ד"ר אילנה ארנון, ד"ר רנטה נירנבורג
המרכז לטכנולוגיה חינוכית (מטח)

סוגי אלגוריתמים בהוראת שברים

מטרת המאמר להבדיל בין סוגים של אלגוריתמים שמשתמשים בהם בהוראת שברים בבית-הספר היסודי. המאמר מבוסס על ניסיון שהצטבר בפיתוח יחידות לימוד בנושא שברים לבית-הספר היסודי ועל ריאיונות עם תלמידים שלמדו את הנושא בעזרת היחידות האלה.

בבית-הספר היסודי מלמדים אלגוריתמים משני סוגים:

- אלגוריתם שפתרונו בעזרת עצמים מוחשיים (אלגוריתם מוחשי).
- אלגוריתם המורכב מסדרה של פעולות חשבוניות על מספרים (אלגוריתם מספרי).

בפתרון תרגילים בשברים אפשר להבחין בשני סוגים של אלגוריתמים מספריים:

- אלגוריתמים שהם פעולות על המספרים השלמים שבתרגיל.
- אלגוריתמים שהם פעולות על השברים עצמם, הנתפסים כמספרים בפני עצמם.

במאמר זה אנו מציעים ללמד רק שניים מהסוגים האלה של אלגוריתמים: אלגוריתמים מוחשיים ואלגוריתמים על שברים כמספרים.

במאמר נציג דוגמאות של האלגוריתמים השונים וריאיונות עם תלמידים, המדגימים את יעילות השיטה גם לתלמידים מתקשים וגם לתלמידים מתקדמים.

אלגוריתם הוא סדרה של הוראות פעולה שמטרתה להביא את המבצע להשלמת מטלה.

לפניכם דוגמאות של שני אלגוריתמים השונים מאוד זה מזה באופיים. לאחר הדוגמאות נדון בסוגים שונים של אלגוריתמים.

חיבור שברים – אלגוריתם א'

- כדי לחבר שני שברים לוקחים את הגזרות או את מערכי הגזרות המתאימים לכל אחד משני השברים.
- מסדרים את הגזרות של שני השברים ברצף זו אחר זו (כך שמחוג מתלכד עם מחוג) ומקבלים מערך גזרות חדש.
- בודקים את המערך שהתקבל:
  - אם המערך מורכב כולו מגזרות שוות, כותבים בתוצאה את השבר המתאים למערך החדש.
  - אם המערך מורכב מגזרות שונות, ממירים את כל הגזרות או את חלקן, עד שמתקבל מערך המורכב כולו מגזרות שוות זו לזו. כותבים בתוצאה את השבר המתאים למערך הזה [1].

חיבור שברים - אלגוריתם ב'

כדי לחבר שני שברים בודקים את המכנים שלהם.

- אם המכנים שווים זה לזה עובדים בדרך זו:
  - מעתיקים את המכנה המשותף למכנה של התוצאה.
  - מחברים את המונים וכותבים את תוצאת החיבור במונה של התוצאה.
- אם המכנים שונים זה מזה, אבל מכנה אחד הוא כפולה של המכנה האחר, עובדים בדרך זו:
  - כותבים את המכנה הגדול מבין השניים במכנה של התוצאה.
  - מחלקים את המכנה הגדול במכנה הקטן.
  - כופלים את תוצאת החילוק במונה של השבר שבו המכנה הקטן.
  - מחברים את תוצאת הכפל למונה של השבר האחר.
  - כותבים את תוצאת החיבור במונה של התוצאה.
- אם המכנים שונים זה מזה, אבל שום מכנה איננו כפולה של המכנה האחר, עובדים בדרך זו:
  - כופלים את המכנים זה בזה.
  - כותבים את תוצאת המכפלה במכנה של תוצאת

1. אלגוריתם זה נוח לביצוע בתרגילים שבהם המכנים שווים זה לזה או כאשר מכנה אחד הוא כפולה של האחר, כי אז קל למצוא למה להמיר את הגזרות השונות שבמערך. במקרים אחרים (כאשר שום מכנה איננו כפולה של המכנה האחר) אפשר, אבל קשה, למצוא לאילו גזרות יש להמיר את הגזרות השונות שבמערך. לכן לא מומלץ להשתמש באלגוריתם הזה במקרה ששום מכנה איננו כפולה של המכנה האחר.

