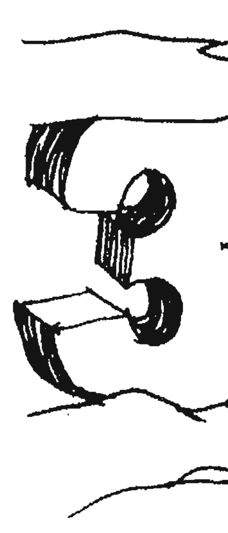
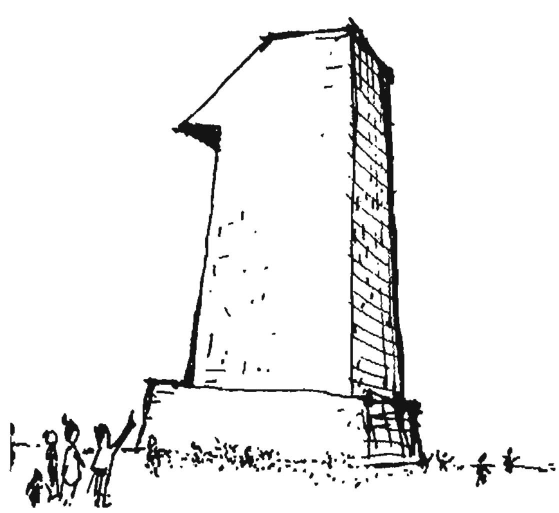




תלמה גביש

אל תיתנו להם בדידים

אופיו של תהליך הלמידה

המציאות מיוצגת במוחנו באמצעות סמלים, מילים, תמונות ואופנויות נוספות אחרות. כאשר אנחנו לומדים מושג כלשהו, למשל עיפרון, אנחנו עושים זאת באמצעות מפגשים רבים עם עפרונות מסוגים שונים ועם השם "עיפרון" עד **שהמושג** עובר תהליך של הכללה ומתחבר אל **המונח** כלומר אל המילה המייצגת את התופעה הנקראת "עיפרון". כאשר ילד מקבל לידיו עיפרון חום בעל אורך מסוים ואימו אומרת לו: "הנה עיפרון", ולאחר זמן-מה היא מושיטה לו עיפרון צהוב קצר ממנו ואומרת: "צייר בעיפרון הזה" וחוזר חלילה, הילד מצמיד לתופעה עיפרון (המושג) את המילה "עיפרון" (המונח). אם לאחר זמן יימצא על השולחן עיפרון אדום קטן מקודמיו והילד יתבקש לתת לאמו עיפרון, הוא יושיט לה את העיפרון האדום הקטן, למרות היותו שונה בגודלו ובצבעו משני קודמיו. המהות של העיפרון אינה קשורה לצבעו ולגודלו.

המונח "עיפרון" מתייחס למהות הזאת ולא לתכונה מקרית של עיפרון מסוים. מונח זה מייצג עתה במוחו של הילד כל סוג של עצם המתפקד כעיפרון. אם לבקשתה של האם הוא ייענה בהושטה של עט פירושו של דבר שלא נעשה הקשר הנאות בין המושג למונח יש פגם בייצוג הפנימי של המושג.

ייצוג פנימי מוטעה של מושג ימוטט בתנאים מסוימים כל חשיבה או עשייה שמתבססת עליו, אך הוא יכול גם להיות מוסווה בשימוש המילולי במילה הנכונה, למרות ההתכוונות אל מושג אחר, בייחוד אם יש קרבה בין הדברים, כמו במקרה של העט והעיפרון.

