

מירי בן ארי ואיריס רוזנטל (א.מ.בר.)

היסטוריה מתמטיקאים ובית ספר יסודי

האישיים, לרעיונות שהגו ולפעילויות הנובעות מכך, מרחיבה את תחום הדעת ומדגישה את העובדה שהמתמטיקה היא פרי רוחם ויצירתם של אנשים. המתמטיקאי הידוע גאוס ביטא גישה זאת כשאמר: "לו האחרים היו מתעמקים בעובדות המתמטיות באותה עקביות כמוני, גם הם היו מגיעים לתגליות שאני הגעתי". העיסוק במתמטיקה בהיבט היסטורי מוסיף פן סיפורי-אנושי לעשייה המתמטית. היבט זה עשוי גם לעורר סקרנות ומוטיבציה, לעודד לחשיבה יצירתית ולתרום לגיבוש התפיסה, כי תהליך הפתרון חשוב כמו הפתרון עצמו.

חלק ניכר מהנושאים המתמטיים הקשורים לגילויים ההיסטוריים מורכבים מדי לתלמידים הצעירים. כיצד אפוא מתמודדים עם קושי זה? במאמר זה נציג ניסיון להתמודד עם הסוגיה של שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בבית-הספר היסודי, שנערך במסגרת פרויקט שנקרא "מתמטיקאי החודש"¹. במסגרת זו מציגים מדי פעם בפעם מתמטיקאי מן ההיסטוריה ובמשך החודש עוסקים בבתי-הספר בקורות חייו ובעשייתו המתמטית.

1. פעילות "מתמטיקאי החודש" פותחה במעבדה המתמטית במרפ"ד תל אביב והופעלה בהשתלמויות מורים ובבתי-הספר הקשורים למעבדה זו, וכן בבתי-ספר ברחבי הארץ המפעילים מעבדות וסביבות מתמטיות. בתי-הספר התנסו בשילוב המרכזים של "מתמטיקאי החודש" בעשייה המתמטית השוטפת. ההדים לפעילות היו חיוביים. הן המורים והן התלמידים נהנו מההעמקה המגוונת שמרכזים לימודיים אלו זימנו להם.

"אני משוכנע שהמתמטיקה היא המפסידה העיקרית בניסיון כלשהו לנתקה מההיסטוריה שלה" (גלשייר)

בשנים האחרונות הולכת וגדלה ההתעניינות בתפקיד שממלאת "ההיסטוריה של המתמטיקה" בתהליכי למידה הוראה, ומוצאים לכך עדויות בעיתונות המקצועית. תפיסת התפקיד של לימוד ההיסטוריה נוגעת בשני היבטים. האחד, תפיסה תרבותית של המתמטיקה כיצירה משותפת של האנושות כולה והאחר תרומה ממשית להבנת נושאים מתמטיים הנלמדים היום.

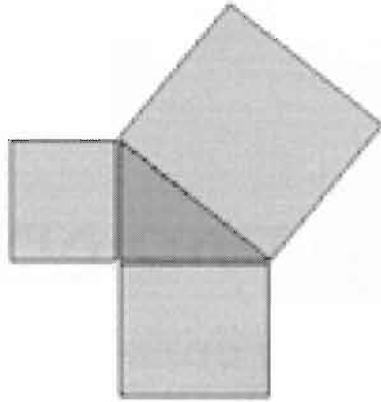
הממד ההיסטורי בלימודי המתמטיקה מעמת שתי תפיסות מנוגדות לכאורה. האחת, התפתחות המתמטיקה בהקשר תרבותי-חברתי כך שאפשר להתייחס למתמטיקה שהתפתחה בארצות האיסלאם, ביוון בהודו וכו', ובו בזמן, השניה, ההכרה שהתרומה של כל תרבות למתמטיקה היא המורשת המשותפת של האנושות.