התרגיל.
- כופלים את המכנה של כל שבר במונה של השבר האחר.
- מחברים את התוצאות של המכפלות.
- כותבים את תוצאת החיבור במונה של תוצאת התרגיל.

מהתבוננות בשני האלגוריתמים האלה ניכר הבדל עקרוני ביניהם:

האלגוריתם הראשון הוא אלגוריתם שפתרונו בעזרת עצמים מוחשיים: הוא כולל סדרה של פעולות מוחשיות שצריך לבצע על עצמים מוחשיים (במקרה הזה - גזרות). רק בסופו כותבים תוצאה בשפת החשבון (השבר המתאים למערך המורכב מגזרות שוות).

האלגוריתם השני הוא אלגוריתם מספרי: הוא כולל סדרה של פעולות חשבון על מספרים.

מובן שאחת המטרות של ההוראה היא להביא את התלמידים לאפשרות לפתור תרגיל באופן חשבוני. שהרי איננו מצפים שכל חייהם יסתובבו כשבכיסם כל העצמים המוחשיים של בית-הספר היסודי.

אבל השאלה היא כיצד להביא את התלמידים לשליטה באלגוריתם מספרי כלשהו, בלי להכריח אותם ללמוד בעל-פה הרבה אלגוריתמים מספריים. מחקרים מוכיחים שאלגוריתמים שנלמדו בעל-פה נשכחים מהר **ואינם ניתנים לשחזור** [2]. לכן למידתם של אלגוריתמים מספריים אינה יעילה, באותה מידה שלא יעיל לשאת בכיס כל החיים את אבזרי בית-הספר היסודי, כגון גזרות עיגולים, סרגלי שברים, דסקיות ובדידים.

אלגוריתמים מוחשיים ואלגוריתמים מספריים אפשר למצוא ברוב נושאי הלימוד במתמטיקה של בית-הספר היסודי - בין במספרים שלמים ובין בשברים.

2. Behr. M. J., Lesh. R., Post. T. R., & Silver. E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh M. Landau (Eds.). Aquisition of mathematics concepts and processes (pp. 91-126). New york: Academic Press.

כאשר עוסקים בשברים, אפשר "לעדן" את המיון של האלגוריתמים. בשברים אפשר להבחין בסוגים שונים של **אלגוריתמים מספריים**.

דוגמאות:
תלמידים התבקשו לפתור את התרגיל $\frac{1}{5} \times 3$ והם כתבו תוצאה נכונה: $\frac{3}{5}$. לאחר מכן הם התבקשו להסביר את תשובותיהם.
הנה כמה מההסברים שלהם:

הסבר ראשון: "אני עושה אחד כפול שלוש שווה שלוש, וחמש נשאר חמש".

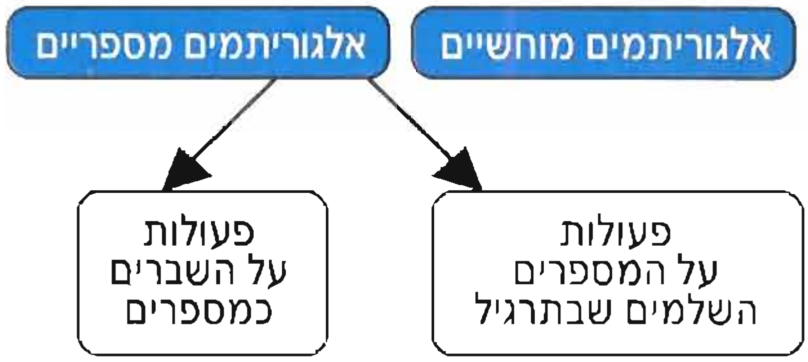
הסבר שני: "בדרך כלל אני עושה חמישית כפול שלוש, כאילו...חמישית שלוש פעמים".