נתבונן בעוד דוגמה: אצל עיוור צבעים הצבע "אדום" מיוצג אחרת מייצוגו של צבע זה אצל מי שמבחין בצבעים. הוא אמנם ישתמש במילה "אדום", אבל יתכוון למשהו אחר מהמקובל. אצלו התופעה "אדום" נתפסת כגוון של אפור (תלוי בטיב העיוורון). הוא יודע שכולם קוראים לגוון הזה: "אדום" וכך יעשה אף הוא. השימוש הנכון במונח, למרות הייצוג הלא-נכון שלו בתפיסתו של עיוור הצבעים, מסווה את הייצוג הפנימי ומקשה על ההבחנה בייצוג הפנימי המוטעה. רק בסיטואציות מיוחדות יהיה אפשר להבחין בטעות. למשל, אם נבקש מעיוור צבעים לצאת לשדה ולקטוף רק עגבניות אדומות, ואם עיוורונו מתבטא באי הבחנה בין ירוק לאדום, יש סיכוי שהוא יקטוף עגבניות ירוקות ועיוורון הצבעים ייחשף. די בעובדה שהגוון של העגבניות יהא בעיניו כגוון של ה"ירוק", כפי שהוא רואה אותו, כדי שהטעות תתרחש.
בדוגמת העיפרון - הטעות תתגלה רק כאשר הילד יתבקש להביא עיפרון ובמקומו יביא עט. מאחר שהעיפרון והעט שניהם כלי כתיבה יכולות להיווצר הרבה סיטואציות שבהן לא נוכל לחוש בכשל שנוצר בתהליך הייצוג הפנימי אצל הילד.

מה שנכון לגבי העיפרון ולגבי הצבע, שהם מוחשיים, בוודאי נכון במושגים מופשטים. שבהם קשה עוד יותר לבחון אם הייצוג הפנימי נכון. כמו שעיוור הצבעים יכול לחיות בקרבנו שנים רבות מבלי שנחוש בבעייתו והוא כאילו מתפקד נכון בתחומי הצבע, הרי שבמושגים מופשטים אדם יכול להשתמש במילים מבלי שקישורן למושג הנכון יהיה תקין. אם הוא משתמש במילים במשמעות המקורבת למובנן המדויק, לא נחוש בטעותו. זו

תתגלה רק במקרה שיש צורך בהבחנה דקה יותר של המשמעות. רק בנייה מדויקת של מושגים תמנע מראש טעויות עתידיות [1].
הוא הדין לגבי המספרים הטבעיים המהווים את הבסיס של החשיבה המתמטית והמדעית. הקנייה מדוקדקת של משמעותם היא תנאי הכרחי לבנייה של חשיבה מתמטית ומדעית המתבססת על מנגנון תקין של בניית ייצוגים פנימיים נכונים.

תהליך הלמידה מההיבט המתמטי

מהו המספר הטבעי?
למספר הטבעי שלוש משמעויות.

1. **כמות** 2. **סדר** 3. **יחס**

יש לזכור שהמספר מייצג בראש ובראשונה כמות, ושתי התכונות האחרות של המספר הן תוצאה של תכונת הכמות. עובדה זו נכונה הן מהבחינה ההיסטורית, הן מהבחינה המתמטית, הן מהבחינה הפסיכולוגית והן מהבחינה הלוגית, ומתוך כל אלה גם מהבחינה הדידקטית [2].
העובדה שהמספרים הטבעיים מסודרים נובעת מהיותם מונים כמויות. לדוגמה, 9 בא אחרי 8 , כי זה סדר המנייה של כמות העצמים.
תכונת היחס אף היא פועל יוצא מתכונת הכמות. למשל, אם נאמר שיש לי 6 עפרונות, הרי משמעות הדבר היא שבידי 6 פעמים היחידה שהיא העיפרון.

כאשר מלמדים את המספרים הטבעיים צריך לזכור ש:
1. כמות וצבע אינם אותו הדבר.
2. כמות וגודל אינם אותו הדבר.

הקניית המספר הטבעי באמצעות גודל וצבע כמוה כיצירת אדם "עיוור מספרים". כמו שעיוור הצבעים יוכל לתפקד עד לרמה מסוימת מבלי שנחוש בתקלה, אבל בשלב מסוים היא עלולה להיחשף עקב כישלון בביצוע, כך גם הילד שיחשוב שגודל, כמות וצבע הם אותו הדבר עצמו יוכל לפעול עד שלב מסוים, אבל כישלונו ייחשף בשלב מתקדם יותר של המתמטיקה והמדעים.

