטטות דלעיל באות להמחיש את הדעה כי יצירתיות במתמטיקה (ולא רק במתמטיקה) קשורה לשנינות ולדמיון.

במאמרו Arnold E. Ross ***Creativity: Nature or Nurture?*** כותב בנוגע לכשרון:

"It is quite usual for scientific or mathematical talent to manifest at an early age often in the early teens. In the instances of the successful maturing of such talent and of the development of high competence, one finds often the continued opportunity for contact with good mathematical and scientific ideas and with people who are capable of providing encouragement guidance toward significant challenges. It apears that very vivid, early impressions leave their mark upon the nature of the ultimate achievement"

מדברים אלה משתמע בברור חשיבות הגילוי המוקדם של הכישרון וטיפוחו באווירה המתאימה. בהמשך הוא מציין את פריחתה של המתמטיקה בהונגריה בתחילת המאה (פריחה הנמשכת עד עצם היום הזה), בעקבות הופעת כתב העת Mathematkai Lapok (דפים מתמטיים), שהצליח להלהיב צעירים באופן יוצא מן הכלל. נוסיף, כי גם התחרויות במתמטיקה (מה שקרוי Hungaian Competitions), תרמו לא מעט לפריחה זו. מתמטיקאים שהפכו מפורסמים, כמו John von Neumann, George Polya, Paul Erdod, Gabor Szego, Eduard Teller. ועוד הרבה אחרים, התחנכו באווירה שיצר כתב העת, ובאווירת התחרויות והטיפוח של אלה שמצאו עניין בנושא חשוב זה. מאוחר יותר היו המתמטיקאים הללו בעצמם מוקדי משיכה לצעירים, וכך נוצרה אסכולה מפוארת של מתמטיקה "הונגרית".

Ross מזכיר גם את העובדה שעם שובו ב- 1934 של הפיזיקאי Peter Kapitza לברית-המועצות (לאחר שהות של שנים מספר באנגליה), הוא גייס כמה מתמטיקאים חשובים, כמו I.M. Gelfand ו- A.N. Kolmogorov לעמוד יחדיו בראש תוכנית לאומית לגילוי ולטיפוח כישרונות צעירים. התוכנית זכתה בהצלחה גדולה, ומתמטיקאים גדולים רבים צמחו בעקבותיה. במאמרו מזכיר Ross את המתמטיקאי והמחנך S.O. Shatunovsky מאודסה, שכבר בתחילת שנות העשרים השיג אישור מיוחד שתלמידים צעירים (בני פחות מ- 16 שנה) יהיו רשאים לשמוע קורסים באוניברסיטה, דבר שלא היה מקובל בזמנים ההם. נציין כי Ross עצמו היה אחד מהארבעה שהשתתפו בתוכנית. כבר אז הכירו בחשיבות התלמידים ב"מעמד מיוחד".

המתמטיקאי האמריקני Lynn Arthur Steen (היה נשיא American Mathematical Society) כותב במאמרו:

Mathmatics Education: A Predictor of Scientific Competitiveness:

"... Since mathematics is the foundation discipline for science, the state of mathematics education is crucial predictor of future national strength in science and technology".

הוא ממשיך ואומר:

"Because of its widespread utility in industrial, military, and scientific applications, mathematics is a indicator of future economic competitiveness".