הסבר שלישי: "חמישית ועוד חמישית ועוד חמישית".

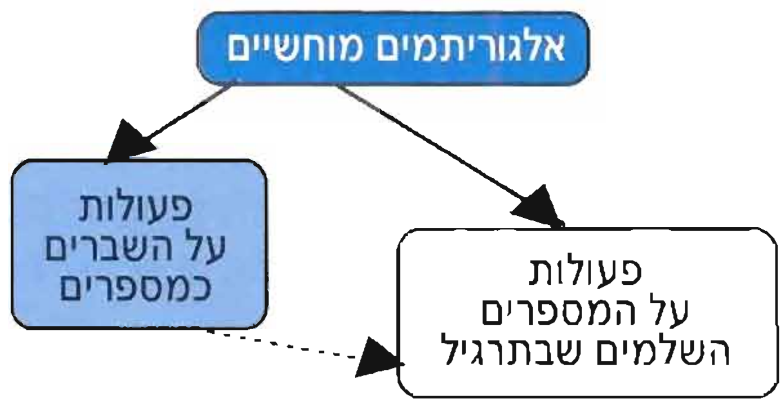
מה ההבדל בין ההסבר הראשון לשני ההסברים שאחריו (השני והשלישי)? בהסבר הראשון התלמיד מתאר סדרת פעולות על המספרים אחת, שלוש וחמש (המספרים השלמים שבתרגיל), ואילו בשני ההסברים שמצוטטים אחר-כך התלמידים מתארים פעולות על **השבר חמישית** המופיע בתרגיל.
כלומר: בהסבר הראשון התלמיד מתייחס רק אל המספרים השלמים המרכיבים את השברים (מונה ומכנה) ופועל עליהם, ואילו בשני ההסברים האחרים התלמידים מתייחסים אל השבר כאל מספר בפני עצמו ופועלים עליו.
הדוגמאות האלה מלמדות שבשברים אפשר להבחין בשני סוגי אלגוריתמים מספריים:
הסוג הראשון של אלגוריתם מספרי הוא **פעולות על המספרים השלמים** המופיעים בתרגיל, ונקרא לו בקיצור: **פעולות על המספרים השלמים.**
הסוג השני של אלגוריתם מספרי הוא פעולות על השברים כמספרים בפני עצמם, ונקרא לו בקיצור: **פעולות על השברים כמספרים** [3].

3. הבחנה דומה לזו .בין אלגוריתמים על המספרים עצמם לבין אלגוריתמים על הספרות המרכיבות את המספרים. אפשר למצוא באלגוריתמים העוסקים במספרים הכתובים במבנה העשרוני. לדוגמה: חיבור, חיסור וכפל מאונך של מספרים שלמים רב-ספרתיים, חיבור חיסור וכפל מאונך של מספרים עשרוניים ועוד.

סיכום:
בשברים אפשר להבחין בסוגים האלה של אלגוריתמים:



במאמר זה אנו מציעים ללמד רק שניים מהסוגים האלה של אלגוריתמים: **אלגוריתמים מוחשיים ואלגוריתמים על השברים כמספרים.**
בתרשים הבא הדגשנו את שני הסוגים האלה.



החץ העבה בתרשים מראה את תהליך ההוראה שעליו אנו ממליצים, ואילו החצים הדקים מייצגים דרכי פתרון שהתלמידים מפתחים בעצמם במהלך הלמידה.

דוגמאות לאלגוריתמים

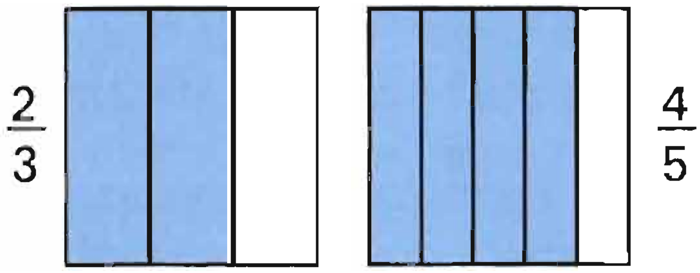
א. אלגוריתמים מוחשיים

דוגמה ראשונה: חיבור שברים שהמכנים שלהם שווים בעזרת גזרות עיגולים - אלגוריתם א' (כפי שהוצג בתחילת המאמר).