היבטים אלו חשובים בחברה רב-תרבותית. במבנה הלימודים החדש, האמור להתפרסם בימים אלו בחוזר מנכ"ל של משרד החינוך, נכתב: "לעיצוב יחס חיובי למתמטיקה יש ללוות את ההוראה בהצגת ההתפתחות ההיסטורית של המתמטיקה כחלק מהתרבות האנושית. יש לדון באישים מרכזיים בהתפתחות החשיבה המתמטית וכדאי לזכור את האופן בו מתבטאת המתמטיקה בתרבויות שונות. יש לשים דגש על דרכי החשיבה כפעילות אנושית ולעודד דרכי חשיבה שונות." חשיפת הלומד לביוגרפיה של האישים, לספורים

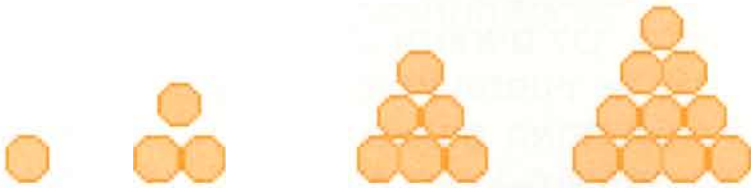
הפיתוגוראים תרמו למתמטיקה כמה רעיונות חשובים:

● היו הראשונים שהשתמשו באותיות כדי לציין נקודות בצורות גיאומטריות.

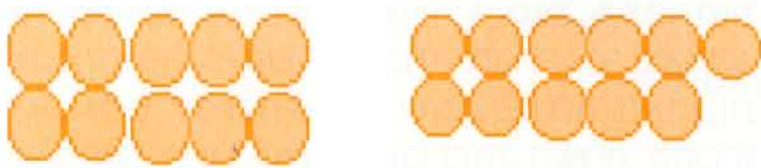
● הוכיחו את המשפט בהנדסה האומר; **שבמשולש ישר זווית סכום השטחים של שני הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע שבנוי על היתר.**



● ייצגו את מספרים השלמים במערכים של צורות גיאומטריות



● חלקו מספרים לזוגיים ולאי זוגיים. (זכריים ונקביים)



● עמדו בתוקף על כך שכדור הארץ הוא עגול.

● גילו שיש אורכים מסוימים שאינם יכולים להיות מיוצגים כמספרים רציונליים, כלומר, לא ניתן לבטאם כמספרים שלמים או כיחס בין מספרים שלמים. מספרים "חדשים" אלו כמו: π נקראו המספרים האי-רציונליים.

הפעילויות במסגרת "מתמטיקאי החודש" התמקדו בבניית מערכי המספרים, משום שפעילות בתחום זה מתאימה לתכנית הלימודים בבית-הספר היסודי ולגיל הלומדים.

אחת מאמות המידה שהוצבו בעניין בחירת האישיים היתה מידת הרלוונטיות של רעיונותיהם ואפשרות קישור העשייה המתמטית שלהם לתכנית הלימודים לבית-הספר היסודי בכיתות א-ו. שאלה חשובה לא פחות, שעלתה בתהליך הפיתוח, היתה: כיצד יכולים רעיונות אלו לתרום לטיפוח החשיבה המתמטית של ילדי בית-הספר היסודי?

טיפול בכל מתמטיקאי כלל: תיאור סיפורי של קורות חייו, דוגמאות מעבודתו והצעות לפעילות. הפעילויות פותחו בזיקה לרעיונות המתמטיים של האישיים שנבחרו ובהשראתם. הפעילויות אינן חוזרות בהכרח במדויק על הבעיות שחקר המתמטיקאי, אלא מייצגות את שטח ההתעניינות שלו. בנוסף פותחה סביבה לימודית מתאימה לכל נושא שנבחר.

להלן נדגים יישום תפיסה זו. נציג את הפעילויות שליוו שלושה מן המתמטיקאים שנבחרו: פיתגורס, ארכימדס ואוקלידס.

פיתגורס

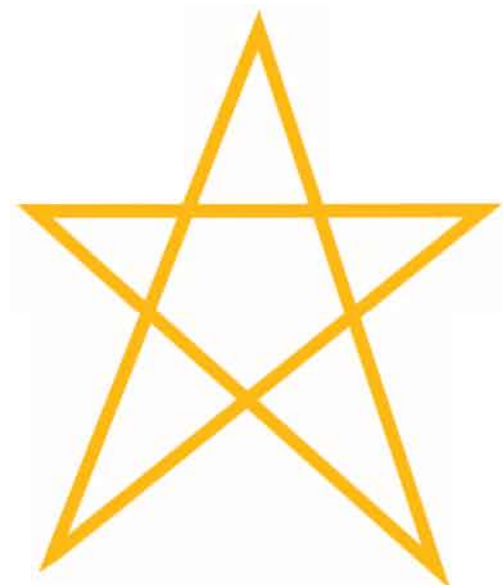
560 לפנה"ס עד 480 לפנה"ס.