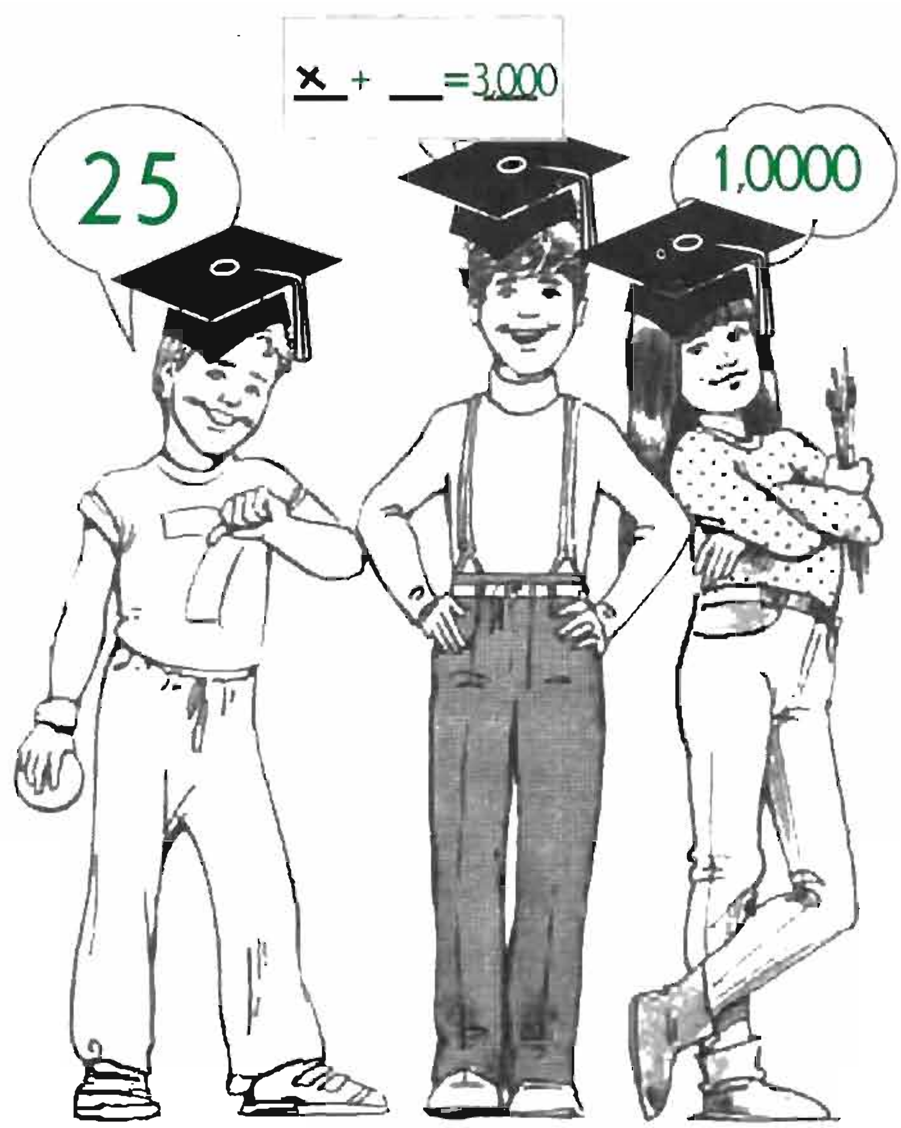
2. תנאים והשקפות

כל ניסיון לנסח קריטריונים מעשיים לגילוי ולקידום תלמידים מוכשרים באופן מיוחד (במתמטיקה או בתחומים אחרים), תלוי בכמה תנאים, שחלקם "אדמיניסטרטיביים" (כגון תוכניות הלימודים בבתי-הספר), וחלקם "ערכיים" (כגון המטרות החינוכיות). כפי שצוין במבוא, גורמים מסוימים (כתב-עת מוצלח, איש מדע בעל שיעור-קומה המבין את הנושא ומתעניין), יכולים לתרום ולעזור לגילוי התלמידים המוכשרים באופן מיוחד. נציין כי אין אנו מדברים על תלמידים מוכשרים שישיגו ציון 10 במבחן בגרות במתמטיקה ברמה של חמש יחידות לימוד, אלא הרבה מעבר לזה.

ניתן לסכם את התנאים עליהם אנו מדברים באופן הבא:

1. גיל אוכלוסיית התלמידים שמתוכה רוצים לגלות את המוכשרים באופן מיוחד. אנו נתייחס (מלבד הערות מעטות) לתלמידים שמעל 11 שנה (תלמידים שנמצאים בשלב האופרציונלי הפורמלי). לדעתנו, לפני השלב האופרציונלי הפורמלי אין אפשרות לגלות כישרון מתמטי שלגביו יש סבירות גבוהה שיוכל לממש את הפוטנציאל שלו בעתיד. התכונה הבולטת ביותר בכישרון מתמטי היא יכולת ההפשטה. לפני השלב האופרציונלי הפורמלי תכונה זו אינה ניתנת לגילוי, ועל כן העיסוק ב"כישרון מתמטי" לא יכול להיות בגיל צעיר מדי.
2. תוכנית הלימודים בבתי-הספר עלולה להגביל אותנו במתן מבחר הולם. עם זאת, מכיוון שמעצם הגדרת ה"כישרון המיוחד" נמצא הפרמטר של התעניינות יתר, "מבחני המיון" לתלמידים בכיתות נמוכות יותר ידרשו גם מושגים של כיתה גבוהה יותר.
3. כפי שמצביעים מחקרים מסוימים אין מתאם גבוה בין מבחני .I.Q לבין התנהגות אופטימלית בפתרון בעיות מסובכות. על כן "במבחני המיון" יושם דגש מועט בשאלות מן הסוג של מבחני .I.Q.במבחני המיון, יחד עם שאלות של ידע וטכניקה (שהם נחוצים וחשובים), יופיעו שאלות של תובנה, הבנה מעמיקה ועוד יכולות חשובות. הפרטים המלאים מתוארים בסעיף הבא.
4. ההשקפה שלנו בנושא היא שניתן לשאול שאלות כך שתתקיים סבירות גבוהה ביותר, להתבלטות כישרון אמיתי. הדגש אינו על כמות השאלות שהנבחן עונה, אלא על אופן הפתרון ועל איכות הרעיונות.

