גרייסי ויניצקי לנדמן

לחלק ולחסר - משחק מתמטי

מבוא

מאמר זה מציג דיווח על סדנה למורים למתמטיקה בבית-ספר יסודי שנלמד בה המושג משחק מתמטי והודגם בפעילות מתאימה. בסדנה הועלו מאפיינים המבדילים בין משחק מתמטי לבין משחק דידקטי (שיכול לעסוק בתחום מתמטי או לא).

בסדנה זו קראנו משחק מתמטי לכל משחק בו:

- משתתפים לפחות שני שחקנים בעלי אינטרסים מנוגדים;
- המסעים תלויים ברצונם של השחקנים, ואין כל יד למזל;
- מספר המסעים הוא סופי;
- זכייה של שחקן אחד פירושה הפסד של האחר;
- כל אחד מהשחקנים יודע מהו מצב המשחק בכל רגע.

להלן הנחיות המשחק ששיחקו המורים במהלך הסדנה ובהמשך יוצג ניתוח הממצאים שהמורים הגיעו אליהם, ולסיכום, כמה נקודות למחשבה שעלו מהתבוננות לאחור על חוויה זו.

לחלק ולחסר - משחק מתמטי*

עזרים דרושים: נייר וכלי כתיבה

מספר משתתפים: 2

אופן המשחק: בוחרים מספר טבעי גדול מ-1 (מומלץ לא גדול מ-50).

צעד 1: השחקן הראשון מחסיר מהמספר הנבחר מחלק שלו השונה ממנו.

צעד 2: מהמספר הנותר, השחקן השני מחסיר מחלק שלו השונה ממנו.

המשך: חוזרים על הצעדים 1 ו-2 לסירוגין עד לסיום המשחק.

סיום המשחק: השחקן שאינו יכול לבצע פעולה הוא המפסיד.

דוגמה:

המספר הנבחר הוא 50

שחקן א' מחסיר 5 (מחלק של 50) ומכריז על 45.

שחקן ב' מחסיר 9 (מחלק של 45) ומכריז על 36.

שחקן א' מחסיר 2 (מחלק של 36) ומכריז על 34.

שחקן ב' מחסיר 2 (מחלק של 34) ומכריז על 32 וכו.

שאלות לדיון:

1. מתי מסתיים המשחק?
2. האם קיימת אסטרטגית ניצחון לאחד השחקנים?
3. איך משתנה המשחק אם מוסיפים את הכלל הבא: מותר להחסיר כל מחלק של המספר השונה מהמספר עצמו ומ-1.

*Trotter,T.(1975): "Five 'Nontrivial' Number Games" In Smith,S.E.Backman,C.A. (eds.) Games and Puzzles for Elementary and Middle School Mathematics. NCTM, Reston,VA pp.148-150.

ניתוח המשחקים

בדף ההנחיות הוצג משחק אחד. שאלה 3 בדף ההנחיות מאפשרת משחק בגרסה שונה במקצת. להלן ניתוח שתי הגרסאות כפי שנעשה בסדנה עם המורים.

גירסה א - הגרסה המקורית:

להלן מוצגים המהלכים של שני משחקים לפי החוקים שהוצגו בדף ההנחיות. בכוונה בשתי הדוגמאות המספר הנבחר כמספר ראשון הוא אותו מספר.

דוגמה 1

שחקן א'	17	(החסיר 1, שמחלק את 17)
שחקן ב'	16	(החסיר 2, שמחלק את 16)
שחקן א'	14	(החסיר 7, שמחלק את 14)
שחקן ב'	7	(החסיר 1, שמחלק את 7)
שחקן א'	6	(החסיר 3, שמחלק את 6)
שחקן ב'	3	(החסיר 1, שמחלק את 3)
שחקן א'	2	(החסיר 1, שמחלק את 2)
שחקן ב'	1	(אין לו צעד אפשרי)
שחקן א'	?	