פילוסוף יוני ומנהיג דתי. לזכותו נזקפים כמה פיתוחים חשובים בתחומי המתמטיקה, האסטרונומיה והמוסיקה.

אל פיתגורס הצטרפה קבוצת אנשים שגילתה עניין רב בתחומי הדעת השונים. קבוצה זו נקראה "הפתגוריאנים" או "הפיתגוראים".

הפיתגוראים היו ארגון דתי ופוליטי של אנשים וגם מסגרת לימודית של בית-ספר.

אנשי הכת היו צמחונים וחשו קרבה לבעלי-חיים. הם לא לבשו צמר, שתו יין, ואכלו שעועית; על בגדיהם הם ענדו את סמלם – הפנטגרם. כוכב בעל חמישה קדקודים.



א.מ.ב.ר. בן ארי רוזנטל

ממשולשים למלבנים..



את סדרת המספרים המשולשים שהכרנו בכרטיס קודם נוכל להציג גם כמשולשים ישרי זווית.



אם ניקח שני מספרים משולשים המוצגים במערך של משולש ישר זווית ונחבר אותם לאורך היתר נקבל מלבן.



בנו את חמשת המספרים המשולשים הראשונים בסדרה כמשולשים ישרי זווית. הצמידו, לאורך היתר, אל כל אחד מן המשולשים, משולש חופף. חקרו את המרובעים שקבלתם. מה גיליתם?

תוכלו להיעזר בטבלה הבאה:

גודל המלבן		מספר המשולש	מספר המשולש
אורכי הצלעות	מס' הדסקיות		
1,2	2	1	1
		3	2
			3
			4
			5

התוכלו לאמר מה יהיה האיבר ה- 10 בסדרה? ה- 20 בסדרה? ה- 100? הסבירו.

במהלך הפעילות יצרו התלמידים, בעזרת אמצעי המחשה מגוונים, מערכים של מספרים, חקרו את החוקיות שנוצרה ואת הקשר בתוך המערכים השונים ובין המערכים, כמו קשר בין המספרים המשולשים והמלבנים. לדוגמה, בפעילות הבאה: התייחסו אל מספרים במערכים גיאומטריים

איפשרו לפתח פעילויות המזמנות:

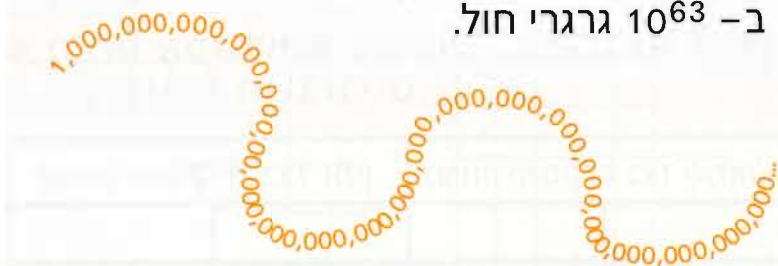
- חקר של סדרות
- חקירת ייצוגים שונים של הסדרות
- חקר יחסים בין כמויות
- יישום של ידע מתמטי קודם
- ראית הקשר בין מתמטיקה לבין גיאומטריה
- פיתוח כישורים כמו: מיון, הסקת מסקנות, הכללה, חשיבה הפוכה, יצירתיות והנמקה.

ארכימדס

287 - 212 לפנה"ס

גדול המתמטיקאים של הזמן הקדום נולד בסירקוזה שהיתה אז מושבה יוונית בסיציליה. ארכימדס למד באלכסנדריה שבמצרים אך בילה את רוב ימיו בסירקוזה.

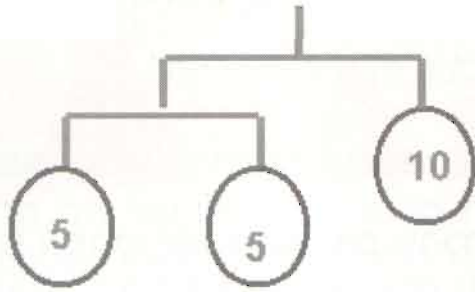
ארכימדס תרם לגילויים רבים בתחום הגיאומטריה והפיזיקה, שיער את הערך של ה- π (PI), פיתח חוקים בתחום האיזון והמשקל והמציא המצאות חשובות המתבססות על גילויים אלו. בספרו הידוע **מונה החול** כותב ארכימדס, שטעות היא לחשוב שאי-אפשר למנות את החול. הוא מתאר את התהליך שעבר בחישוב כמות גרגרי החול. הוא הגיע למסקנה כי כדור הארץ מכוסה ב- 10^{63} גרגרי חול.