בסעיף הבא תוצג "הגדרה" של הכישרון היצירתי במתמטיקה באמצעות יכולות שניתנות להבחנה.



3. כישרון ויצירתיות במתמטיקה

3.1 יצירתיות בגיל צעיר

ילדים (צעירים מאוד – אפילו לפני השלב האופרציונלי הפורמלי), המגלים סקרנות מיוחדת, בעלי אוצר מילים עשיר ביותר, האוהבים "לשחק" ברעיונות (בעלי דמיון) הם מועמדים טבעיים למבחני מיון (עתידיים) הבודקים יכולות מתמטיות. נתייחס כעת לשלושה תחומים שבהם אפשר לבחון "ייחודיות" אצל ילדים בכלל ואצל ילדים צעירים בפרט (השלב האופרציונלי הקונקרטי). התחומים הם: התחום הוורבאלי, התחום של הפירושים הגרפיים והתחום החשבוני.

א. יכולת ורבאלית

נבחן את הפתיחה של כל אחד מחמש "קורות חיים" שנכתבו בידי חמישה ילדים שונים:

1. נולדתי ב- 1985 ומאז אני חי על כדור הארץ ללא הפסקה...

2 נולדתי במשפחה רגילה לחלוטין. לאחי הבכור יש שני ראשים...

3. ב- 20 בינואר 1985, בגיל אפס, עברתי הנה ממקום אחר...

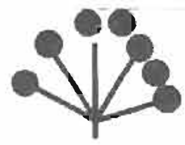
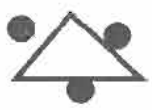
4. כאשר אבי ראה אותי לראשונה (היה זה ב- 4 אפריל 1984) הוא ברח להרים. אנחנו (אמי ואני) באנו בעקבותיו...

5. נולדתי ב- 15 באוקטובר 1985 בבית החולים בילינסון שבפתח-תקווה. אני הבכור מבין שלושת הילדים של משפחתנו.

אפשר בקלות להיווכח בדמיון וביכולת הביטוי של ארבעת הילדים הראשונים, לעומת ה"יובש" של החמישי.

ב. הבנה של תיאורים גרפיים

בחינת הדמיון של ילדים צעירים (ולא רק שלהם) יכולה להיעשות גם באמצעים גרפיים. בדוגמאות שבטבלה הבאה נביא במקביל את המענה ה"רגיל" לעומת המענה ה"מיוחד" לתרשימים אותם אפשר לפרש בצורות שונות.

תרשים	מענה רגיל	מענה מיוחד
	לוח עליו נמצאים כדורים בשורה	אצבעות רגלו של פסל או תאור חלק כף רגל (עם האצבעות)
	מסמרים בתוך לוח עץ	טיפות גשם או חמש תולעים הנעות במבנה
	פרח (או בלונים קשורים)	סוכריה על מקל בטעמים שונים
	גבעות	נייר מקופל
	חוט מתכת	צבע (לציור) שהוצא משפופרת
	שמש עולה	חקה של דייגים נטויה תחת משקלו של דג
	שולחן משולש ושלושה כסאות עגולים	שלושה עכברים אוכלים גוש גבינה
	אגרטל	שני אנשים מתבוננים זה בזה

ג. בתחום החשבוני

לרשותך עומדים ארבע ספרות של 4. רשום באמצעות ארבע פעולות החשבון, חיבור, חיסור, כפל וחילוק, מספרים שלמים בסדר עולה, החל מהמספר אפס.