המנצח:שחקן ב'

דוגמה 2

שחקן א'	17	
שחקן ב'	16	(אין לו ברירה)
שחקן א'	15	(החסיר 1, שמחלק את 16)
שחקן ב'	10	(החסיר 5, שמחלק את 15)
שחקן א'	5	(החסיר 5, שמחלק את 10)
שחקן ב'	4	(אין לו ברירה)
שחקן א'	3	(החסיר 1, שמחלק את 4)
שחקן ב'	2	(אין לו ברירה)
שחקן א'	1	(אין לא ברירה)
שחקן ב'	?	(אין לו צעד אפשרי)

המנצח: שחקן א'

לאחר דוגמה אחת בלבד אפשר לראות שהמשחק מסתיים אך ורק כאשר שחקן בוחר את המספר 1 שחקן זה הוא המנצח, כי במקרה זה לשחקן האחר אין צעד אפשרי.

בשלב זה ניתן לשאול לפחות שתי שאלות מעניינות:

1. בהנחה שהמספר הראשון במשחק הוא **17**, מה כדאי לבחור: להיות שחקן ראשון או שני? איזה שחקן, אם בכלל, יכול להבטיח לעצמו ניצחון?

2. במקרה שהמספר הראשון הוא N, מספר טבעי כלשהו, מה כדאי לבחור: להיות שחקן ראשון או שני? איזה שחקן, אם בכלל, יכול להבטיח לעצמו ניצחון?

זהו השלב המתאים להצגת המונח **"אסטרטגיה".** תשובה לשאלה השנייה היא בעצם ניסוח אסטרטגיה כדי לנצח במשחק זה. אסטרטגית ניצחון במשחק מורכבת משני דברים: תנאים בהם כדאי להתחיל (ובאיזה אופן), ואיך לשחק בכל שלב.

הגדרה: מספר **n** הוא **מספר מנצח** אם השחקן שבוחר אותו יכול - באופן בלתי תלוי במשחק של השחקן האחר - להבטיח לעצמו ניצחון. מספר מנצח לשחקן אחד הוא מספר מפסיד לשחקן האחר.

מסקנה: מהדוגמאות שלעיל עולה, כי במשחק זה 3 הוא מספר מנצח. אם שחקן א' בוחר את המספר 3 אזי לשחקן ב' אין צעד אחר אלא להחסיר 1 ולבחור 2. במקרה זה שחקן א' בוחר 1, ולשחקן ב' אין צעד אפשרי והוא מפסיד.

משפט: כל מספר אי-זוגי הוא מספר מנצח.

הוכחה: במקרה של המספר 1, הטענה ברורה. אם שחקן א' בוחר מספר אי-זוגי גדול מ-1, שחקן ב' יכול להחסיר ממנו רק מספרים אי-זוגיים (כי למספר אי-זוגי אין אף מחלק זוגי), ולכן משאיר תמיד מספר זוגי לשחקן א'. בתנאי זה שחקן א' יכול להחסיר מחלק אי-זוגי של המספר הזוגי שקיבל (לדוגמה לחסר 1) ושוב לבחור מספר אי-זוגי. באופן זה שחקן א' יכול להבטיח לעצמו להגיע ל-1 ובדרך זו הוא מנצח.

הערה: ברור שכדי לנצח לא חייבים לבחור מספר אי-זוגי מיד בהתחלת המשחק, אבל אם השחקן האחר מכיר גם הוא את האסטרטגיה, הוא "יתפוס" את האי-זוגיים וכך יבטיח לעצמו ניצחון.

גירסה ב - ע"פ השינוי המוצג בשאלה 3 שבדיון:

בגרסה זו של המשחק, מותר להחסיר מחלק של המספר השונה מהמספר עצמו ומ-1. בחלק זה של הניתוח בדקו המורים איך השינוי בכללי המשחק משפיע על האסטרטגיה לניצחון בו.

משפט 1: כל מספר ראשוני הוא מספר מנצח.