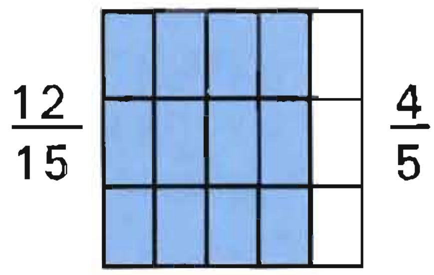
דוגמה שנייה: מציאת מכנה משותף בעזרת ריבועים

אלגוריתם ג': נמצא מכנה משותף לשני השברים האלה:

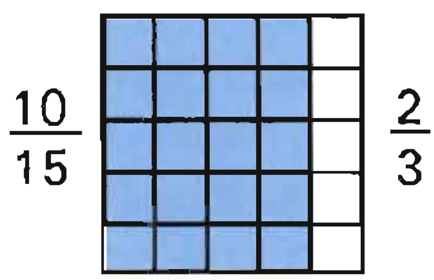
כדי למצוא מכנה משותף של שני שברים מציירים את כל אחד מהשברים בריבועים מחולקים לפסי אורך חופפים. לביצוע החלוקה בדרך מדויקת למדי אפשר להשתמש בכלי הנקרא "ריבועי חלוקה."



מרחיבים אחד מהשברים בגורם ההרחבה שהוא המכנה של השבר האחר. למשל, אם מתחילים מהשבר $\frac{4}{5}$, מרחיבים אותו בגורם 3 שהוא המכנה של השבר $\frac{2}{3}$.
לצורך ההרחבה הזאת בוחרים ריבוע המחולק ל-3 חלקים שווים **בלתי צבועים** ומצויר על דף שקוף. את השקף הזה שמים על הציור של השבר, כך שקווי החלוקה שבו מאונכים לקווי החלוקה שבציור. רושמים בציור גם את השבר המתקבל לאחר ההרחבה:



מרחיבים את השבר השני $\frac{2}{3}$ בגורם הרחבה שהוא המכנה של השבר הראשון $\frac{4}{5}$: על הציור של $\frac{2}{3}$ שמים שקף הרחבה ב-5 ומקבלים את השבר $\frac{10}{15}$:



קיבלנו שני שברים שהמכנים שלהם שווים. המכנה שלהם הוא המכנה המשותף של שני השברים המקוריים (15 הוא מכנה משותף של $\frac{2}{3}$ ושל $\frac{4}{5}$).

ב. אלגוריתמים על השברים כמספרים

דוגמה: מציאת מכנה משותף בדרך מספרית- **אלגוריתם ד׳:**

אם בתרגיל חיבור (או חיסור) לשברים אין מכנים שווים, אפשר להרחיב את כל אחד משני השברים למכנה משותף בדרך זו: גורם ההרחבה של כל שבר הוא המכנה של השבר האחר.

שימו לב לאלגוריתם ב׳ ולאלגוריתם ג׳ (מהעמוד הקודם) ולאלגוריתם ד׳ (למעלה). כל אחד מהם כולל שיטה למציאת מכנה משותף של שני שברים כלשהם. אולם אלגוריתם ב׳ הוא אלגוריתם מספרי על השלמים, אלגוריתם ג׳ הוא אלגוריתם מוחשי, ואילו אלגוריתם ד׳ הוא אלגוריתם מספרי על השברים כמספרים בפני עצמם.

הוראת אלגוריתמים בשברים

כותבי מאמר זה יוצאים בקריאה **לא ללמד** אלגוריתמים מספריים על השלמים לביצוע פעולות חשבון בשברים. המחקר מראה שלמידת אלגוריתמים כאלה מסתיימת תמיד בשכחה ובערבוב האלגוריתמים המרובים והשונים הקשורים לשברים.