רישום אפשרי (אך לא יחידי) של המספרים השלמים מ- 1 ועד 9 (ללא דילוגים) הוא כדלקמן:

$$0=4-4+4-4$$

$$1=\frac{4}{4}+4-4$$

$$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}$$

$$3=\frac{4+4+4}{4}$$

$$4=4+\frac{4-4}{4}$$

$$5=\frac{4\cdot 4+4}{4}$$

$$6=4+\frac{4+4}{4}$$

$$7=4+4-\frac{4}{4}$$

$$8=4+4+4-4$$

$$9=4+4+\frac{4}{4}$$

בעיה קשה (עובדה בדוקה בשטח) מהסוג הזה היא: רשום את המספר 21 באמצעות הספרות 1, 5, 6 ו- 7. כל ספרה צריכה להופיע פעם אחת בלבד. אותה פעולת חשבון יכולה להופיע יותר מפעם אחת. לא כל פעולות החשבון חייבות להופיע.

$$21=\frac{6}{1-\frac{5}{7}}$$

הפתרון נתון על-ידי בעיות מהסוג הזה יכולות להופיע גם במבחנים של תלמידים לפני גיל 11.

עד כה הדגמנו בעיות וסוגי בעיות שיכולות להופיע במבחנים השונים. נתמקד עתה בנושא הכישרון המתמטי.

3.2 מאפיינים של כישרון במתמטיקה

בהגדרה הכללית, יצירתיות היא תהליך שנולדים רעיונות בעלי משמעות, הופכים אותם ליישומיים וכן ממירים רעיונות מתחומים אחרים לתחום חדש. יצירתיות במתמטיקה פירושה יצירת רעיונות מקוריים ובעלי עניין במתמטיקה.

מבחינתנו כישרון מתמטי מתבטא בקבוצה של יכולות הניתנות להבחנה אצל הפרט. אם לנבחן יהיו הישגים משמעותיים בכל היכולות הללו, או אפילו בחלק גדול מהן, הרי שקיימת הסתברות גבוהה לעבודה יצירתית מוצלחת בעתיד בתחום המתמטיקה ובתחומים קרובים.

נוסיף, כי מהניסיון שנצבר במשך יותר מ- 10 שנים, בתוכנית לגילוי ולעידוד תלמידים מצטיינים במתמטיקה באוניברסיטת תל-אביב, מתברר כי תלמידים שעברו בהצלחה מבחני מיון, שהם נשאלו שאלות, והובחנו אצלם יכולות מתמטיות שונות, הם גם תלמידים מצטיינים בלימודיהם בבית-הספר למדעי המתמטיקה.

היכולות שהוגדרו משמעותיות בגילוי כישרון מתמטי הן:

- הפשטה (ההכרחית והקשורה בקשר הדוק לכל יכולת חשיבתית).
- תובנה (או "הברקה", שהיא היכולת להגיע לפתרון בעיה על-ידי "רעיון מבריק").
- אנלוגיה.
- הבנה מעמיקה (הבנת מבנים מורכבים ושליטה במבנים אלה).
- זיהוי דפוסים וחוקים.
- הכללה.
- שליטה בטכניקות שונות.
- ניתוח מעמיק של המקרים השונים שיכולים להופיע בניסיון לפתור בעיה (מדובר ביכול החקירה של המקרים השונים שיכולים להופיע בניסיון לפתור בעיה. יכולת זו שונה במידה מסוימת מהבנה מעמיקה, שכוונתה הבנת מבנים מורכבים של הצגת הבעיה עצמה. ברור כי קיים קשר ביניהם).
- אבחנה (זו יכולת שקשורה בהבנה ויכולת חקירה ונשתמש בה כדי לציין דרישה של הבנת מבנים – לא במיוחד מורכבים – וניתוח מקרים. בשלב זה אין כאן הגדרה מדויקת של "מבנה מורכב" או ריבוי מקרים").
- הפיכת תהליכים והליכה מהסוף להתחלה.
- שינוי הצגת בעיה ופתרונה בהצגתה החדשה.
- יצירת בעיות חדשות (ופתרונן).

התבוננות ביכולות הללו היא בכולן יחדיו וסדר הכתיבה אינו מעיד על חשיבות יתר.

אנו מציעים כי ייערכו כמה מבחנים, בהפרשי זמן סבירים, שייקבעו בעתיד. סדרת המבחנים תקיף באמצעות בעיות שונות, את היכולות הללו.

4. בעיות

"חידה מתמטית טובה שווה יותר מתריסר בעיות בינוניות והיא תמיד מתמטיקה במיטבה".
John Edensor Littlewood (1885-1978)
מתמטיקאי אנגלי.

