לקטה נחמה חורין
עובד ע"י צוות המרכז למתמטיקה

חוקרים צעירים

בכיתת המתמטיקה הפועלת על- פי המגמות החדשות בחינוך המתמטי אמור הלומד לקחת חלק פעיל ביצירת הידע שלו. פיתוח יכולת הבניית ידע מתמטי כרוך בחינוך לחשיבה, להבנה ולפיתוח מיומנויות רפלקטיביות של חשיבה ביקורתית (לתלמידים). בסביבה כגון זו מוטל על מורה למתמטיקה לזמן סיטואציות לימודיות המעוררות את הלומדים להפעיל ולפתח אסטרטגיות חשיבה.

בתהליך החקר נמצא את המרכיבים הבאים:

- **ההתבוננות:** הבנת הבעיה, העלאת ידע קיים רלוונטי, תהליכי איתור מידע, שאילת שאלות, השוואה, חיפוש חוקיות ראשונית של קשרים, השערה, ניסוח כלל ראשוני.
- **חקר:** בדיקה, הצגת דוגמאות נוספות, אישוש או הפרכת ההשערות והכללתן.
- **הסבר:** המללה, הצדקה וניסוח כלל סופי.
- **הרחבה:** הצגת שאלות חדשות בעקבות הממצאים, שינוי הבעיה הנחקרת לכיוונים שונים.

הערה: השימוש בפועל באסטרטגיות החשיבה תלויה, במידה רבה, בהכוונה ובתיווך של המורה, ולכן יש לעורר את התלמידים לשוחח, להמליל תהליכים ולהסביר את דרך העבודה שלהם בכתב או בעל פה.

נדגים את התהליך בשתי בעיות חקר:

א

לפניכם סדרת תרגילי כפל

התבוננו בתרגילים וחקרו את סדרת התרגילים ואת סדרת המכפלות.

$$1 \times 3 = 3$$
$$2 \times 4 = 8$$
$$3 \times 5 = 15$$
$$4 \times 6 = 24$$

מה יהיה התרגיל הבא?
מה יהיה התרגיל העשירי?
הסבירו כיצד מצאתם?

ההתבוננות בסדרת התרגילים תעלה את המושגים: גורם, מכפלה, מספרים עוקבים, סדרה עולה, הפרש וכו'. בשלב ההרחבה אפשר להרחיב את הבעיה לעיסוק בשינויים בגורמים, למשל:

- **שערו מה יקרה לסדרת המכפלות אם נקטין או נגדיל את אחד הגורמים בכל תרגיל במספר קבוע?**

נבדוק לדוגמה את הקטנת הגורם השני ב-1.

סדרת התרגילים המקורית	הפרשים
1x3 = 3	
	> 5
2x4 = 8	
	> 7
3x5 = 15	
	> 9
4x6 = 24	

הגורם השני בכל תרגיל הוקטן ב-1	הפרשים
1x2 = 2	
	> 4
2x3 = 6	
	> 6
3x4 = 12	
	> 8
4x5 = 20	

התבוננות בתרגילים מראה שהמכפלה קטנה בגורם הראשון; בהשוואה למכפלה התואמת שלה בסדרת התרגילים המקורית. המכפלות עדיין מהוות סדרה עולה וההפרש בסדרת ההפרשים לא השתנה למרות שקיבלנו סדרות הפרשים שונות. מעניין לשאול בשלב זה: מה היה קורה לו היינו מקטינים בכל תרגיל את הגורם האחר ב-1, האם התוצאות היו דומות? מה היה משתנה? מה היה נשמר? מה היה קורה לו במקום להגדיל או להקטין ב-1 היינו מקטינים/מגדילים במספר אחר?

■ מה יקרה אם נגדיל או נקטין את אחד הגורמים פי מספר מסוים?

נבדוק לדוגמה את הגדלת אחד הגורמים פי 2.

סדרת התרגילים המקורית	הפרשים
1x3 = 3	
	> 5
2x4 = 8	
	> 7
3x5 = 15	
	> 9
4x6 = 24	

סדרת התרגילים שבה הוגדל אחד הגורמים פי 2	הפרשים
2x3 = 6	
	>10
4x4 = 16	
	>14
6x5 = 30	
	>18
8x6 = 48	

אפשר לראות כי המכפלה גדלה פי 2 לעומת התרגיל המקורי. אם נסתכל על סדרת ההפרשים נוכל לראות, שבתרגילים המקוריים ההפרש בסדרת ההפרשים הוא 2, ואילו בסדרה החדשה הוא 4. נשאלת השאלה, מדוע?

סדרת התרגילים המקורית	הפרשים
1x3 = 3	
	> 5
2x4 = 8	
	> 7
3x5 = 15	
	> 9
4x6 = 24	

סדרת התרגילים שבה הוגדלו שני הגורמים פי 2	הפרשים
2x6 = 12	
	>20
4x8 = 32	
	>28
6x10 = 60	
	>36
8x12 = 96	

■ מה היה קורה לו היינו מגדילים את שני הגורמים פי 2?