הוכחה: אם שחקן א' בוחר מספר ראשוני, לפי כללי המשחק שחקן ב' צריך - במידת האפשר - להחסיר ממנו מחלק שלו השונה מעצמו ומ-1, והיות שהמספר הוא ראשוני לשחקן זה אין צעד אפשרי, ולכן שחקן ב' מפסיד.

משפט 2: אם מספר n הוא ראשוני, אז המספר 2n הוא מספר מפסיד.

הוכחה: אם שחקן א' בוחר במספר 2n, שחקן ב' יכול להחסיר ממנו n ולהשאיר n. מכיוון ש- n הוא מספר ראשוני, לפי משפט 1, שחקן ב' יכול להבטיח לעצמו ניצחון, ומכאן ששחקן א' מפסיד.

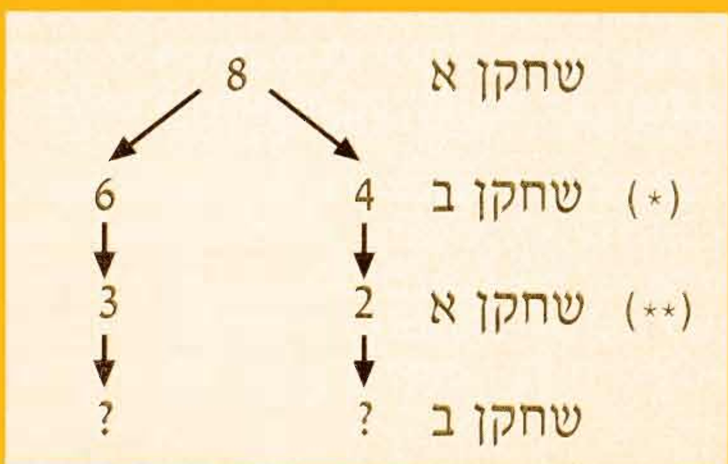
משפט 2': אם מספר n הוא מספר מנצח, אז כל מספר מהצורה n+p עם p מחלק של n ששונה מ-1, הוא מספר מפסיד.

הוכחה: אם שחקן א' בוחר במספר n+p (כאשר p מחלק של n ששונה מ-1), שחקן ב' יכול להחסיר ממנו p, כי p מחלק את n+p ועל-ידי כך משאיר את המספר n. לפי הנתון, n הוא מספר מנצח, ולכן שחקן ב' יכול להבטיח לעצמו ניצחון, ומכאן ששחקן א' מפסיד.

משפט 3: המספרים הראשוניים אינם המספרים המנצחים היחידים. נוכיח משפט זה באמצעות הוכחת המשפט הבא: המספר 8 הוא מספר מנצח.

הוכחה: נוכיח כי אם שחקן א' בוחר את המספר 8 הוא יכול להבטיח לעצמו ניצחון, ולא משנה מה עושה שחקן ב'.
אם שחקן א' בוחר את המספר 8, לשחקן ב' שתי אפשרויות משחק: להחסיר 2 (ולהשאיר 6) או להחסיר 4 (ולהשאיר 4).
1) אם שחקן ב' מכריז על 6, שחקן א' יכול להכריז על 3 והיות ש-3 הוא מספר ראשוני, שחקן א' מנצח. (א' יכול להכריז על המספר 4, אבל לא כדאי לו, כי לפי **משפט 2**, 4 הוא מספר מפסיד.)
2) אם שחקן ב' מכריז על 4, שחקן א' יכול להכריז על 2 והיות שהוא מספר ראשוני, שחקן א' מנצח.
מכיוון שבשני המקרים השחקן א' משאיר ליריבו מספר ראשוני, הוא המנצח.

את הכתוב לעיל הצגנו באופן גרפי כדלקמן:



הערות:
* אלה **כל** הצעדים האפשריים של שחקן ב'.
** אלה **רק חלק** מהצעדים האפשריים של שחקן א'.

אתגר לקורא: להוכיח כי 9 ו- 15 הם מספרים מנצחים.

סיכום ביניים: עד כה אפשר למיין את כל המספרים הטבעיים מ-1 עד 20 לשתי קבוצות זרות.