כאמור, נביא עתה בעיות אחדות שבאמצעותן נדגים בחינה של יכולות שונות, המאפיינות, לדעתנו, כישרון מתמטי. בעיה יכולה להיפתר בכמה דרכים. ישנן דרכים שאי-אפשר לצפות מראש. בכל מקרה, השאלות שלהלן הן בעיות ולא תרגילים. פתרונן, גם אם שונה מזה שהתכוון המחבר, מבליט יכולת מתמטית זו או אחרת.

4.1

ביל אומר לבוב (השיחה מתנהלת בניו יורק): **מעניין, שלשום עדיין לא מלאו לי 11 ואילו בשנה הבאה אהיה בן 13 !**

האם ההצהרה של ביל תקפה ? הכיצד ?

פתרון

דרישות: יכולת ניתוח, הבנה מעמיקה.
השיחה התנהלה ב– 1 בינואר. ביל נולד ב– 31 בדצמבר. ב– 30 בדצמבר (שלשום) לביל עוד לא מלאו 11 שנה. ב– 31 בדצמבר של השנה שהשיחה התקיימה ימלאו לו 12 שנה. ב– 31 בדצמבר שנה לאחר מכן (בשנה הבאה) ביל יהיה בן 13 !

4.2

מתוך ערמה שבה 1001 כדורים מוציאים כדור אחד ואת הכדורים הנותרים מחלקים לשתי ערמות (לאו דווקא שוות). מהקבוצה בה יש יותר מכדור אחד מוציאים כדור ואחת משתי הערמות מחולקת לשתי קבוצות. התהליך נמשך ! האם יתכן שלאחר צעדים מספר בכל ערמה יהיו 3 כדורים ? נמק !

פתרון

דרישות: זיהוי דפוסים וחוקים, הצגה אלגברית (פשוטה) ואבחנה.
נשים לב, כי אם הוצאת כדור אחד "נוצרות" שתי קבוצות. אם הוצאת שני כדורים נוצרות שלוש קבוצות. על כן, אם מספר הצעדים הוא n , אז מספר הקבוצות יהיה $n+1$.
נותר לשים לב, כי על פי תנאי הבעיה צריך להתקיים,

$$3(n+1)+n=1001$$

מכאן $4n=998$

ואולם 998 אינו מתחלק ב– 4, ועל כן לא ייתכן מצב שבו בכל ערמה שלושה כדורים.

4.3

בכד אחד נמצאים 15 כדורים. שני שחקנים מוציאים מהכד, כל אחד בתורו, כדור אחד, שניים או שלושה כדורים. השחקן שמוציא את הכדור האחרון מפסיד. האם לשחקן הפותח ישנה אסטרטגיית ניצחון ? נמק !

פתרון

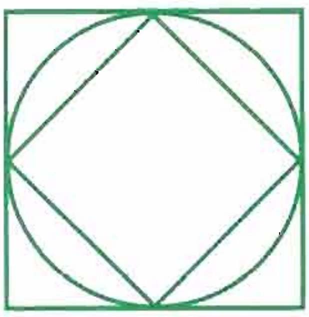
דרישות: יכולת הצגה (שינוי הצגה) ואבחנה.
נציג על ציר את מספר הכדורים שיכולים להימצא בכד, כאשר השחקן הראשון פונה להוציא כדורים. נרשום מעל למספר המתאים את האות s אם הוא היה מנצח, ואת האות f אם הוא היה מפסיד.

f	s	s	s	f	s	s	s	f	s	s	s	f	s	s
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

אסטרטגיה זו היא גם בת ביצוע בתנאי שהשחקן הפותח משאיר ליריב 9,5 ו-13 כדורים ביד.

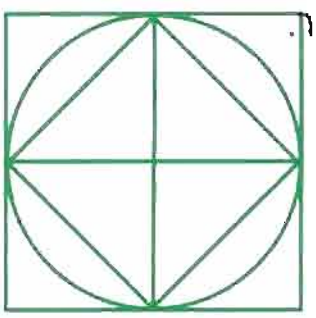
4.4

בתרשים המצורף שני ריבועים: אחד חסום במעגל והאחר, חוסם אותו מעגל. אם שטח הריבוע החסום הוא יחידת שטח אחת, מהו שטח הריבוע החוסם? נמק. הפתרון המתבקש הוא ללא חישובים אלגבריים !