במקום זאת אנחנו ממליצים ללמד בבית-הספר היסודי **רק פעולות מוחשיות**, ולעתים, אחרי תהליך הוראה מסוים, לנסח במפורש גם את **האלגוריתמים על השברים** הנובעים מן הפעולות המוחשיות שלימדנו.

התפתחות אלגוריתמים על השלמים

יש תלמידים שכתוצאה מהפעילויות בעצמים מוחשיים ממציאים פעולות על השלמים הנובעות גם הן מהפעולות המוחשיות שלימדנו. אם אמנם הם יודעים להסביר את הקשר בין הפעולה על השלמים שאותה הם המציאו בעצמם לבין פעולה על העצמים המוחשיים או פעולה על השברים –אפשר לקבל את המצאתם בברכה.

בכל פעם שתלמיד מבלבל בין אלגוריתמים מספריים או שוכח אותם - צריך לחזור ולהזכיר לו את הפעולה המוחשית שממנה נובעת הפעולה המספרית שבה התבלבל. לפעמים אפשר להסתפק בהסבר של התלמיד הקושר את דרך הפתרון שלו לפעולה המוחשית, ולפעמים צריך להחזיר את התלמיד לביצוע ממשי.

דוגמה מהכיתה.

בכיתה ו׳ נתנו לתלמידים **מתקדמים** תרגיל כפל במספרים מעורבים זמן מה אחרי שהם למדו **אלגוריתם מוחשי** לכפל שברים פשוטים [4]. התרגיל שנתנו לתלמידים היה כזה: $1\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{2}$ .2

כל התלמידים כפלו שלם בשלם ושבר בשבר והגיעו לתוצאה השגויה $2\frac{1}{10}$.

ביקשנו מהם לפתור מחדש בעזרת פעולה מוחשית. הם עשו זאת וקיבלו תוצאה נכונה. בדרך זו הבינו את טעותם והסבירו אותה. אחרי הפעולה המוחשית הם לא חזרו על השגיאה הקודמת.

אבחון

אם הצלחנו לאבחן שתלמידים משתמשים באלגוריתם על המספרים השלמים ויודעים לקשר אותו לפעולה מוחשית או לפעולה על שברים כמספרים - כדאי לעודד אותם להשתמש בהמצאה שלהם. ואולם זכות זו שמורה לממציאים בלבד, ולא רצוי ללמד את המצאתם לאחרים שלא המציאו את השיטה בעצמם.

איך יודעים מניין נובעת פעולה על המספרים השלמים שתלמיד משתמש בה?

דוגמאות

א. איך יודעים שפעולה בשלמים שתלמיד משתמש בה נובעת **מפעולה מוחשית** (או קשורה אליה)?

דוגמה:

תלמיד פתר את התרגיל $3 \times \frac{1}{5}$, וכתב תוצאה נכונה: $\frac{3}{5}$. **הוא התבקש להסביר את דרך הפתרון שלו.**

4. אלגוריתם מוחשי כזה אפשר למצוא בספרי כיתה ו של הסדרות "אחת, שתיים ו.. שלוש" ו "ועוד אחת."

התלמיד: "אני עושה אחד כפול שלוש שווה שלוש, וחמש נשאר חמש".
מראיין: "למה אתה כופל את אחד ולא כופל את חמש"?
התלמיד: "כי הלמעלה, זה הצבוע, והלמטה, זה כמה חלקים, ועושים פעמים, אז זה נשאר".

אף שהתלמיד לא אחז בידיו שום אבזר מוחשי בזמן הריאיון ואפילו לא צייר שום ציור, ההסבר שלו מלמד שהוא ביצע פעולה מוחשית **דמיונית**. המילה "צבוע", שאין לה שום משמעות אם אין רואים (ולו רק בדמיון) ציור כלשהו, מעידה שהתלמיד, בדמיונו, מפעיל אלגוריתם שלפחות בחלקו קשור לפעולה על עצמים **מוחשיים**.