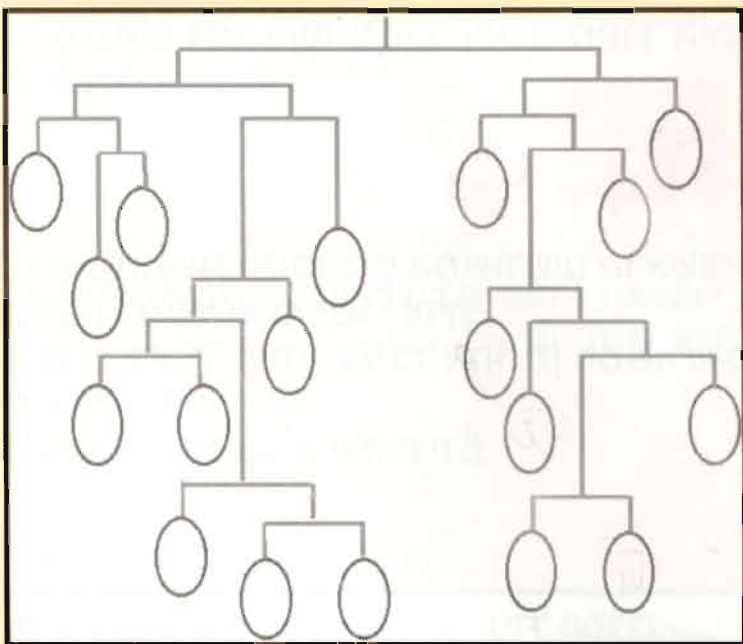
כדי לתאר מספר כה גדול הוא נאלץ להמציא שיטת ספירה משלו. הפעילות שהוקדשה לארכימדס זימנה התייחסות לאסטרטגיות ספירה ולמושגי השוויון והאי שוויון.

יש קושי רב בהבנת מושגי השוויון. ד' תירוש ואחרים (1995), טוענים שהילד רואה במושג השוויון מעין מכשיר קלט - פלט ואינו רואה בשוויון יחס של שקילות. קושי זה בא לידי ביטוי גם אצל הלומדים הבוגרים יותר. במהלך הפעילות פעלו התלמידים בעזרת מאזניים ובנו תרגילים, תוך כדי הקבלה של צדי זרועות המאזניים לאגפי השוויונים או האי-שוויונים שחקרו. המחשבה שעמדה בבסיס המשימה היתה, שפעילות קינסטטית עם המאזניים עשויה לסייע להבין את משמעות השוויון, כי כל פעולה בצד אגף אחד תגרום לשינוי הכרחי בצד באגף השני - אם רוצים לשמור על השוויון. בפעולות החקר עסקו בקשר בין מה שנעשה בכל אחד משני האגפים.

דוגמה למקטע פתור:



המרצדה:



אוקלידס

מתמטיקאי יווני 330 - 275 לפנה"ס. לא ידועים לנו פרטים רבים על חייו מלבד העובדה שלמד באקדמיה של אפלטון ולאחר מכן הוזמן ללמד באקדמיה של אלכסנדריה שבמצרים. אוקלידס מכונה גם "אבי הגיאומטריה". הוא תרם רבות למתמטיקה בזכות היכולת שלו להסביר ולארגן רעיונות.

ספרו של אוקלידס **יסודות**, כולל שלושה-עשר תחומים.