1. כמות וצבע אינם אותו דבר

מיותר לציין שהקשר בין כמות לצבע מופרך מיסודו.
הצמדת צבע לכמות באמצעות צביעת כל בדיד בצבע המייחד אותו, אין לה הצדקה לא מצד ההיגיון ולא מצד הדידקטיקה, שכן הקניית טעות לוגית אין לה צידוק מכל צד שהוא. כך יוצרים פגיעה בייצוג הפנימי של המספר.
אם הכוונה לעזור לחלשים או לתלמידים בעלי היכולת הממוצעת, המקרים שיתוארו להלן יוכיחו את ההפך. אשר לתלמידים המוכשרים למתמטיקה, אלה מתעלמים מהצבע ומההצמדה לגודל. הם חייבים לעבור תהליך של "שחרור מהייצוגים הפנימיים הפגומים" שנכפו עליהם כדי שיוכלו לממש את הפוטנציאל המתמטי שלהם. אותם תלמידים שלא יעברו את התהליך הזה לא יגיעו לרמות גבוהות יותר של המתמטיקה, אפילו אם יש להם באופן טבעי יכולת להגיע להישגים נאים במקצוע.

2. מדוע כמות וגודל אינם אותו דבר?

כדי שנבין את משמעות המספר עלינו להבחין בין כמות בדידה (דיסקרטית) לכמות רציפה. לכמות רציפה, כמו בבדידים או בסרגל, יש שתי תכונות נבדלות זו מזו. יש התכונה של הכמות: בידי **שלושה** סרגלים – **כמות** הסרגלים היא **שלושה**. יש התכונה של **הגודל:** הסרגל שבידי **גדול** מזה שבידך. הצמדת מספר לבדיד יש בה, אפוא הטעיה. הבדיד הוא **אחד** בין שהוא גדול ובין שהוא קטן. בהיותו גודל רציף, מלכתחילה אין הוא בנוי **לייצג** כמות.

ב"מבוא לתורת ההיגיון", מבחין הוגו ברגמן [3] בין המהות של הדברים, שזו תכונה הטבועה בדבר, לבין חוקיות שהיא מחוץ לדברים, אף-על-פי שהיא משויכת להם. יש אפוא להבחין בין גודל שהוא ממהותו הטבעית של העצם לבין כמות, שהיא חוק חיצוני לדבר – חוק המושלך על הדברים בכוח ההיגיון. לכן כמותם של שלושה גורדי שחקים זהה לחלוטין לכמות של שלושה בני אדם. וכמותם של ארבע אנשים אינה תלויה בגובהם או במשקלם. לכמות אין קשר למהות הדברים שהיא מונה. משמע, הפיכת הדבר עצמו – הבדיד – לכמות אינה עומדת במבחן ההיגיון.

גם סדר הוא חוקיות שמחוץ לדבר. הסדר אינו מתקשר בהכרח לכמות. רק סוג מסוים של סדר מתקשר לכמות – זה שמנייתו ערוכה בטור, והוא פועל יוצא מהאופי הכמותי של הדברים הנמנים: ראשון, שני, שלישי וכו'. לכן הכמות קודמת מבחינה לוגית גם לסדר [4].

---

[1] (3), (6), (7), (9), (14), (15) – המספרים שבסוגריים מכוונים למספרים הסידוריים של הפריטים שבביבליוגרפיה בסוף המאמר.
[2] מהבחינה המתמטית: (17), (19), (21), (23), (25); מהבחינה ההיסטורית: (8), (24); מהבחינה הפסיכולוגית: (12), (13), (14), (15), (16), (18); מהבחינה הדידקטית: (5), (7), (16), (17), (22), (25). מהבחינה הלוגית: (4).

התהליך המנטלי המתלווה להבנה של גודל וכמות

מבחינה פסיכולוגית יש להבחין בין שתי אופרציות מנטליות (פעילויות חשיבה) שונות, אך תלויות זו בזו: **הבנת יחסים והשלכת יחסים.**
הבנת ההיבט הכמותי של המספר היא בבחינת הבנת יחסי כמות, למשל: 7 הוא יותר מ – 4. מדידה של גודל היא בבחינת השלכת יחסי כמות: הסרגל הזה מכיל 20 ס"מ. עלי להבין קודם לכול את המושג 20 מהבחינה הדיסקרטית (הבדידה) שלו. רק אחר כך תהיה משמעות כלשהי למספר הס"מ שיש בתוך אותו סרגל. משמע, שהבנת גודלו של הסרגל תלויה בהבנת הכמות.