ב. איך יודעים שפעולה בשלמים שתלמיד משתמש בה נובעת מפעולה על שברים כמספרים בפני עצמם (או קשורה אליה)?

תלמיד התבקש למצוא מספר מעורב השווה לשבר $\frac{35}{8}$. הוא חישב בקול רם, ואמר בזמן החישוב:
"שלושים וחמש לחלק לשמונה זה ארבע [כותב 4] את השארית אני כותב פה [כותב $4\frac{3}{\ }$] ועכשיו השמונה [משלים וכותב $4\frac{3}{8}$]."
כשהתבקש להסביר אמר:
"כשאני עושה שלושים וחמש לחלק לשמונה, אני מקבל ארבעה שלמים, **ונשארות לי שלוש שמיניות**."

מן ההסבר הזה אפשר ללמוד, שהתלמיד מבצע פעולת חילוק במטרה לקבץ את שלושים וחמש **השמיניות** לשלמים. בתום התהליך הזה יש לו שארית של שלוש **שמיניות**. במילים אחרות, הוא פועל על השמיניות שבתרגיל (השברים כמספרים).

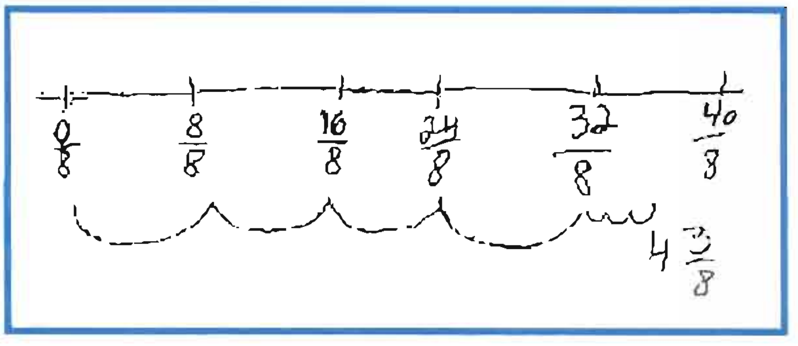
אי-אפשר, או לפחות קשה מאוד, לאבחן תופעה כזאת במבחן נייר ועיפרון. דרך אפשרית לאבחונים כאלה היא דרך השיחה עם תלמידים. בשיחות כאלה צריך לדובב את התלמידים, להקשיב להם ולהתאפק מאוד מללמד אותם, גם כאשר הם מתארים מחשבות ורעיונות שגויים (דבר שקשה בייחוד לנו, כמורים).

השימוש בעצמים מוחשיים להוראה בכיתה ההטרוגנית

יש מורים שחושבים כי השימוש בעצמים מוחשיים חשוב רק לתלמידים מתקשים. "האחרים יכולים להסתדר בלעדיהם", הם אומרים.
מורים אחרים חושבים שדווקא התלמידים המתקשים צריכים ללמוד **בלי** העצמים המוחשיים. הם אומרים למשל: "התלמידים המתקשים ממילא לא יבינו שברים, חבל לבזבז את זמנם, מספיק שישננו את האלגוריתמים המספריים."
לדעתנו, כל התלמידים בבית-הספר היסודי צריכים ללמוד כל מושג חדש בעזרת פעולה מוחשית. דעה זו נתמכת על-ידי התאוריה (של פיאז'ה, נשר, דובינסקי ואחרים). ראינו קודם דוגמה של יעילות השיטה לתלמידים מתקדמים. הנה דוגמה של תלמידה מתקשה:
כפי שנראה מהריאיון, שלהלן - י. היא תלמידה מתקשה. בכיתה ה' היא למדה להפוך שבר מדומה למספר מעורב בעזרת פעולה מוחשית. וזה הריאיון שנערך בראשית **כיתה ו'**:

מ': למשל, האם את זוכרת למצוא מספר מעורב שווה לשבר הזה: $\frac{35}{8}$
י': **לא** מסתדר לי.
מ': את רוצה בקול רם?
י': שלושים וחמש לחלק לשמונה...
מ': למה שלושים וחמש לחלק לשמונה?
י': כדי לדעת כמה שלמים זה יוצא.
מ': כן?
י': שמונה כפול חמש זה,... ארבעים, אז ארבע כפול שמונה...
מ': כן?
י': עשרים, אז... זה יוצא, אה...
מ': כן?