פתרון

דרישות: תובנה.
התובנה היא בהבנת העובדה, כי אפשר להציג את התרשים בצורה "נוחה" ביותר. ואמנם הריבועים לא השתנו אם התרשים יראה כדלקמן:



כעת ברור, כי הריבוע החסום בנוי מארבעה משולשים חופפים ששטח כל אחד מהם הוא 1/4 יחידות שטח, ואילו הריבוע החוסם את המעגל בנוי משמונה משולשים חופפים, שארבעה מהם בונים את הריבוע החסום. על כן, השטח המבוקש הוא שתי יחידות שטח.

4.5

בכד אחד נמצאים 15 כדורים המסומנים מ– 1 ועד 15. מוציאים את הכדורים בזה אחר זה וללא החזרה. מהו מספר האפשרויות להוציא את הכדורים כך שכל כדור החל מהשני יהיה "שכן" לכדור שהוצא

פתרון
דרישות פתרון ראשון: הליכה מהסוף להתחלה, יכולת הצגה.
כדי להגשים את הנדרש הכדור האחרון חייב להיות 1 או 15. אם הכדור האחרון היה 1, אז הכדור שלפניו צריך להיות 2 או 15. אם הכדור האחרון היה 15, אז הקודם חייב להיות 14 או 1. למעשה, בכל שלב, בהליכה מהסוף להתחלה, ישנן שתי אפשרויות, עד שמגיעים לשלב הבחירה של הכדור הראשון, שלגביו יש רק אפשרות אחת. מכאן, שמספר האפשרויות הוא 2^{14}.

דרישות פתרון שני:
תובנה (הבנה מעמיקה), הצגה.
לאחר הוצאת הכדור הראשון ייתכנו שני מצבים בהמשך: הכדור הבא הוא בעל ערך גבוה יותר או שהוא בעל ערך נמוך יותר. אם הוא בעל ערך גבוה יותר, נסמן +, ואם הוא בעל ערך נמוך יותר, נסמן -. מכיוון שיש 14 הוצאות ומכיוון שבכל הוצאה ישנן שתי אפשרויות , הרי מספר האפשרויות הוא 2^{14} .

4.6
מספר בנוי ממאה ועשרים ספרות 1 ומספר שרירותי של ספרות 0. האם הוא יכול להיות ריבוע שלם ?

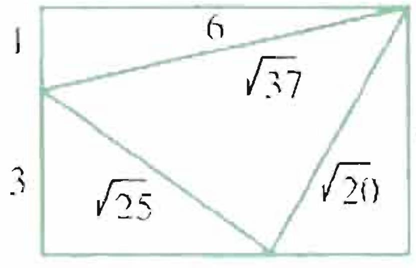
פתרון
דרישות: תובנה
סכום ספרותיו של המספר הנתון הוא 120. המספר הנתון מתחלק ב- 3. על כן, אם הוא ריבוע שלם הוא חייב להתחלק ב- 9. ואולם 120 אינו מתחלק ב- 9. מכאן שאין ריבוע שלם כנדרש.

4.7
מצא שטח משולש שאורכי צלעותיו הם 37 ,25 ו- 20 יחידות אורך בהתאמה.
בפתרון חייבים להשתמש בנוסחאות שטח בלבד. אין צורך במשפטים !

פתרון
דרישות: אבחנה, הצגה.
כדי לפתור את הבעיה כנדרש חייבים לנתח את הנתונים ולשים לב כי

$$37 = 6^2+1^2;\ 25 = 3^2+4^2;\ 20 = 2^2+4^2$$

על כן, אם נתבונן במלבן נוכל לחסום בו את המשולש הנתון, כפי שרואים בתרשים.



מכאן ששטח המשולש יהיה שווה לשטח המלבן פחות סכום שטחי שלושת המשולשים ישרי הזווית שמשלימים אותו למלבן, כלומר השטח יהיה

$$S_{\triangle} = 24 - 3 - 6 - 4 = 11$$

ביבליוגרפיה

1. H. Wagner & B. Zimmermann Identification and Fostering Mathematical Gifted Students, Educational Studies in Mathematics 17 (1986) 243-259.

2. d. dorner., h. w. kreuig., f. reither.,t. staudel (eds) lohausen. vom umgang mit undestimmtheit und komplexitat. hans huber, bern, stuttgart, wiem

(בין השאר מדובר גם בבדיקת הקשר בין ה-I.Q. לבין כשרון מתמטי)

3. L. A. Steen Mathematics education: a predictor of scientific competitiveness science. july 1987.

4. A. Ross creativity: nature or nurture ? a view in retrospect.

5. adolescent psychology (ספרים שונים)