המסקנה המתבקשת מכל האמור היא, שבעת הקניית המושג יש ללמד אך ורק את המספר ככמות. רק לאחר שהמושג הופנם כראוי והתלמידים הגיעו להבנה של היחסים האפשריים בכמויות ולאוטומטיזציה בתחום זה, אפשר לעבור להיבטים האחרים של המספר. בסוף התהליך יבוא הטיפול במדידת גדלים, שהוא הקשה מכול, כי תהליך של השלכת יחסים קשה מעצם טבעו. קודם עלינו להבין את הכמות הבדידה ואחר-כך להשליך את ידיעתנו זו על גודל רציף, וכאילו לחלק אותו לכמויות בדידות.
דוגמה אחרת: לא נבין את משמעות הכיתוב על בקבוקי משקה המודיע שתכולת הבקבוק היא 500 מ"ל, אם לא נבין את הכמות הבדידה שהיא 500 ואת היחידה שהיא מ"ל.

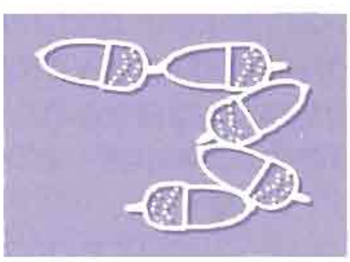
הבדידים כמרכיב מרכזי בהצגת המספר

מאחר שהמספר מייצג כמות, ומאחר שהכמות אינה תלויה בדבר הנמנה, אלא רק בחוקיות המוטלת עליו מבחוץ, כדי להדגים כמויות חייבים להשתמש באמצעים שונים ומגוונים, כמו פרחים, סוכריות, ילדים, נעליים, כיסאות ועוד. אסור בתכלית האיסור להיצמד להמחשה מסוג אחד. אפילו אם נשתמש באמצעי המחשה רבים, הרי מרכזיותם של הבדידים בהצגת החוקיות המתמטית פוגעת קשה בהבנה המתמטית. עניין זה נוגד לא רק את ההיגיון, אלא גם את כל תורות הלמידה המתקדמות, כמו זו של פיאז'ה או של ויגוצקי [5]. אם חפצים אנו לבנות אצל הילד תהליכים של שימור חוקיות [6], על אף שינויים שחלים בתופעות, הרי המתמטיקה הנלמדת נכון היא מכשיר מרכזי בתהליך. פיתוח וביסוס תהליכים של שימור קביעויות תתרום לחשיבתו של הילד הרבה מעבר למתמטיקה. שימוש מסיבי באמצעי המחשה אחד יפגע בכל תהליכי שימור הקשורים למתמטיקה, כי הייצוג הפנימי שנוצר אצל הילד יהיה צמוד לגודל ולבדידים והוא יתקשה להכליל את המושג. ממש כמו שאי אפשר להקנות את המושג "עיפרון" באמצעות הצגה חוזרת ונשנית רק של עיפרון צהוב בעל אורך מסוים, ומבלי להפגיש את הילד עם עפרונות שצבעם וגודלם שונים. ילד שלמד את מושג העיפרון רק בעזרת הצג עיפרון מסוג מסוים, לא יזהה משהו כעיפרון כאשר הוא ייתקל בעיפרון אדום השונה בגודלו או בצבעו מזה שהכיר.

כמה מקרים לתיאור נזקי הבדידים

מקרה א':

בכיתה א' בסוף שנת הלימודים התבקשה ילדה לבצע את התרגיל: 3+2 באמצעות בדידים. היא פעלה נכון, לשביעות רצונה של המורה. ביקשתי ממנה להסביר לי את התרגיל באמצעות בלוטים שהיו בכיתה. וזו הייתה תשובתה: היא ניסתה לכתוב את הספרות, במקום להבין את המשמעות הכמותית.



כשראתה שהבלוטים אינם מספיקים ליצירת הספרות, אמרה: "אי אפשר לעשות את התרגיל עם בלוטים." בסוף כיתה א' היא לא הבינה את מושג המספר כמייצג כמות, והחליפה את הסמל במשמעות. והרי זה תהליך קוגניטיבי שדומה להחלפת דגל של מדינה (שהוא הסמל) במשמעות של המדינה עצמה (שהיא המסומל).

חשיבותה של המתמטיקה נובע מהקומפטביליות (התואמות) שבין המספרים לבין התופעות. אי-הבנה של המספר כמייצג כמות תחסום לתלמידה את הדרך להבנה מתמטית כלשהי בעתיד. הבדידים חרצו את גורלה האקדמי.