י׳: [חושבת]
מ׳: בכיתה, למדו ככה לעשות 35, לחלק ל-8?
י׳: לא, אני למדתי בעצמי, בשיטה שלי.
מ׳: וזה לא מסתדר לך. אז אולי ננסה להיזכר בשיטה שלמדו בכיתה, את רוצה שנזכיר לך, או להיזכר לבד?
י׳: שתזכירי לי.
מ׳: עשינו ישר-מספרים?
י׳: כן.
מ׳: תעשי.
י׳: לצייר ישר-מספרים?
מ׳: אם את חושבת שיעזור. זה יעזור?
י׳: ככה.
מ׳: נו? תציירי.
י׳: (בלי הפרעה ציירה בעצמה. את ציורי הצעדים התוותה קודם רק באוויר).



מ׳: תציירי, תציירי.
י׳: (ציירה את הצעדים וכתבה תשובה).
מ׳: נו, זה עזר?
י׳: כן.
מ׳: את רוצה לנסות עכשיו לפתור את אותו תרגיל גם בשיטה השנייה עם החילוק?
י׳: שלי?
מ׳: כן.
י׳: לא.

הנה כמה פרשנויות אפשריות לריאיון:

1. י׳ שולטת היטב באלגוריתם המוחשי שלמדה.
2. האלגוריתם הזה משמש ביעילות לכל בעיה משלושת הסוגים האלה:
   א. הפיכת שבר גדול מ- 1 ("מדומה") למעורב או שלם
   ב. הפיכת מספר מעורב לשבר
   ג. הפיכת מספר שלם לשבר
3. י׳ למדה בכיתה רק את האלגוריתם המוחשי, אבל כתוצאה מלמידתו "המציאה" אלגוריתם מספרי נכון (על השלמים).
4. מהראיון עולה שהאלגוריתם המספרי שהמציאה י׳ לפחות מתחיל כמו האלגוריתם החשבוני המקובל.
5. י׳ איננה מצליחה להשתמש ביעילות באלגוריתם שהמציאה, כי היא מתקשה (בכיתה ו׳) בלוח הכפל.
6. אף על פי שבכיתה ו׳ י׳ עדיין איננה שולטת בלוח הכפל, היא מתפקדת היטב בבעיה בשברים, והציור שלה מעיד על הבנה של מושגים הקשורים לשברים, למספרים מעורבים ולשלמים ועל הבנת הסדר שלהם על ישר-המספרים.

סיכום

בניסיון שצברנו בכיתות ד׳, ה׳ ו-ו׳ בבית-הספר היסודי מצאנו שהוראת פעולות בשברים **כפעולות מוחשיות** הניבה תוצאות טובות יותר מהוראתן **כאלגוריתמים** מספריים:

- הפעולות המוחשיות משמעותיות יותר לתלמידים, וקשורות היטב להגדרות הקונקרטיות של השבר.
- במקרה של שכחה - הפעולות המוחשיות ניתנות לשחזור בקלות.
- הפעולות המוחשיות יעילות להבנה ולתיקון טעויות.
- מצאנו שלאחר שהתלמידים מפנימים את הפעולות המוחשיות, הם ממציאים קיצורי דרך ותחליפים מספריים משלהם. הדרכים המספריות שהם ממציאים יעילות ודומות לאלגוריתמים המספריים המקובלים.
- הפעולות המוחשיות מסייעות לכל התלמידים לפתח מושגים מתמטיים - לתלמידים הרגילים, לתלמידים המתקדמים ולתלמידים החלשים.