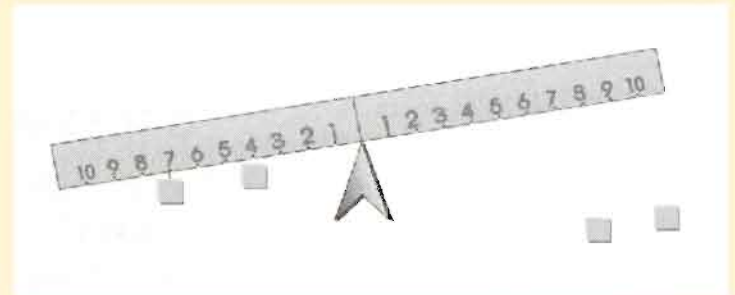
העבודה המקורית הכילה 133 גלילים של פאפירוס. מרבית ההנחות, ההשערות, והאקסיומות אינן מקוריות של אוקלידס. אך ערכן וחשיבותן הוא בארגון ובסדר שהעניק להן אוקלידס. הסדר של הרעיונות היה מופתי ומקושר בהנמקות

א.מ.בר. בן ארי רוזנטל

שתי כפות המאזניים - ב'

עבדו עם מאזניים ו-4 דסקיות

המטרה: לתלות שתי דסקיות בצד ימין ולדאוג שהמאזניים יישארו כמו בציר.



- שערו איפה ניתן לתלות את שתי הדסקיות הנוספות?
- בדקו את השערתכם
- ציירו את הדסקיות במקום המתאים

מרחק הדסקיות בצד שמאל		מרחק הדסקיות בצד ימין	

- איך אפשר לרשום את מה שציירתם כביטוי חשבוני?
- מצאו אפשרויות נוספות רשמו גם אותן כביטויים חשבוניים.

מרחק הדסקיות בצד שמאל		מרחק הדסקיות בצד ימין	

להלן דוגמה של מרצדה (מוביל) כפעילות קיר

במרצדה זו על התלמידים להצמיד מספרים בתוך העיגולים במטרה ליצור איזון בין שני צדי המרצדה. בחירת המספר הראשון ומיקומו יקבע מי יהיו המספרים האחרים. בחירת המספר יכולה להיעשות בידי המורה או התלמידים, והדין יכול להיערך לפני כן ברמה של אומדן והעלאת השערות, או אחרי מיקום המספרים ברמה של הסקת מסקנות והכללה.

המרצדה מורכבת ממקטעים המאפשרים להרכיבה ברמות קושי משתנות.

במשימה שלהלן פועלים התלמידים בעזרת כלי הצייר של מעבד התמלילים MSWord. אפשר להפעיל אותה גם כלוח קיר ולאפשר לתלמידים להתנסות בכיסוי השטחים בדרכים שונות.

א.מ.בר. בן ארי רוזנטל

עליכם לכסות בעזרת שתי הצורות שלפניכם את הצורות שלמטה.

אתר: נסו לכסות את הצורות ביתר מדרך אחת.

תחום נוסף שבו עסקו הפעילויות היו חקר אינטואיטיבי של חפיפת משולשים, המתבסס על מדידות של צלעות וזוויות. בשלב ראשון מדדו צלעות של משולשים, הניחו אותם זה על זה וגילו שגם הזוויות שוות. בהמשך, מדדו משולשים דומים ונוכחו ששוויון זוויות אינו מבטיח שוויון צלעות. כן קבלו נתונים חלקיים משורטטים של משולשים, השלימו את השרטוט ודנו בתנאים המספיקים לחפיפת משולשים ובשוויון של הצלעות והזוויות האחרות, הנובע מהחפיפה.

דדוקטיביות. וספריו נלמדים עד היום הזה. ד"ר רינה הרשקוביץ מציגה שני היבטים "קלאסיים" של הוראה ולימוד הגיאומטריה: ראיית הגיאומטריה כמדע של המרחב, וראייתה כמבנה לוגי, שבו הגיאומטריה היא הסביבה שהלומד יכול לקבל בה תחושה לגבי מבנה מתמטי.

מחקרים מראים שיש קשרים בין יכולת מרחבית לבין הישגים בגיאומטריה. תפקיד הוויזואליזציה בתוך תהליך רכישת מושגי הגיאומטריה הוא מורכב מאוד חוקרים רואים בוויזואליזציה שלב ראשון, וחשוב בהתפתחות התובנה הגיאומטרית. וכן תלמידי בית-הספר היסודי אינם בשלים ללימוד הגיאומטריה כמדע דדוקטיבי. לפיכך הפעילויות שנעשות במסגרת לימודי הגיאומטריה בבית-הספר היסודי הן בעיקר פעילויות חקר – אינדוקטיביות וכן פעילויות ויזואליות.