אפשר לראות כי המכפלה גדלה פי 4 לעומת המכפלה המקורית, וההפרש בסדרת ההפרשים הוא 8. כל אחת מהחקירות עשויה לעורר שאלות נוספות לחקר.

במהלך העבודה חשוב לאפשר לילדים לשאול את השאלות ולחקור אותן. אחרי שהגיעו למסקנה רצוי לבקש מהילדים לנסות להסביר במילים שלהם מדוע זה קורה. חקירת המכפלות מקבלת ביטוי מוחשי כשהיא מיוצגת בשטחים. בכיתה ה׳, במהלך לימודי שטחי המרובעים חוקרים הילדים שאלות כמו "מה יקרה לשטח המלבן אם אאריך את אחת הצלעות פי..." או "מה יקרה לשטח אם אאריך את שתי הצלעות?" וכו׳.

ב

התבוננו בשוויונים הבאים וחקרו אותם

■ נסו להוסיף זוגות מספרים המקיימים את השוויונים המוצגים;

■ נסו להסביר את התופעה:

$$1\tfrac{1}{2} \times 3 = 1\tfrac{1}{2} + 3$$

$$1\tfrac{1}{3} \times 4 = 1\tfrac{1}{3} + 4$$

בשלב ההתבוננות ננסה לאפיין את הזוגות המוצגים בכרטיס. נבחין בקשר שבין המספרים: המספר הכופל גדול באחד מהמכנה; השלם במספר המעורב הוא תמיד 1.

השאלות שמתעוררות הן, למשל: האם תמיד בתרגילים המקיימים את הקשרים הללו קיים שוויון? אם נשנה את אחד התנאים האם יישמר השוויון? האם ייתכן ששני המספרים יהיו שלמים? בפעילות החקר יגלו הילדים שקיום השוויון מחייב את שמירת התנאים.

אפשר לנסות ולהסביר את התופעה באופן הבא:
נכפול לחוד את השלם ואת השבר ונחבר. כפל ב– 1 נותן את המספר עצמו, וכפל בשבר נותן שבר שמונהו גדול ב– 1 מהמכנה.
אם נבטא שבר זה כמספר מעורב נקבל תמיד 1, ו – 1 חלקי אותו מכנה.

נתאר זאת כך:

$$1\frac{1}{\blacksquare} \times (\blacksquare + 1) =$$
$$1 \times (\blacksquare + 1) + \frac{1}{\blacksquare}(1 + \blacksquare) =$$
$$(\blacksquare + 1) + \frac{\blacksquare}{\blacksquare} + \frac{1}{\blacksquare} =$$
$$1\frac{1}{\blacksquare} + (\blacksquare + 1)$$

אם נתרגם את התרגילים והקשרים שבין המספרים לכתיב אלגברי נקבל:

$$a \neq 0 \quad \left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot(a+1) = \left(1+\frac{1}{a}\right) + (a+1)$$

עלינו להוכיח שהשוויון אכן נכון. ואכן פתיחת הסוגריים תאשר את השוויון.

$$a \neq 0 \quad a + 1 + 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{a} + a + 1$$
$$1 = 1$$

ניסיון לחפש עוד מספרים המתאימים לכלל, מוביל לתיאור כללי של התופעה: **עבור אלו שני מספרים a ו – b יהיה נכון a • b = a + b ?**

שימוש באלגברה מוביל לשוויון הבא:

$$a \cdot b = a + b \;/ -a$$
$$a \cdot b - a = b$$
$$a(b-1) = b$$
$$a = \frac{b}{b-1} \qquad b \neq 1$$

מצאנו קשר בין שני המספרים:

למשל, אם $b = 2 \longrightarrow a = 2$ ואכן $2 \cdot 2 = 2 + 2$

ואם $b = 5 \longrightarrow a = \frac{5}{4}$ ואכן $\frac{5}{4} \cdot 5 = \frac{5}{4} + 5$

כדי לראות את הקשר בין התוצאה שקיבלנו לבין התרגילים שבכרטיס נציג את הקשר בין a ו-b בצורה אחרת

$$a = \frac{b}{b-1} = 1 + \frac{b}{b-1}$$

נציג את a בשוויון $a \cdot b = a + b$ ונקבל:

$$\left(1+\frac{b}{b-1}\right)\cdot b = \left(1+\frac{b}{b-1}\right) + b$$

אנו רואים שכדי לקיים את השוויון על המספרים לקיים את הקשרים שהוזכרו קודם לכן.

שאלות נוספות:

- האם המצב ש-a ו-b שלמים ייתכן רק כש- a=b=2?
- האם ייתכן ש-b יהיה שווה ל- 1?

מעניין לחקור באופן דומה גם את זוגות התרגילים הבאים:

$$1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$
$$2 \times \frac{2}{3} = 2 - \frac{2}{3}$$

$$4\frac{1}{2} : 3 = 4\frac{1}{2} - 3$$
$$5\frac{1}{3} : 4 = 5\frac{1}{3} - 4$$