מקרה ב':

לילדה שסיימה את כיתה א' הצגתי שלושה עפרונות בגדלים שונים. שאלתי: "כמה עפרונות יש לי כאן?"

---

[3] (4), (7). [4] (13), (14).

[5] (3), (13), (14), (15). [6] (1), (12).

- אחד גדול, אחד קטן ואחד בינוני.
- תחשבי היטב.
- אה! אני מבינה. אחד ועוד חצי ועוד רבע.

הילדה לא יכלה לומר פשוט שיש על השולחן שלושה עפרונות.
זו הייתה תלמידה מצטיינת בכיתה א', ואף-על-פי-כן (ואולי דווקא בשל כך) לא ידעה להבחין בין כמות לגודל.

מקרה ג':

סיפרה לי מורה המטפלת בליקויי למידה שתלמידה שלה בכיתה ב׳ התקשתה להבין את מושג המספר. כאשר המורה לימדה אותה, הילדה אמרה: "יה, אצלנו בכיתה 5 הוא רק צהוב ואצלך את מרשה ש-5 יהיה גם 5 חרוזים וגם 5 דיסקיות וגם 5 ביסלי." הילדה התפעלה מההפרדה של המספר מהצבע ומהצגתו של המספר ככמות. בשבילה זה היה חידוש מרענן.

מקרה ד':

בסוף כיתה ב' המורה יושבת עם שבעה ילדים ומלמדת אותם את משמעות המספר הדו-ספרתי. היא מציגה את המספר 21 ושואלת מהי ספרת האחדות ומהי סיפרת העשרות. כל ילדי הקבוצה עונים נכון. אחר-כך המורה שואלת: כמה אחדות יש בכל המספר. הילדים מתקשים. המורה רוצה להציג לפניהם את הפתרון באמצעות בדיד העשר ובדידי האחד. עד שהיא טורחת באיסוף הבדידים אני מביאה ערמה של אבני חצץ ושואלת כל ילד בתורו: " יש כאן עשרת?"
הילדים טוענים שאין. אני מבקשת שיחשבו שנית. ילדה אומרת שיש עשרת. אני מבקשת שתסביר לשאר חברי הקבוצה. היא לוקחת את בדיד 10 מניחה לפניה לוקחת אבני חצץ ומונה 10 מהן. בזמן שהיא נוטלת את האבנים אני מבחינה שהיא בוחרת רק את אלו שהן בגודל בדיד ה – 1. היא מניחה את האבנים ליד הבדיד 10. לאבנים יש בליטות ורק שמונה אבנים מסתדרות ליד הבדיד הכתום (בדיד 10). הילדה אוספת את האבנים ומחזירה לערמה הגדולה שהבאתי ואומרת: "לא, אין כאן עשרת".
זו ילדה מחינוך רגיל ברמה בינונית. הבלבול בין גודל לכמות חסם את הדרך לכל ילדי הקבוצה להבין את מושג הכמות. מובן מאליו שאף פעם הם לא יידעו לגשת לבעיה מתמטית, אלא אם יעברו טיפול משקם- למרות היותם ילדים רגילים.

הילדה הזאת זיהתה זיהוי מוחלט בין גודל לכמות. הבדיד הכתום ייצג לה עשרת. בשבילה המושג "עשרת" הוא גודל מסוים, והמושג "אחד" הוא גודל של בדיד האחד (הלבן). הילדה, כמו שאר חבריה, עשתה התאמה חד-חד-ערכית בין הבדידים לבין הכמויות שהם אמורים לייצג, בהסתמכה על מה שנלמד בכיתה [7].

מדוע הכישלון אינו מתגלה תמיד בתחילת התהליך?