בהציגנו את אוקלידס לתלמידים התמקדנו בפעילויות העוסקות בפיתוח הראייה המרחבית, כמו לדוגמה בפעילות הזאת:

א.מ.בר. בן ארי רוזנטל

כמה משולשים יש בשרטוט זה?

כמה משולשים ישרי זווית גיליתם בשרטוט?
כמה חדי זווית גיליתם?
כמה קהי זווית?

המתמטיקה לטעת אצל התלמידים
את התחושה של "עמידה על כתפי ענקים", דיינו.



חומר נוסף על המתמטיקאים שהוזכרו במאמר ראו
במאמרו של אביקם גזית במספר חזק גיליונות 6, 12,
15, 16.

ביבליוגרפיה

מבנה הלימודים, עקרונות ההוראה וארגון מערכת
השעות בבית הספר היסודי - טיוטת הצעה
לחוזר המנהל הכללי.
תירוש ד' ואחרים, מודלים וחשיבה מתמטית,
יחידה 5, דצמבר 1995

Calinger, Ronald (ed), Vita mathematica: historical
research and integration with teaching, Mathematical
Association of America, 1996

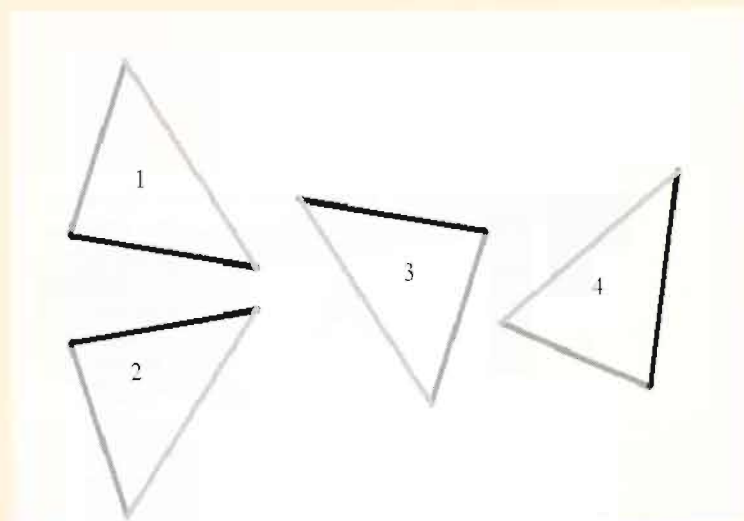
Hershkowitz, R. (1989) Visualization in geometry
- two sides of the coin. Weizmann Institute of
Science, Rehovot, Israel.

Reimer w,l. (1995). Historical Connection, In
Mathematics, Aims Education Foundation Fresno,
California.

כמו לדוגמה בפעילות הבאה:

א.מ.ב.ר. רוזנטל בן ארי

מודדים צלעות



מדדו את הצלעות, רשמו ליד כל צלע את מידותיה.
גזרו את המשולשים והניחו אותם כך שהצלעות
השוות בכל משולש תהיינה מונחות על הצלעות
השוות במשולש האחר.
מה גיליתם?

שאלות לחשיבה:

- האם כל המשולשים ששלושת צלעותיהם שוות
חופפים? (שווים בצורתם, בצלעות, בזוויות
ובשטח?)
- האם כל המשולשים שבהם שלוש הזוויות שוות
חופפים?
- האם כל המשולשים ששטחם שווה חופפים?

שילוב לימודי ההיסטוריה של המתמטיקה בתכנית
הלימודים עשוי, כאמור, לתרום להבנה עמוקה
יותר של תחום הדעת, לתמוך בתפיסת התהליך
של חיפוש פתרונות כעיקר ולהכרה כי המתמטיקה
היא פרי רוחו של האדם.

הבנת הממד היצירתי והאנושי של המתמטיקה
מאפשרת קירוב תחום הדעת ללומדים צעירים
ובוגרים, ולפיכך, לדעתנו, אין לראות בעיסוק זה
רק פרקי העשרה, שניתן לדלג עליהם.

המתמטיקאי הידוע ניוטון (1642 - 1727) אמר:
"אם הצלחתי לראות רחוק יותר מאשר אחרים,
אין זאת אלא משום שעמדתי על כתפיהם של
ענקים"

אם נצליח באמצעות הוראת ההיסטוריה של