המספרים המנצחים עד 20 הם:

המספרים הראשוניים 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
המספר 8 (לפי הדוגמה במשפט 3).
המספרים 9, 15 (ניתן לגלות בבדיקה).

המספרים המפסידים עד 20 הם:
4, 6, 10, 14, (על פי משפט 2)
וכן המספרים 12, 16, 18, 20, (על פי משפט 2').

אתגר לקורא: להרחיב את מיון המספרים הטבעיים שמופיע בטבלה הקודמת עד המספר 50.
רמז: אפשר לזכור בקלות את רשימת המספרים המנצחים.

ואז...
לאחר הצגת ניתוח המשחק אפשר לומר:

1. כאשר ידוע מהו N, המספר שאיתו מתחילים את המשחק, שחקן שמכיר את רשימת המספרים המנצחים/המפסידים יודע להחליט אם כדאי לו להיות ראשון (אם N מספר מנצח) או להיות "נחמד" ולתת לשחקן השני לפתוח במשחק. לאחר מכן, מכיוון שיש לו האפשרות לבחור מספר מנצח, הוא יכול להבטיח לעצמו ניצחון אם הוא משחק כפי שהודגם לעיל.

2. כאשר ידוע מהו N, המספר שאיתו מתחילים את המשחק, ושני השחקנים מכירים את רשימת המספרים המנצחים/מפסידים, המשחק לא יתקיים, כי השחקנים לא יגיעו להסכמה: אף אחד מהם לא ירצה להתחיל, או ששניהם ירצו להתחיל.

3. באותו אופן, אם צריך לקבוע מהו המספר N ומיהו השחקן הראשון, המשחק לא יתקיים, כי השחקנים לא יגיעו להסכמה משום שרשימת המספרים המנצחים היא אותה רשימה לשני השחקנים, ושניהם ירצו לפתוח בצעד שיבטיח להם ניצחון.

סוף דבר:

בסדנה זו דנו המורים במושגים מוכרים להם היטב מעבודתם בכיתות יסוד. המסגרת של הדיון היתה לא שגרתית מכיוון שהם מצאו את עצמם דנים במושגים מתמטיים, כגון מספר פריק, מספר ראשוני, מחלק, כפולה של 2, חזקה של 2 וכו', אבל לא בהגדרתם או בדוגמאות, אלא בכדאיות של בחירתם כדי לנצח במשחק תחרותי.
מהדיווחים שלהם עולה, כי משחק מתמטי כזה יכול לתרום להבנת היבטים נוספים של המושגים שהוזכרו לעיל, והתלמידים יכולים למצוא במשחק כזה חוויה משמעותית ומעניינת.
מבחינה מתמטית הנימוקים וההוכחות שהופיעו בסדנה הם ברמה של תלמידי בית-ספר יסודי, ורצוי - כפי שטענו המורים - לעודד את הלומד לפתח שפה מתמטית על מנת שיוכל לנסח בעצמו אסטרטגיה לניצחון במשחק, שהוא משחק וגם להסביר את אופן עבודתו במתמטיקה.
מורים אחדים הסתייגו מכך שלא נעשה שימוש "בשיטה כללית" או "בשיטה אלגברית" כדי לענות על שאלה מס' 3 בדף ההנחיות, אבל הרוב ראו בכך נקודה חשובה שמחזקת את מידת היישום של פעילות כזאת בכיתה של לומדים צעירים, שעדיין לא שולטים בשפה האלגברית.
אנו תופסים את המשחק המתמטי כמקרה פרטי של בעיה מתמטית, לכן אופן הבנייה של האסטרטגיה לניצחון במשחק היה מיוחד במינו, כי כל שלב וכל ממצא נשען על קודמיו, וזאת היתה, לדעתנו, הזדמנות להפגיש את המורים עם סוג של פתרון בעיה מתמטית לא שגרתית, פתרון קונסטרוקטיבי שמדגים היטב את העיקרון הדידקטי "מהקל אל הכבד".