במבדק הארצי, שנערך בשנת תשנ"ט, ציוני תלמידי כיתות ד' היו משביעי רצון באופן יחסי. הכישלון הגדול היה בטכניקה אלגברית בכיתות ח'. זו דרכו של ייצוג פנימי מוטעה. הוא מתגלה לא בשלב שבו אנו שואלים שאלה ישירה על החומר. הרי התלמידים שתוארו במקרה ד׳ יכלו לענות נכון בעזרת בדידי ה – 1 הלבנים.
בדומה לעיוור הצבעים, אם נצביע לו על משטח אדום ונשאל אותו איזה צבע הוא רואה, הוא יענה נכון: זה אדום, כי למד שאנו קוראים לגוון הזה "אדום". אבל אם נשלח אותו לשדה עגבניות, שבו עליו להבחין בין העלים הירוקים, לעגבניות הירוקות ולעגבניות האדומות – שם יתגלו ייצוגיו הפנימיים המוטעים [8]. זה מה שקרה לתלמידי כיתות ח'. הם נכנסו לשדה המתמטיקה ועולמם המתמטי התמוטט.

פגיעה בייצוג פנימי, שכבר נוצר והתגבש, גוררת התנגדות ומבוכה, כאשר המשמעויות המתמטיות אינן תואמות את הייצוגים הפנימיים של המספר, שהן – לפי הבדידים – גדלים רציפים. אם נלמד ילד שעיפרון הוא רק בעל גודל וצבע מסוימים, תהיה זו פגיעה קשה בייצוג הפנימי שלו. הצגה של עיפרון בגודל אחר או בצבע אחר תביא לכך שברוב המקרים הוא יגלה התנגדות עזה לערעור הייצוג הפנימי שכבר קיים אצלו. הוא יחוש שמשהו אינו כשורה. ייווצר אצלו תהליך שנקרא, **Cognitive Dissonance**. הסתירה בין המיוצג אצלו לבין החידוש, המערער ייצוג זה, יגרום להתנגדות או לשיתוק מוחלט של הפעילות הקשורה לדבר. זה מה שקורה לילדים שלמדו שגודל (רציף) מסוים מייצג כמות (שאינה רציפה); הם כאילו קפאו על עומדם – האמת הפנימית שלהם לא התיישבה עם דרישות המתמטיקה.

---

[7] (11).

ברור שכדי לפתור בעיות במתמטיקה אנו נזקקים לפן הכמותי של המספר, לכן התלמידים שהבדידים שימשו בסיס ללימודי החשבון שלהם נכשלים דווקא בפתירת בעיות [9].

כדי למנוע את המשך ההידרדרות במצב המתמטיקה, כפי שזו באה לידי ביטוי במבדקים הבין-לאומיים [10], אין לנו ברירה אלא להגיע למסקנה המתבקשת מכל האמור: אם חפצים אנו בקידום הילדים – **אל ניתן להם בדידים בשלב ההקניה של מושג המספר, או בשלב ההסבר של פעולות החשבון!**
לאחרונה נכנסה תכנית להוראת הבדידים בגני הילדים. כל עוד הילדים משתמשים בהם למילוי שטחים, אינני רואה, ברגע זה, היזק כלשהו; אבל חלק מהתכנית בנוי על הצמדת מספר לבדיד. בגלל גילם הרך של הילדים – הפגיעה ביכולתם המתמטית תהיה מוחלטת ועמוקה יותר. יש להניח שהשימוש בבדידים יחרוץ את דינם לכישלון מתמטי. לחלקם תהיה זו מכה אנושה וגורלם האקדמי ייחרץ בגן הילדים.

ביבליוגרפיה והערות

1. שימור של חוקיות הכרחי לביצוע כל פעולה ברמה המופשטת. לדוגמה, החוק של הנפילה החופשית פועל על כל העצמים. הוא נשמר בלי כל קשר לצבעם, ליופיים או לכל תכונה אחרת שלהם. כדי להבין זאת חייב האדם להיות מסוגל להבין את החוק ולשמרו במחשב (חוק הנפילה החופשית), למרות השינויים שחלים בתופעה (התכונות השונות של עצמים נופלים שונים, למשל טעמם, צבעם וריחם).
2. הדוגמה הזאת מבוססת על מקרה אמיתי שאירע לאדם מבוגר. כל הדוגמאות האחרות שבמאמר נלקחו מעבודה עם ילדים. בתקופה שבדקתי את הנושא של הבחנה בין גודל לכמות עסקתי בהנחיה ובדקתי כ – 3000 תלמידים. אצל מרביתם מצאתי אותם כשלי חשיבה. היה קשה מאוד לתקן את המושגים המוטעים, כי טעותם הופנמה והייצוגים הפנימיים המוטעים התגבשו והפכו לחלק מהבנתם את המציאות.
3. בר-אל ציפי (1985). יסודות הפסיכולוגיה הקוגניטיבית (חוברת 8, עמ' 35 – 46). תל-אביב:האוניברסיטה הפתוחה.
4. ברגמן הוגו (1964). **מבוא לתורת ההגיון** (חלק א', פרק ראשון).ירושלים, מוסד ביאליק.
5. גביש תלמה,(עורכת),(1994). **לחשוב נכון מהגן עד התיכון**, קרית ביאליק: הוצאת "אח" עמ' 83 – 100.
6. גביש תלמה (1996), **ללמוד לחשוב**, קרית ביאליק: הוצאת 'אח'.
7. גביש תלמה, (1998). **לחשוב, להבין, להצליח**, קרית ביאליק: הוצאת 'אח'.
8. דוזורצב י', ויניצקי ג'. וקופר א., **תכנים היסטוריים לשילוב בהוראת המתמטיקה**. חיפה. הטכניון – המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים. (עמ' 16 –17)
9. ויטגנשטיין לודוויג, (תשנ"ה). **חקירות פילוסופיות.** ירושלים: הוצאת מאגנס, האוניברסיטה העברית.
10. מובשוביץ-הדר נצה, TIMSS המחקר הבינלאומי השלישי להערכת הישגים במתמטיקה ובמדעים. **על"ה 21**, דצמבר 1997, עמ' 13 – 35. **על"ה 22**, מאי 1998 עמ' 29 – 46.
11. נשר פרלה וצוות מתמטיקה במט"ח (1993), **אחת, שתים ו...שלוש חוברת 4** (עמ' 08, 81,84) תל-אביב המרכז לטכנולוגיה חינוכית ומשרד החינוך האגף לתכניות לימודים.
12. סרוף אלן, קופר רוברט ודהארט גאני (1998). **התפתחות הילד טבעה ומהלכה** (עמ' 391 – 406). תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.
13. פיאז'ה ז'אן (1974). **הפסיכולוגיה של הילד** (עמ' 110 – 111), תל-אביב: ספרית הפועלים.
14. פליבל ג'והן ה, (1971), **הפסיכולוגיה ההתפתחותית של ז'אן פיאז'ה** (עמ' 300 – 305). תל-אביב: אוצר המורה.
15. קלר יחיאל (1990), **מבוא לפסיכולוגיה** (יחידה 6: עמ' 54 – 65: חשיבה), תל-אביב: האוניברסיטה הפתוחה.
16. שטיינברג רותי (1989), התפתחות דרכי חשיבה מתמטית של ילדים בגילאים 5 – 8 **החינוך וסביבו.**
17. שרון דליה, עורב מיכל, ד"ר הרשקוביץ רינה ואוסטשינסקי נירה (1997), **כלי חשיבה בסיסיים לפתרון בעיות מילוליות במתמטיקה – מדריך למורה**, (עמ' 7 – 74), ירושלים: מכון ברנקו וייס לטפוח החשיבה.

18. Atkinson Rita Atkinson Richard C., Smith Edward E. Hilgard Ernest R., (1985), Introduction to Psychology (pp.71 — 75). San Diego. Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. 19.Fisher Robert (1995). Teaching Children to Think (pp.184 — 219). U.K: Stanley Thornes.
20. Garden R. A., (February 1987). The Second IEA Mathematics Study (pp. 47 — 68), Comparative Education Review.

במאמר יש התייחסות ישירה להרעה הבולטת בהישגי ישראל במתמטיקה, שחלה בין השנים 1964 ל – 1984 (עמ' 64).

21. Heath Thomas Little, (1956), The Thirteen Books of Euclid's Elements. Book 7 vol.2. N Y: Dover Publications
22. Lorton – Baratta Mary (1976). Mathematics Their Way. California: Addison — Wesley Publishing Company.
23. Richardson M. 1958. Fundamentals of Mathematics. N Y: The Macmilan Company. (Chapter 3: The Simplest Numbers pp. 41 — 59.)
24. Smith D. M. (1951) History of Mathematics. N Y: Dover Publication.
25. Wood M. Martha, Capell Peggy (1995).
26. Developmental Mathematics (pp.1— 63). N Y: Brooks / Cole Publishing Company.

---

[9] (17). [10] (10), (20).